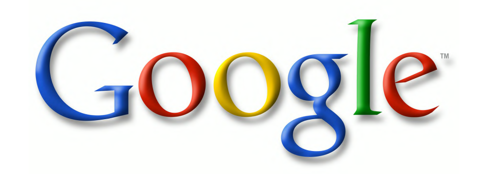
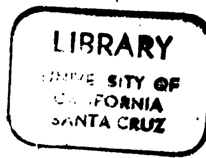
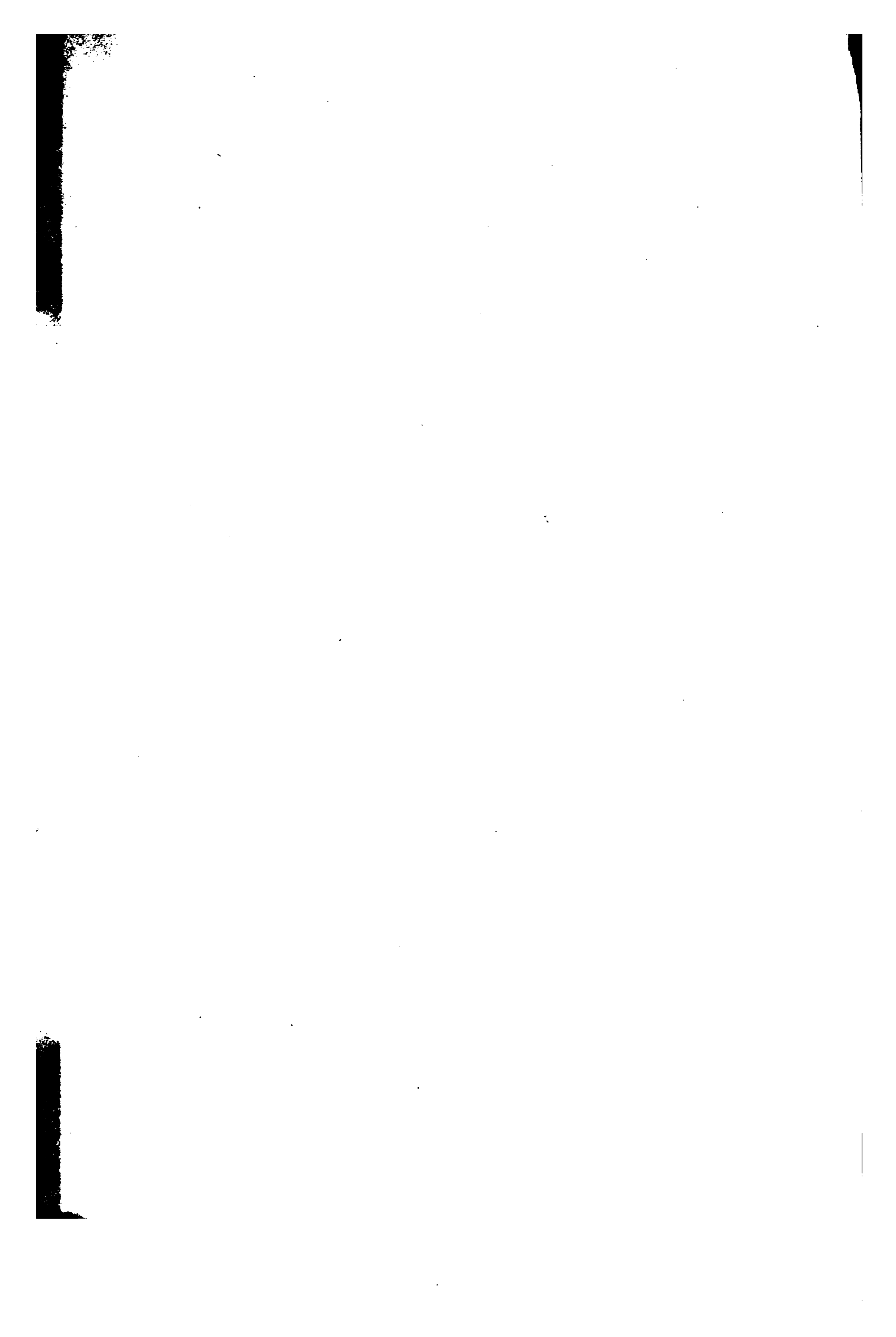




E Libris

C. H. F. Peters.



DIE ELEMENTE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG.

ZUR EINFÜHRUNG IN DAS STUDIUM

DARGESTELLT

VON

AXEL HARNACK

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DEM POLYTECHNIKUM ZU DRESDEN.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1881.

Vorwort.

Zu der vorliegenden Arbeit wurde ich durch meine Berufsstellung veranlasst. Bei meinen Vorträgen über die Differential- und Integralrechnung an dem hiesigen Polytechnikum habe ich vor allem die Zwecke der Techniker zu berücksichtigen, denen das Studium der Analysis vornehmlich als Hülfsmittel zur Lösung mechanischer Probleme dienen soll. Demnach muss sich die Untersuchung von vornherein auf eine engere Umgrenzung des Functionsbegriffes beschränken, und die Beweise der allgemeinen Lehrsätze lassen sich vereinfachen. Um so mehr aber wünschte ich, denjenigen unter meinen Zuhörern, welche sich dem Studium der Mathematik widmen, als Ergänzung einen Leitfaden zu geben, bei welchem die systematischen Partieen der Analysis mehr zur Geltung kommen.

Solch eine Ergänzung scheint mir auch für einen grösseren Leserkreis nicht überflüssig zu sein, da auch die meisten Lehrbücher der höheren Analysis (das neuerdings erschienene Werk von Hrn. Lipschitz ist hierbei auszunehmen), den Zwecken der Anwendung dienend, nur in unvollständiger Weise auf eine Erörterung der Principien eingehen. Erst in den Schriften, welche eine Einleitung in die Theorie der complexen Functionen geben, lernt der Studirende die Nothwendigkeit principieller Problemstellungen kennen, und was er vielleicht als Resultate der Analysis zu betrachten sich gewöhnt hatte, erscheint hier aufs neue in Frage gezogen. Diese Scheidung ist sachlich nicht zu rechtfertigen und didaktisch durchaus unzweckmässig. Den Anspruch, sie vollständig überwunden zu haben, darf der nachstehende Versuch freilich nicht erheben. Schon in der nothwendigen äusseren Eintheilung der vier Bücher wird eine Trennung ersichtlich, die darin begründet ist, dass in der Theorie der reellen Functionen die Voraussetzungen viel weiter gefasst sind, als in der Theorie der complexen. Doch war ich neben dem rein didaktischen Zwecke von dem Wunsche geleitet, dass meine Arbeit mit dazu beitragen könne, die Grundzüge festzustellen, nach denen eine einheitliche und syste-

matische Darstellung der Differential- und Integralrechnung noch zu erfolgen hat.

In der Auswahl und schliesslichen Begrenzung des Inhaltes sich zu entscheiden, war nicht ganz leicht; es werden die Urtheile darüber auseinander gehen, was zu den „Elementen" der Rechnung gehört. Meine Absicht ist erfüllt, wenn diese Darstellung zur Vorbereitung auf das Studium der Differentialgleichungen, der algebraischen Curven und schliesslich der algebraischen Integrale brauchbar ist. Die Theorie der Integrale würde sich unmittelbar an das letzte Capitel anschliessen lassen; doch durfte ich dieselbe nicht mehr aufnehmen, da mit einer kurzen Skizze wenig gedient ist, eine ausführliche Untersuchung aber den Schwerpunkt meiner Arbeit gänzlich verschoben hätte.

Meinem Freunde und Collegen Dr. Voss möchte ich auch an dieser Stelle meinen Dank aussprechen für die vielfache Förderung, die ich bei meiner Arbeit aus dem Interesse, welches er ihr geschenkt hat, gewonnen habe.

Dresden, im Februar 1881.

Harnack.

Inhaltsverzeichniss.

Erstes Buch. (S. 1—114.)

Die reellen Zahlen und ihre Functionen.

Zweites Buch. (S. 115 — 179.)

Die complexen Zahlen und ihre Functionen.

Drittes Buch. (S. 180—337.)

Die Integrale von Functionen reeller Variabelen.

Erstes Buch.

Die reellen Zahlen und ihre Functionen.

Den Gegenstand der mathematischen Untersuchungen bilden die Begriffe des Raumes und der Zahl. Dem entsprechend lassen sich zwei Hauptdisciplinen unterscheiden: Geometrie und Analysis. Die Bedeutung der Mathematik als Grundlage unserer gesammten Naturerkenntniss ist damit ausgesprochen: denn die räumlichen Vorstellungen enthalten die einfachsten Eigenschaften, die allen Dingen in der uns umgebenden äusseren Welt gemeinsam sind; und das genaue Vergleichen oder Messen der Grössen in der Sinnenwelt führt stets auf Maasszahlen; man bedarf zum Verständniss des Resultates der Lehre von den Zahlen und den Zahlverbindungen.

Die Natur weist in ihren Erscheinungen fortwährende Veränderungen auf; die einfachsten Veränderungen, welche wir äusserlich wahrnehmen, sind Ortsveränderungen, Bewegungen. Mit der Vorstellung der Bewegung ist zugleich die der Stetigkeit, d. h. eines ununterbrochenen Zusammenhanges (räumlich) und einer ununterbrochenen Aufeinanderfolge (zeitlich) nothwendig verbunden. Bewegungserscheinungen in ihrem ganzen Verlaufe beschreiben heisst *jeden* Zustand in Maasszahlen angeben. Soll also die Zahlenreihe auch zur Beschreibung der Bewegung dienlich sein, so muss sie eine stetige oder continuirliche Reihe von Grössen enthalten. Es fällt der Analysis vor allem die Aufgabe zu: den Begriff und die Eigenschaften der continuirlichen Zahlenreihe zu entwickeln.

Erstes Capitel.

Die Lehre von den ganzen und gebrochenen (rationalen) Zahlen.

1. Die natürliche Zahlenreihe, welche bei der Hinzufügung eines Dinges zu anderen durch Zählen entsteht, schreitet immer um eine Einheit vorwärts; jede Zahl ist durch die vorhergehende und durch die Einheit definirt. Diese Reihe von *ganzen* Zahlen lässt sich unbegrenzt von der Einheit ab fortsetzen. Wie nun jede einzelne Zahl eine Summe von wiederholt hinzugefügten Einheiten ist, so kann aus verschiedenen gegebenen Zahlen solch eine Summe von Einheiten zusammen-

gesetzt werden. Diese Rechnungsoperation, nichts anderes als ein fortgesetztes Zuzählen von Einheitsgruppen, heisst addiren; sie umfasst alle anderen Operationen. Es gilt für sie der Fundamentalsatz: die Summe gegebener Zahlen hat immer denselben Werth, in welcher Reihenfolge auch die Summanden einander zugezählt werden. Die Wahrheit dieses Satzes lässt sich nicht aus einfacheren Begriffen folgern; sie wird vielmehr unmittelbar aus der Anschauung einer beliebigen aber endlichen Anzahl von Einheiten, welche die Summe bilden, erkannt. Die Addition ist immer ausführbar, die Summe stets grösser als jeder der Summanden.

Aus der Umkehr der Addition folgt das Problem der Subtraction. Dasselbe verlangt, wenn Summe und ein Summand gegeben sind, den anderen Summanden (Differenz) zu berechnen; d. h. von einer gegebenen Zahl (Minuend) so viele Einheiten abzuzählen, als die andere Zahl (Subtrahend) enthält. Dies ist nur dann ausführbar, wenn der Minuend grösser ist als der Subtrahend. Im Falle dass beide einander gleich sind (gleichviel Einheiten enthalten), bezeichnen wir das Resultat mit 0. Der Zahlbegriff 0 ist also definirt durch die Gleichung $a - a = 0$. Für die Rechnung mit 0 erhält man hieraus die Gleichungen: $a + 0 = a$, $a - 0 = a$.

2. Eine Summe bilden, bei der die einzelnen Summanden gleich derselben Zahl a sind, und die Anzahl der Summanden gleich b, heisst die Zahl a mit b multipliciren. Das Resultat wird ein Vielfaches von a genannt. Man kann aber a und b ohne Unterscheidung als Factoren, das Resultat schlechtweg als Product bezeichnen, weil für die Multiplication von zweien sowohl als mehreren Zahlen der aus dem Begriff der Summation zu beweisende Fundamentalsatz gilt: Das Product gegebener Zahlen hat immer denselben Werth, wie auch die Factoren vertauscht oder in Gruppen zusammengefasst werden*). Die Multiplication ist immer ausführbar.

Aus der Umkehr der Multiplication folgt das Problem der Division. Dasselbe verlangt, wenn das Product und ein Factor gegeben ist, den anderen Factor zu berechnen; d. h. diejenige Zahl (Quotient) zu finden, welche mit der einen gegebenen Zahl (Divisor) multiplicirt ein Product gleich der anderen Zahl (Dividend) liefert. Diese Forderung ist unausführbar, wenn der Dividend nicht ein Vielfaches vom Divisor ist. Ist a der Divisor, b der Dividend, so besteht, wenn $a \leqq b$, immer eine Gleichung der Form:

$$b = a \cdot q + r,$$

wobei r (der Rest) eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2 \cdots a - 1$ sein muss.

*) Die Beweise der Lehrsätze für rationale Zahlen sollen hier nicht ausgeführt werden: sie finden sich in Baltzer, Die Elemente der Mathematik Bd. I.

Zwei Zahlen können Vielfache einer dritten Zahl sein; dieselbe ist alsdann gemeinsamer Theiler beider. Zwei Zahlen, welche keinen gemeinsamen Theiler (ausser der Einheit) besitzen, heissen relativ prim. Absolut prim wird eine Zahl genannt, welche durch keine andere (mit Ausnahme der Einheit) theilbar ist. Diese Unterscheidung von theilbaren und primen Zahlen liefert den wichtigen Lehrsatz: Jede Zahl kann nur auf eine einzige Weise als Product von absoluten Primzahlen dargestellt werden; während die Untersuchung über die Theilbarkeit einer Zahl auf der schon von Euklid angewandten Regel basirt: Der grösste gemeinsame Theiler zweier Zahlen a und b (wobei $b > a$) wird ermittelt, indem man durch fortgesetzte Division die Gleichungen bildet:

$$b = aq + r, \quad a = rq_1 + r_1, \quad r = r_1 q_2 + r_2 \text{ u. s. w.}$$

Der Divisor der letzten Division, welche keinen Rest mehr liefert, ist der grösste gemeinsame Theiler von a und b.

3. Die drei ersten Rechnungsoperationen an Summen und Differenzen ausgeführt, ergeben folgende Gleichungen:

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} (a+b)+(c+d) = a+b+c+d \\ (a+b)-(c+d) = a+b-c-d \end{cases} \quad \begin{cases} (a+b)+(c-d) = a+b+c-d \\ (a+b)-(c-d) = a+b-c+d \end{cases} \quad \begin{cases} (a-b)+(c-d) = a-b+c-d \\ (a-b)-(c-d) = a-b-c+d \end{cases}$$

$$\text{(II.)} \quad (a+b)c = ac+bc, \quad (a-b)\,c = ac-bc$$

$$\text{(III.)} \quad \begin{aligned} (a+b)\,(c+d) &= ac+bc+ad+bd \\ (a+b)\,(c-d) &= ac+bc-ad-bd \\ (a-b)\,(c-d) &= ac-bc-ad+bd. \end{aligned}$$

Bei diesen Gleichungen ist vorausgesetzt, dass die auf den linken Seiten stehenden Differenzen ausführbar sind; dabei kann auch die Zahl 0 auftreten. Ein Product, welches den Factor 0 enthält, wird also, wie die Gleichungen (II) und (III) lehren, selbst gleich 0. Umgekehrt folgt aus den nämlichen Gleichungen, dass ein Product niemals gleich 0 sein kann, wenn nicht ein Factor den Werth 0 hat.

Die Gleichartigkeit der Resultate bei den Rechnungen mit Summen und Differenzen lässt es zweckmässig erscheinen, die Differenz von vornherein als eine Summe aufzufassen, und zwar die Differenz $a - b$ als eine Summe von a vorhandenen resp. zuzuzählenden und b wegzunehmenden Einheiten, oder in besserer Bezeichnung von a positiven und b negativen Einheiten. Die Einführung der negativen Einheit gestattet auch mit solchen Differenzen zu rechnen, bei denen

der Minuend kleiner als der Subtrahend ist. Es stellt alsdann (wenn $a < b$) die Zahl $a - b$ einen Ueberschuss von negativen Einheiten dar, und zwar von so vielen, dass $(b - a) + (a - b) = 0$.

In der Natur existiren für sich betrachtet weder positive noch negative Zahlen; es existiren nur zählbare Dinge. Die Unterscheidung von positiven oder negativen Zahlen — Bezeichnungen, die nur im Gegensatze zu einander verstanden werden können — hat auch nur für die Operation des Addirens und damit für alle anderen Rechnungsoperationen eine Bedeutung. Bei Anwendung der Rechnung auf physische Probleme ist es aber häufig sehr zweckmässig, Grössen, mit denen gerechnet wird, im Sinne der positiven und negativen Einheit zu unterscheiden.

Mit Hülfe der negativen Einheit ist jede Subtraction ausführbar, weil nun ausser der Reihe der positiven Zahlen eine unbegrenzte Reihe von negativen eingeführt ist; zwischen beiden bildet die Null die Scheide. Die übrigen Operationen mit negativen Zahlen sind, da wir fordern, dass sich dieselben den Regeln für Differenzen überhaupt einordnen sollen, durch die Gleichungen (I) (II) (III) gegeben. Insbesondere folgt, dass das Product von zwei negativen Zahlen das positive Vorzeichen erhält. Durch die Umkehr der Multiplication sind auch die Zeichenregeln für die Division mit positiven und negativen Zahlen bestimmt.

4. Damit die Operation des Dividirens in allen Fällen ausführbar werde, muss die positive oder negative Einheit in Untereinheiten zerlegt werden; es genügt den Zahlbegriff $+\frac{1}{b}$ einzuführen, bei welchem b jede ganze Zahl sein kann. Denn soll das Zeichen $\frac{1}{b}$ diejenige Zahl bedeuten, welche mit b multiplicirt 1 giebt, so wird das $a$fache dieser Zahl den Werth von $\frac{a}{b}$ darstellen. Wiederum gilt die Bemerkung, dass in der Natur keine gebrochene Zahl existirt, dass vielmehr auch dieser Begriff nur in Bezug auf Zahlverbindungen einen Sinn hat.

Jeder Bruch kann durch einen anderen ersetzt werden, dessen Nenner ein Vielfaches vom ursprünglichen Nenner ist:

$$\frac{b}{a} = \frac{b a_1}{a a_1}.$$

Mit Hülfe dieser Umformung leitet man die Regel ab:

$$\frac{b}{a} \pm \frac{b_1}{a_1} = \frac{b a_1 \pm b_1 a}{a a_1}.$$

Ferner folgt aus dem Begriff der Multiplication:

$$\frac{b}{a} c = \frac{bc}{a}.$$

Unter der Multiplication eines Bruches $\frac{b}{a}$ mit einem anderen $\frac{b_1}{a_1}$

versteht man in Analogie mit dieser letzten Gleichung die Theilung des Bruches durch a_1 und die Multiplication dieses Theiles mit b_1; daraus folgt:

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{b_1}{a_1} = \frac{b b_1}{a a_1}.$$

Bei dieser Definition bleibt der Fundamentalsatz der Multiplication bestehen. Durch Umkehr erhält man die Gleichung der Division:

$$\frac{b}{a} : \frac{b_1}{a_1} = \frac{b a_1}{a b_1}.$$

Demnach lassen sich nun auch die Gleichungen für die Summen und Differenzen vervollständigen:

$$\text{(IV)} \quad \frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}, \quad \frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c \pm d} \pm \frac{b}{c \pm d}.$$

Diese Gleichungen erleiden aber eine sehr zu beachtende Ausnahme: die im Nenner stehende Differenz darf nicht Null sein; eine Division ist unmöglich, wenn der Divisor gleich Null ist. Denn ist der Dividend von Null verschieden, so existirt keine Zahl, welche mit Null multiplicirt, ein Product gleich jenem liefert, weil ein Product, dessen einer Factor Null ist, verschwindet; ist aber der Dividend ebenfalls gleich Null, so ist der Werth des Quotienten völlig unbestimmt; mit solch einer ganz unbestimmten Zahl kann nie gerechnet werden.

Den Begriff der ganzen und gebrochenen Zahlen fasst man unter dem Ausdrucke: rationale Zahlen zusammen. Durch Anwendung der vier Species auf dieselben erhält man immer wieder rationale Zahlen. Ihre Reihe ist unbegrenzt: zwischen zwei Zahlen lassen sich, wie eine fortgesetzte Theilung zeigt, noch beliebig viele rationale einschalten, oder mit anderen Worten ausgedrückt: es bildet eine Reihe von rationalen Zahlen, welche durch eine beliebig oft wiederholte aber endliche Anzahl von Theilungen gewonnen ist, niemals ein Continuum.

Zweites Capitel.

Die Lehre von den irrationalen Zahlen, insbesondere von den Wurzelgrössen.

5. Aus der wiederholten Multiplication stellt man eine fünfte Operation, das Potenziren, her. $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ bedeutet ein Product, welches aus n (Exponent) Factoren besteht, von denen jeder gleich $\frac{a}{b}$ (Basis) ist. Eine positive Basis bringt nur positive Werthe der Potenz hervor, eine negative liefert positive oder negative, je nachdem der Exponent eine gerade oder ungerade Zahl ist. Das Potenziren ist innerhalb der Gesammtheit der rationalen Zahlen immer ausführbar.

Aus einer Umkehr des Potenzirens geht die Aufgabe der Wurzelbestimmung; das **Radiciren**, hervor. Es sei gegeben die positive Zahl $\frac{a}{b}$, wobei a und b relativ prim zu einander sind; man sucht eine positive Zahl x, welche die Eigenschaft hat, dass für ein gegebenes n $x^n = \frac{a}{b}$ ist. Positiv wollen wir zunächst die Zahl $\frac{a}{b}$ voraussetzen, weil, wenn sie negativ wäre, bei geradem Exponenten die Wurzelbestimmung mit unserem bisherigen Zahlbegriffe überhaupt nicht ausgeführt werden kann, während bei ungeradem Exponenten die $n$te Wurzel aus dem positiven Werthe von $\frac{a}{b}$ nur mit dem negativen Vorzeichen zu nehmen ist. Desgleichen ist von vornherein zu bemerken, dass bei positivem Radicand und geradem Exponenten der Wurzel das positive wie das negative Zeichen gegeben werden kann. Sonach haben die nachfolgenden Betrachtungen blos die Werthbestimmung selbst darzuthun.

Wenn ein Bruch $x = \frac{p}{q}$ mit der Eigenschaft existirt, dass $\frac{p^n}{q^n} = \frac{a}{b}$, oder $bp^n = aq^n$, so muss, da a und b stets als relativ prim vorausgesetzt werden dürfen, zufolge des Satzes über die eindeutige Zusammensetzung jeder Zahl aus Primzahlen, die Gleichung zerlegt werden in:

$$a = p^n, \quad b = q^n.$$

Ein positiver Bruch ist also nur dann gleich der $n$ten Potenz eines positiven Bruches, wenn sowohl sein Zähler wie sein Nenner gleich der $n$ten Potenz einer ganzen Zahl ist; insbesondere kann eine ganze Zahl nie gleich der $n$ten Potenz eines Bruches sein; denn ist $b = 1$, so muss auch $q = 1$ sein. Die Entscheidung ob $\frac{a}{b}$ gleich der $n$ten Potenz einer rationalen Zahl ist, wird demnach so zu fällen sein, dass man die Reihe der $n$ten Potenzen der ganzen Zahlen bildet und entscheidet, ob a und b in derselben enthalten sind.

Hieraus wird ersichtlich, dass die Wurzelausziehung aus positiven rationalen Zahlen mit Hülfe der rationalen Zahlen allein nicht ohne Ausnahme ausführbar ist; sie führt vielmehr, ähnlich wie die Probleme der Subtraction und Division, einen neuen Begriff in die Zahlenlehre ein. Seine Darstellung geschieht, nach **Euklid**'s Methode der Einschliessung in Grenzen, auf folgende Weise:

Ist σ eine beliebige rationale Zahl, so giebt es in der unbegrenzt fortsetzbaren Reihe von Brüchen

$$0, \frac{1}{\sigma}, \frac{2}{\sigma}, \frac{3}{\sigma} \cdots \frac{n}{\sigma} \cdots \qquad (n > \sigma)$$

sicher zwei auf einander folgende $\alpha = \frac{\varrho}{\sigma}$ und $\beta = \frac{\varrho + 1}{\sigma}$, so dass:

$$\alpha^n < \frac{a}{b} < \beta^n.$$

Die Differenz $\beta - \alpha$ ist gleich $\frac{1}{\sigma}\cdot$ Ist nun σ' eine andere Zahl grösser als σ, so werden sich zwischen die Brüche α und β Brüche mit dem grösseren Nenner σ' einschalten lassen, was durch die Aufeinanderfolge:

$$\frac{\varrho}{\sigma}, \ \frac{\lambda}{\sigma'}, \ \frac{\lambda+1}{\sigma'} \dots \frac{\mu}{\sigma'}, \ \frac{\varrho+1}{\sigma}$$

angedeutet sei. Es muss in dieser Reihe zwei aufeinanderfolgende Werthe α_1 und β_1 geben, so dass:

$$\alpha_1{}^n < \frac{a}{b} < \beta_1{}^n,$$

wobei dann $\alpha_1 > \alpha$ (höchstens gleich α, falls gerade das erste Intervall den gesuchten Werth einschliessen sollte) und $\beta_1 < \beta$ (höchstens gleich β, falls das letzte Intervall genommen werden müsste). Immer ist die Differenz $\beta_1 - \alpha_1$ kleiner als $\frac{1}{\sigma}\cdot$ Denn die Differenz zwischen dem ersten und letzten Werthe der Reihe ist $\frac{1}{\sigma}$; die Zwischenglieder haben also untereinander kleinere Unterschiede.

Indem man dieses Verfahren mit einem neuen Nenner $\sigma'' > \sigma'$ fortsetzt, bekommt man zwei neue Brüche α_2 und β_2, deren Differenz kleiner wird als $\frac{1}{\sigma'}$, und so fort. Dabei wird sich entweder schliesslich eine Zahl ergeben, welche die Eigenschaft hat, dass ihre $n$te Potenz gleich $\frac{a}{b}$ ist; dann ist $\frac{a}{b}$ so beschaffen, dass es eine rationale $n$te Wurzel besitzt, und zwar eine solche, die sich gerade durch einen der Nenner $\sigma, \sigma' \dots$ darstellen lässt, oder es setzen sich die beiden Reihen unbegrenzt fort, die der unteren Grenzen:

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_\mu \dots < \alpha_{\mu+\nu} \dots$$

und die der oberen Grenzen:

$$\beta > \beta_1 > \beta_2 \dots > \beta_\mu \dots > \beta_{\mu+\nu} \dots.$$

Die beiden Reihen besitzen folgende Eigenschaften: Wiewohl die Reihe der α unbegrenzt fortsetzbar nur wachsende Zahlen enthält, die der β nur abnehmende (dass dazwischen auch das Gleichheitszeichen auftreten kann, stört die Betrachtung nicht), so ist doch jedes α kleiner als jedes β. Ferner können die stets positiven Differenzen $\beta_{\mu+\nu} - \alpha_{\mu+\nu}$, $\alpha_{\mu+\nu} - \alpha_\mu$, $\beta_\mu - \beta_{\mu+\nu}$ für jeden Werth von ν kleiner gemacht werden, als jeder beliebig gegebene noch so kleine Werth, dadurch dass man nur die Glieder in der Reihe aufsucht, für welche μ einen entsprechend grossen Werth hat. Wenn nämlich diese Diffe-

renzen kleiner sein sollen als δ, so hat man die Stellen α_μ und β_μ zu bestimmen, für welche bereits

$$\beta_\mu - \alpha_\mu < \delta.$$

Dann wird auch zufolge der angegebenen Ungleichungen für jedes ν:

$$\beta_{\mu+\nu} - \alpha_{\mu+\nu} < \delta, \quad \alpha_{\mu+\nu} - \alpha_\mu < \delta, \quad \beta_\mu - \beta_{\mu+\nu} < \delta.$$

Die Zahlen der unbegrenzten Reihe der α, und ebenso die der Reihe β haben die Eigenschaft, dass ihre $n$ten Potenzen dem Werthe $\frac{a}{b}$ immer näher kommen, so dass sie sich schliesslich beliebig wenig von ihm unterscheiden. Hieraus ersieht man, dass auch die Zahlen α und β selber sich einer bestimmten Grösse mehr und mehr nähern, welche, auch wenn sie unter den rationalen Zahlen nicht vorhanden ist, doch ein Zahlenwerth genannt wird, weil sie durch eine ganz bestimmte Rechnungsoperation mit einer rationalen Zahl verknüpft ist. Man bezeichnet die Grösse als den Grenzwerth der Reihen α und β; sie wird in der Form $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ geschrieben.

Ist die Grösse eine rationale Zahl, so ist diese Darstellung als Grenzwerth lediglich durch die Wahl der Nenner $\sigma, \sigma', \sigma'' \cdots$ bedingt; hierher gehören alle periodischen Decimalbrüche. $\frac{1}{3}$ ist z. B. der Grenzwerth von:

$$0{,}3; \quad 0{,}33; \quad 0{,}333; \quad 0{,}3333 \quad \text{u. s. w.};$$

ebenso ist nach der geometrischen Progression 2 der Grenzwerth von:

$$1; \quad 1 + \frac{1}{2}; \quad 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2; \quad 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdots.$$

Durch geeignete Wahl des Nenners kann also für solche Werthe auch eine rationale Form ausfindig gemacht werden. Ist aber der Werth keine rationale Zahl, was sich bei einer Wurzelbestimmung nach dem gleich anfangs ausgesprochenen Satze von vornherein entscheiden lässt, so ist solch eine Darstellung als Grenzwerth einer Reihe die einzig mögliche, die sich überhaupt für die Zahl, welche eine irrationale heisst, geben lässt. Diese Darstellung und Definition umfasst also ausser den rationalen eine neue Classe, nämlich die irrationalen Wurzelgrössen; sie umfasst aber, wie später gezeigt werden soll, noch mehr als die Wurzelgrössen aus Brüchen. Zugleich macht dieses Verfahren der Bestimmung einer Wurzel darauf aufmerksam, was eigentlich unter der Berechnung einer Zahl, welche eine gegebene Eigenschaft erfüllen soll, nunmehr zu verstehen ist. Es kann im allgemeinen nicht verlangt werden, dass diese Zahl in endlicher geschlossener Form angegeben wird, vielmehr erkennt man: *Eine Zahl, welche eine bestimmte Eigenschaft in Bezug auf andere gegebene Zahlen*

besitzt, berechnen, heisst eine unbegrenzt fortsetzbare Reihe von rationalen Zahlen finden, welche die Eigenschaft der gesuchten Zahl mit immer grösserer Annäherung erfüllen.

Nun entsteht die Frage, wie man fortan mit solchen Zahlen zu rechnen hat, wie irrationale Zahlen addirt, multiplicirt u. s. w. werden. Das sollen die folgenden Untersuchungen lehren, denen wir die zuletzt gewonnene Erkenntniss noch etwas verallgemeinert zu Grunde legen.

6. Definition: *Unter dem allgemeinen Zahlbegriffe ist eine nach irgend welcher Vorschrift unbegrenzt fortsetzbare Reihe (oder Folge) von positiven oder negativen rationalen Zahlen:*

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_\mu,\ \ldots\ \alpha_{\mu+\nu}\ \ldots$$

zu verstehen, welche die Eigenschaften hat, dass erstens die einzelnen Zahlen derselben ihrem absoluten Betrage nach (d. h. abgesehen vom Vorzeichen) einen bestimmten Werth nicht überschreiten, und dass zweitens zu jeder beliebig kleinen vorgegebenen Zahl δ eine Zahl α_μ innerhalb der Reihe gefunden werden kann, so dass die Differenz aller folgenden Zahlen $\alpha_{\mu+\nu} - \alpha_\mu$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als δ wird. Von solch einer Reihe sagen wir, sie besitzt einen Grenzwerth.

Die Eigenschaft, dass von einer Stelle ab die Glieder nur wachsen oder nur abnehmen, (wie das vorhin bei den Reihen α und β der Fall war), nehmen wir in die Definition nicht auf. Aber es ist wichtig zu bemerken, dass für solche Reihen der Satz gilt:

Wenn in der Reihe

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_\mu,\ \ldots\ \alpha_{\mu+\nu},\ \ldots$$

die Glieder nur wachsen (oder nur abnehmen), und eine obere Grenze sich angeben lässt, welche von den Gliedern nicht überschritten wird), (resp. eine untere Grenze, unter welche sie nicht herabsinken), so besitzt solch eine Reihe immer einen Grenzwerth, d. h. die in der Definition ausgesprochenen beiden Eigenschaften sind vorhanden.

Denn würden die Differenzen $\alpha_{\mu+1} - \alpha_\mu$, $\alpha_{\mu+2} - \alpha_\mu \ldots$ nicht kleiner gemacht werden können als eine beliebig kleine Zahl δ, sondern stets grösser sein als eine angebbare Zahl d, so wäre

$$\alpha_{\mu+\nu} - \alpha_\mu \geqq \nu d \quad \text{oder} \quad \alpha_{\mu+\nu} \geqq \alpha_\mu + \nu d;$$

durch Vergrösserung von ν würde also $\alpha_{\mu+\nu}$ über jede Grenze hinaus wachsen.

Von einer Reihe, deren Glieder numerisch unter jeden angebbaren Werth sinken, sagt man, sie hat den Grenzwerth Null; damit ist auch die Null, was von Wichtigkeit ist, in diesen allgemeinen Zahlbegriff aufgenommen.

Eine Reihe, welche nicht den Grenzwerth Null hat, besitzt, wenn sie die ausgesprochenen beiden Eigenschaften erfüllen soll, von einer

bestimmten Stelle ab entweder nur positive oder nur negative Glieder. Denn haben α_μ und $\alpha_{\mu+\nu}$ verschiedene Zeichen, so ist die Differenz $\alpha_{\mu+\nu} - \alpha_\mu$ ihrem absoluten Betrage nach nicht kleiner als die grössere der beiden Zahlen, sie wird also kleiner als δ nur dann werden können, wenn die Reihe der α die Null zur Grenze hat.

7. Man rechnet mit den so definirten Zahlen, indem man auf die Glieder der sie darstellenden Reihen die Rechnungsoperationen anwendet, weil nämlich der Grenzwerth stets durch ein Reihenglied mit beliebiger Annäherung ersetzt werden kann, und somit die vorhin aufgestellte Forderung der Berechnung erfüllt wird. Es seien gegeben die Reihen:

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_\mu,\ \ldots \quad \text{und} \quad \beta,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_\mu\ \ldots;$$

jede dieser Reihen repräsentirt eine Zahl, was man symbolisch ausdrücken kann:

$$\mathsf{A} = \mathrm{Lim}(\alpha_\mu), \quad \mathsf{B} = \mathrm{Lim}(\beta_\mu).$$

Nach Anwendung der Addition folgt, dass

$$\alpha \pm \beta,\ \alpha_1 \pm \beta_1,\ \alpha_2 \pm \beta_2,\ \cdots\ \alpha_\mu \pm \beta_\mu\ \cdots$$

eine neue Reihe bilden wird, welche die zur Darstellung einer Zahl nothwendigen beiden Eigenschaften erfüllt. Denn wenn abs $[\alpha_{\mu+\nu} - \alpha_\mu] < \delta$ und abs $[\beta_{\mu+\nu} - \beta_\mu] < \delta$, so ist der absolute Betrag der Differenz zweier Glieder der neuen Reihe kleiner als 2δ, denn die Beträge von $\alpha_{\mu+\nu}$ und $\beta_{\mu+\nu}$ sind höchstens um die Grösse δ im Vergleich zu α_μ und β_μ gewachsen oder vermindert. Der Grenzwerth dieser neuen Reihe unterscheidet sich aber von der Summe (oder der Differenz) der gegebenen beiden Grenzwerthe um weniger als eine beliebig kleine vorgegebene Zahl, weil die Grössen α_μ und β_μ von diesen Grenzwerthen beliebig wenig abweichen; d. h. der Grenzwerth der neuen Reihe ist gleich der Summe (Differenz) der gegebenen Zahlen A und B.

Wir fassen diesen Gedanken in Formel durch die Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{Lim}(\alpha_\mu) \pm \mathrm{Lim}(\beta_\mu) = \mathrm{Lim}(\alpha_\mu \pm \beta_\mu).$$

Es ergiebt sich hier bei der Subtraction der Specialsatz: Zwei Zahlenreihen, welche denselben Grenzwerth darstellen, liefern bei ihrer Subtraction eine Zahlenreihe, deren Grenze Null ist; und umgekehrt: Zwei Zahlenreihen, deren Differenz den Grenzwerth Null besitzt, stellen denselben Werth dar. Dies ist als die Definition für die Gleichheit zweier Zahlen zu betrachten. Die ursprüngliche Definition: Zwei rationale Zahlen sind einander gleich, wenn sie dieselbe Anzahl von Einheiten (oder Bruchtheilen der Einheit) enthalten, ist dieser für die allgemeine Zahl geltenden Definition untergeordnet.

Desgleichen folgt nach Anwendung der Multiplication, dass

$$\alpha\beta,\ \alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2,\ \ldots\ \alpha_\mu\beta_\mu\ \ldots$$

eine neue Reihe bildet, welche die verlangten Eigenschaften ebenfalls erfüllt. Denn das Product,

$$\alpha_{\mu+\nu} \cdot \beta_{\mu+\nu}$$

ist, wenn die Beträge von α_μ und β_μ höchstens um δ vermehrt oder vermindert sind, auch nur höchstens um den Betrag $\alpha_\mu \delta + \beta_\mu \delta + \delta^2$ geändert, und dieser Werth wird, da für α und β eine obere Grenze, welche sie nie überschreiten, vorhanden, δ aber beliebig klein ist, selbst durch Wahl von μ beliebig verkleinert. Also ist

$$\text{(II)} \qquad \text{Lim}\,(\alpha_\mu) \cdot \text{Lim}\,(\beta_\mu) = \text{Lim}\,(\alpha_\mu \cdot \beta_\mu).$$

Durch Division erhält man die neue Reihe:

$$\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} \dots \frac{\alpha_\mu}{\beta_\mu} \dots$$

Schliesst man den Fall aus, dass der Grenzwerth der Divisorreihe gleich Null ist, dass also die β unter jeden angebbaren Werth heruntergehen, so besitzen diese Quotienten einen oberen Werth, den sie sicher nicht übersteigen; und wenn die Beträge von α_μ und β_μ um δ geändert sind, so ist die Differenz:

$$\text{abs}\left[\frac{\alpha_\mu \pm \delta}{\beta_\mu \pm \delta} - \frac{\alpha_\mu}{\beta_\mu}\right] = \text{abs}\left[\frac{\delta\,(\beta_\mu \pm \alpha_\mu)}{\beta_\mu\,(\beta_\mu \pm \delta)}\right],$$

eine Zahl, welche ihrem Betrage nach beliebig klein ist. Es ist also

$$\text{(III)} \qquad \frac{\text{Lim}\,(\alpha_\mu)}{\text{Lim}\,(\beta_\mu)} = \text{Lim}\left(\frac{\alpha_\mu}{\beta_\mu}\right).$$

Desgleichen ergiebt sich für das Potenziren mit positiv ganzem Exponenten aus der Gleichung (II)

$$\text{(IV)} \qquad [\text{Lim}\,(\alpha_\mu)]^n = \text{Lim}\,(\alpha_\mu^n)$$

und daraus für die Wurzelausziehung aus einer positiven Zahl, aus einer Zahl also, bei welcher die definirende Reihe von einer Stelle ab nur positive Glieder enthält:

$$\text{(V)} \qquad \sqrt[n]{\text{Lim}\,(\alpha_\mu)} = \text{Lim}\,(\sqrt[n]{\alpha_\mu}).$$

Diese beiden letzten Gleichungen sagen wiederum nichts anderes aus, als dass eine rationale oder irrationale Zahl mit beliebiger Annäherung potenzirt oder radicirt wird, indem man diese Operationen auf eine dem Werthe beliebig nahe kommende Zahl der definirenden Reihe ausführt.

Es ist zweckmässig nach dem Vorgange von Newton Potenzen mit ganzzahligen negativen Exponenten einzuführen auf Grund der Gleichung, mag $m \gtrless n$ sein:

$$\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n} = \frac{1}{A^{n-m}};$$

(insbesondere bedeutet dann A^0 für jedes A den Werth 1), sowie Potenzen mit gebrochenem Exponenten auf Grund der Gleichung, die für ganze Exponenten besteht:

$$(A^n)^m = A^{nm}.$$

Da nämlich $\sqrt[n]{A}$ die Zahl ist, welche auf die $n$te Potenz erhoben A giebt, so lässt sich mit Benutzung dieser Regel $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}$ setzen; es ist $\left(A^{\frac{1}{n}}\right)^n = A^{\frac{n}{n}} = A^1$, $A^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}$. Diese Definition mit gebrochenem Exponenten ist aber zunächst, damit die Rechnung allgemein ausführbar bleibt, auf eine positive Basis beschränkt.

Der Definition einer Potenz mit irrationalem Exponenten stelle ich folgende an sich wichtige Ueberlegung voraus:

Jede Zahl, welche durch eine Reihe von irrationalen Zahlen dargestellt ist, kann auch durch eine Reihe von rationalen Zahlen ausgedrückt werden. Denn ist

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_\mu, \ldots A_{\mu+\nu}, \ldots$$

die Reihe von irrationalen Grössen mit den nothwendigen Eigenschaften, die Grössen A mögen durch irgend welche Rechnungsoperation z. B. als Wurzeln definirt sein, so denke man sich zwei Reihen von rationalen Zahlen gebildet

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_\mu, \ldots \beta_{\mu+\nu}, \ldots,$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\mu, \ldots \alpha_{\mu+\nu}, \ldots,$$

von denen die Reihe der β willkürlich, doch so gewählt sei, dass sie den Grenzwerth Null hat, während jede Zahl α_μ so angenommen werde, dass abs. $[A_\mu - \alpha_\mu] < \beta_\mu$. Alsdann repräsentirt die Reihe α denselben Grenzwerth wie die erste Reihe. Ueberhaupt ist hiermit ein Verfahren angegeben, um aus einer Reihe irgend eine andere mit dem nämlichen Grenzwerthe zu bilden.

Dem bisherigen gemäss ist unter der Potenz mit beliebigem irrationalem Exponenten E, der durch die Reihe

$$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu \ldots$$

definirt ist, der Grenzwerth der Reihe

$$A^\varepsilon, A^{\varepsilon_1}, A^{\varepsilon_2}, \ldots A^{\varepsilon_\mu} \ldots$$

zu verstehen, deren Glieder die verlangten beiden Eigenschaften erfüllen.

Denn es ist

$$A^{\varepsilon_{\mu+\nu}} - A^{\varepsilon_\mu} = A^{\varepsilon_\mu}(A^\delta - 1).$$

Dass der absolute Betrag dieser Grösse beliebig klein gemacht werden kann, erhellt aus der Eigenschaft, dass $A^0 = 1$ wird, und lässt sich

folgendermassen in Evidenz setzen. Denkt man sich unter δ einen positiven rationalen Bruch, dessen Zähler 1, dessen Nenner eine beliebig grosse pòsitive Zahl M ist, so wird, wenn $A > 1$,

$$A^\delta - 1 = \eta, \quad A = (1 + \eta)^M.$$

Die M-malige Multiplication von $1 + \eta$ liefert eine Zahl die sicher grösser ist als $1 + M\eta$; also ist

$$A > 1 + M\eta, \quad \eta < \frac{A - 1}{M}.$$

Wenn $A < 1$, so setze man

$$1 - A^\delta = \eta, \quad A^{-\delta} = \frac{1}{1 - \eta} = 1 + \varepsilon;$$

es wird

$$A = \frac{1}{(1 + \varepsilon)^M} < \frac{1}{1 + M\varepsilon}, \text{ also } \varepsilon < \frac{\frac{1}{M} - 1}{M}.$$

Beachtet man nun, dass nach dem eben gelehrten Verfahren die Reihe

$$A^{\varepsilon_1}, A^{\varepsilon_2}, \dots A^{\varepsilon_\mu}, \dots$$

auch ersetzt werden kann durch die Reihe

$$\alpha_1^{\varepsilon_1}, \alpha_2^{\varepsilon_2}, \dots \alpha_\mu^{\varepsilon_\mu},$$

wenn $\text{Lim}\,(\alpha_\mu) = A$ ist, so kann das Ergebniss dieser Untersuchung in der Form geschrieben werden:

$$\text{(VI)} \qquad [\text{Lim}\,\alpha_\mu]^{\text{Lim}(\varepsilon_\mu)} = \text{Lim}\,(\alpha_\mu^{\varepsilon_\mu}).$$

8. Die Umkehr des Potenzirens liefert noch ein anderes Problem: das Logarithmiren. Gegeben sind zwei positive Zahlen A und B, jede definirt als Grenzwerth einer Reihe; es soll eine Zahl x bestimmt werden, welche die Eigenschaft hat, dass $B^x = A$. Alsdann nennt man x den Logarithmus (Exponent) der Zahl A (Numerus) in Bezug auf die Basis B, und schreibt:

$$x = {}^B\!\log A.$$

Es lässt sich zeigen, dass erstens nur eine Zahl x mit dieser Eigenschaft existirt — denn es kann nicht gleichzeitig ($B \gtrless 1$)

$$B^x = A = B^{x'} \quad \text{also} \quad \frac{B^x}{B^{x'}} = B^{x-x'} = 1$$

sein, ohne dass $x - x' = 0$, — und dass zweitens diese Zahl x als Grenzwerth einer Reihe dargestellt werden kann.

Bilden wir nämlich die Folge ($B > 1$ gedacht)

$$\dots B^{-2}, B^{-1}, 1, B^1, B^2, \dots$$

so wird es in derselben zwei Werthe geben so, dass

$$B^\lambda < A < B^{\lambda+1}.$$

Schalten wir zwischen λ und $\lambda + 1$ rationale Brüche ein, so wird:

$$B^{\lambda + \frac{\lambda'}{\sigma}} < A < B^{\lambda + \frac{\lambda' + 1}{\sigma}}.$$

Indem man die Werthe des Nenners vergrössert, erhält man zwei Reihen, durch welche x definirt wird.

Der Logarithmus von 1 in Bezug auf jede positive Zahl als Basis ist Null. Die Regeln für die Rechnung mit Logarithmen werden im folgenden als bekannt vorausgesetzt.

Den Inbegriff aller positiven und negativen rationalen und irrationalen Zahlen fasst man unter dem Namen reelle Zahlen zusammen. Durch beliebig wiederholte Anwendung der ersten Rechnungsoperationen auf reelle Zahlen erhält man wieder eben solche Zahlen. Aber eine wesentliche Ausnahme musste für die beiden letzten Operationen gemacht werden. Da negative Zahlen mit geradem Exponenten positive Werthe liefern, so konnte umgekehrt eine negative Zahl mit gebrochenem Exponenten, dessen Nenner eine gerade Zahl ist, oder mit irrationalem Exponenten, weil in der definirenden Reihe solche Brüche auftreten können, zunächst nicht angegeben werden. Desgleichen haben wir uns bei der Definition des Logarithmus, um nicht weitere Ausnahmefälle unterscheiden zu müssen, auf positive Werthe der Basis und des Numerus beschränkt. Es bleibt hier also noch eine Lücke, die erst durch Einführung der complexen Zahlen, dann aber vollständig, aufgehoben wird.

Auch sind im vorstehenden noch keineswegs die zweckmässigsten Methoden zur wirklichen Berechnung einer beliebigen Potenz oder des Logarithmus gegeben; nur die Möglichkeit und Bestimmtheit derselben ist dargethan*).

Drittes Capitel.

Der Begriff einer veränderlichen Grösse und die Rechnung mit veränderlichen, insbesondere unendlichen Grössen.

9. Die Gesammtheit der rationalen und irrationalen Zahlen bildet die continuirliche Zahlenreihe. Um die fertige Vorstellung eines Continuums zu gewinnen, brauchen wir nothwendig ein anschauliches Bild. Es ist nichts fremdartiges, wenn wir uns an die einfachste räumliche Vorstellung eines Continuums, an die gerade Linie, halten.

---

*) Der Begriff der irrationalen Zahl ist ausführlich behandelt in dem „Lehrbuch der Analysis“ Bd. I von Lipschitz. Ueber den allgemeinen Zahlbegriff siehe: Cantor, Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Annalen Bd. V, und Heine, Die Elemente der Functionenlehre, Journal f. Mathematik Bd. 74.

Die Punkte einer Geraden werden dadurch bestimmt, dass man unter Zugrundelegung einer Maasseinheit ihre Entfernungen von einem festen Punkte Null mit dem + oder — Zeichen angiebt, je nachdem der betreffende Punkt sich rechts oder links von dem Nullpunkte befindet. Die Entfernung jedes Punktes kann durch eine rationale oder irrationale Zahl ausgedrückt werden. Denn das charakteristische eines Punktes ist eben, dass er eine bestimmte Strecke vom Nullpunkte an begrenzt; die Länge dieser Strecke nach der angenommenen Maasseinheit gemessen ist eine Zahl, welche sich entweder in endlicher Form oder, wie in Euklid's Elementen gelehrt wird, mit beliebiger Annäherung durch fortgesetzte Theilung des Maassstabes ausdrücken lässt; wir erhalten begrifflich eine die Streckenlänge definirende Reihe. Zu jedem Punkte des Continuums gehört also eine und nur eine Zahl, unser allgemeiner Zahlbegriff versagt niemals. Und umgekehrt: zu jeder Zahl gehört ein und auch nur ein Punkt, weil jede Zahl eine zu construirende Strecke, jede Strecke einen Endpunkt bestimmt. Indem also ein Punkt sich auf einer Geraden bewegt, durchläuft seine Entfernung vom Anfangspunkte die continuirliche Zahlenreihe. Es lässt sich die hiermit gewonnene Erkenntniss auch so aussprechen: Die rationalen Zahlen reichen aus, um jeden Werth der continuirlichen Zahlenreihe mit beliebiger Annäherung auszudrücken.

Um den Begriff aller möglichen Zahlen innerhalb eines Intervalles, d. h. zwischen zwei festen Werthen, zu überschauen, führt man in die Analysis, auch wenn man sich von dem Bilde einer bestimmten Bewegung auf der Geraden freimacht, die Vorstellung der Veränderung ein. Diese Vorstellung ist zuerst von Newton in allgemeinster Weise verwerthet worden; durch die Geometrie, besonders seit Cartesius, war sie vorbereitet. *Eine Grösse heisst veränderlich oder variabel, wenn sie verschiedene Zahlenwerthe anzunehmen vermag.* (Wie wir bei rein arithmetischen Untersuchungen nicht mehr daran denken, was für Dinge der Zahl nach gegeben sind, so haben wir uns bei dem Begriffe der „veränderlichen Grösse“ auch ganz frei zu machen von dem Gedanken an das, was diese Grösse vorstellt. Die Entfernung eines beweglichen Punktes, die Temperatur, die Dampfspannung, kurz alles messbare in der Natur wird in die Rechnungen als veränderliche Grösse eingehen können.) *Eine Grösse heisst innerhalb eines Intervalles d. h. zwischen zwei Zahlen continuirlich oder stetig veränderlich, wenn zwischen zwei noch so nahen Zahlen x_0 und $x_0 + \delta$ kein Zahlenwerth liegt, den sie bei der Veränderung von x_0 zu $x_0 + \delta$ nicht annimmt.* Der Ausdruck: eine Grösse ändert sich stetig vom Werthe a bis zum Werthe b, besagt also, die Grösse durchläuft alle Zahlen zwischen a und b, und in der Aufeinanderfolge der Zahlen findet kein Sprung statt.

Da wir nun aber einen Werth, welchen die veränderliche Grösse annimmt, wenn wir dieselbe fixiren wollen, nicht immer in geschlossener Form, sondern nur als Grenzwerth einer Reihe angeben können, so bedient man sich häufig einer Ausdrucksweise, bei welcher diese Veränderung zu einem bestimmten Werthe hin, mag dieser nun rational oder irrational sein, hervorgehoben wird. Man sagt: Die stetig veränderliche Grösse nähert sich unendlich einem bestimmten Werthe b oder convergirt nach demselben, wenn jede Reihe von discontinuirlichen Zahlen, welche wir aus den Werthen der Veränderlichen bilden können, nach diesem Grenzwerthe b convergirt. Ich werde mit dem Worte „unendlich“ jedesmal eine stetige Aenderung zu einem bestimmten Grenzwerthe hin bezeichnen.

Insbesondere wird eine Variabele „unendlich klein“, wenn sie bei stetiger Veränderung durch keinerlei Bedingung gehindert ist, ihrem absoluten Betrage nach kleiner als jede angebbare Zahl zu werden, d. h. wenn sie den Grenzwerth Null hat.

„Unendlich gross“ wird die Variabele genannt, und ihr Grenzwerth mit dem Zeichen $\pm\infty$ geschrieben, wenn sie bei stetiger Veränderung durch keinerlei Bedingung gehindert ist, ihrem absoluten Betrage nach grösser als jede angebbare Zahl zu werden. Aus der continuirlichen Zahlenreihe, die solch eine Variabele schliesslich durchläuft, lassen sich nach irgend welchem Gesetze (indem wir z. B. nur auf die ganzen Zahlen achten) discontinuirliche Zahlenreihen aufstellen, die aber die beiden Eigenschaften, welche für definirende Zahlreihen als nothwendig erkannt wurden, nicht mehr erfüllen. Nichtsdestoweniger können doch gewisse Rechnungen mit diesen Zahlreihen ausgeführt werden, weshalb wir sie als einen neuen Zahlbegriff durch folgende genauer präcisirte Definition einführen:

Eine Veränderliche wird in bestimmter Art positiv oder negativ unendlich gross, wenn jede discontinuirliche Zahlenreihe, welche man aus den Werthen, die sie durchläuft, bildet, die Eigenschaft hat, dass erstens von einer Stelle ab die Glieder nur positiv oder nur negativ sind, und dass zweitens zu jeder numerisch noch so grossen Zahl, die man sich denken mag, eine Stelle in der Reihe gefunden werden kann, von der ab alle Glieder ihrem Betrage nach grösser sind, als die gedachte Zahl.

Diese zweite Eigenschaft soll erst durch die späteren Beispiele näher erörtert werden; sie schliesst nicht aus, dass die Glieder der Reihe von jeder Stelle aus noch oscilliren, d. h. bald grösser bald kleiner werden. Wenn aber in der Zahlenreihe überhaupt nur beliebig grosse Werthe auftreten, dagegen die zweite Eigenschaft nicht von allen Gliedern erfüllt wird, so wird die Variabele unbestimmt unendlich.

Veränderliche Grössen pflegt man mit den letzten Buchstaben des

Alphabetes zu schreiben: $x\ y\ z$; Grössen mit festen oder constanten Werthen durch die ersten Buchstaben: $a\ b\ c$ zu bezeichnen.

10. Die Hauptgesetze für die Rechnung mit veränderlichen Grössen ergeben sich aus den im Capitel 2 für Grenzwerthe aufgestellten Regeln; denn die dort discontinuirlich dem Grenzwerthe sich nähernden Zahlen sind als Werthe in der continuirlichen Veränderung mit enthalten. Ich wiederhole hier die Gleichungen mit der der stetigen Veränderung angepassten Schreibweise, um einige Specialsätze daran zu knüpfen:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{Lim}(x \pm y) = \operatorname{Lim}(x) \pm \operatorname{Lim}(y).$$

Diese Gleichung besagt: Der Grenzwerth, welchem die Summe zweier stetig Veränderlichen zustrebt, ist gleich der Summe aus den Grenzwerthen, denen die Summanden zustreben, und umgekehrt. Dieser Satz lässt sich auf mehrere Summanden erweitern.

Specialsatz: Die Summe oder Differenz zweier unendlich kleiner Grössen ist selbst eine unendlich kleine, d. h. nach Null convergirende Grösse.

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{Lim}(x \cdot y) = \operatorname{Lim}(x) \cdot \operatorname{Lim}(y).$$

Specialsatz: Das Product einer endlichen und einer unendlich kleinen oder das Product zweier unendlich kleiner Grössen ist selbst eine unendlich kleine d. h. nach Null convergirende Grösse.

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{Lim}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\operatorname{Lim}(x)}{\operatorname{Lim}(y)}.$$

Bedeutet m eine Constante und x eine Veränderliche, die nur positive Werthe annimmt, so ist

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{Lim}(x^m) = (\operatorname{Lim} x)^m.$$

Bedeutet b eine positive Constante, x eine beliebige Veränderliche, so ist:

$$\text{(V)} \qquad \operatorname{Lim}(b^x) = b^{\operatorname{Lim}(x)}.$$

Potenzen mit variabelem Exponenten werden im Gegensatze zu Potenzen mit constantem Exponenten „Exponentialgrössen“ genannt.

In der Gleichung (III) ist die Bedingung vorausgesetzt, dass $\operatorname{Lim}(y)$ nicht Null ist. Mit Einführung des Begriffes der stetigen Veränderung ergiebt sich aber eine Festsetzung, die es ermöglicht, fortan auch Quotienten mit unendlich kleinem Divisor bei Rechnungen zu berücksichtigen. Da nämlich die Null nicht mehr wie ursprünglich nur durch die Differenz $a - a$ definirt ist, sondern als Grenzwerth einer Reihe von Zahlen gedacht ist, so kann der Quotient $\frac{\operatorname{Lim}(x)}{\operatorname{Lim}(y)}$ einen bestimmten Werth auch dann noch behalten, wenn der Quotient $\frac{x}{y}$ für beliebig kleine Werthe von y eine Zahl darstellt, die sich einem bestimmten (event. auch bestimmt unend-

lichen) Grenzwerthe nähert. Dies ist aber nur dann möglich, wenn das Bildungsgesetz der Reihe $\frac{x}{y}$ gegeben ist, d. h. wenn zu jeder Zahl innerhalb der Reihe x die Zahl in der Reihe y bekannt ist, durch welche dieselbe dividirt werden soll. Wenn dieses der Fall ist, so soll unter dem Quotienten $\frac{\operatorname{Lim}(x)}{\operatorname{Lim}(y)}$ der Werth $\operatorname{Lim}\left(\frac{x}{y}\right)$ verstanden werden*). Hat x einen bestimmten endlichen Grenzwerth, so wird die Reihe $\frac{x}{y}$ aus Zahlen bestehen, die ihrem absoluten Betrage nach über jede Grenze hinaus wachsen. Hat aber x selbst den Grenzwerth Null, so kann die Reihe $\frac{x}{y}$ entweder einen endlichen, oder einen unendlich kleinen, oder auch einen unendlich grossen, auch gar keinen bestimmten Grenzwerth haben, was nur in jedem einzelnen Falle durch Bildung der Reihe zu entscheiden ist.

Auch für die Gleichungen (I), (II) gilt das Gesetz, dass zur Bildung der linken Seite in eindeutiger Weise der Zusammenhang zwischen den Stellen der Reihe x und denen der Reihe y gegeben sein muss. Dann können die linken Seiten selbst dann noch bestimmte Grenzwerthe darstellen, wenn die Grenzen einer oder beider Reihen für x und y über jeden Betrag hinaus liegen**).

Viertes Capitel.

Begriff und Bezeichnung der Functionen einer Veränderlichen.

11. Wenn der Werth einer Veränderlichen y durch den Werth einer Veränderlichen x derart bestimmt ist, dass sich zu jedem Werthe von x ein oder auch mehrere Werthe von y berechnen lassen, oder, um nichts über die Art der Bestimmung auszusagen,

---

*) An einem einfachen Beispiel möge sich der Anfänger das oben gesagte klar machen. Es sei die Reihe y gegeben, in welcher y alle Zahlen von 1 bis 0 durchlaufen soll; die Reihe x bestehe aus den Zahlen $3y - y^2$, so dass also für $y = 1$ $x = 2$, für $y = \frac{1}{2}$ $x = \frac{5}{4}$, für $y = \frac{1}{4}$ $x = \frac{11}{16}$, ... $y = 0$ $x = 0$ wird. Versteht man nun unter $\frac{\operatorname{Lim} x}{\operatorname{Lim} y}$ den Werth $\operatorname{Lim} \frac{x}{y}$, so wird derselbe, wiewohl y und mit ihm auch x den Grenzwerth Null hat, für jeden Werth von y durch $\frac{3y - y^2}{y} = 3 - y$ dargestellt, d. h. die Reihe aus den Quotienten hat den Grenzwerth 3.

**) Die letzte Hälfte dieses Capitels wird an Verständlichkeit gewinnen, wenn das Material zu bestimmten Beispielen durch die nun folgenden Untersuchungen vorbereitet ist.

wenn zu jedem Werthe von x in einem Intervalle zugehörige Werthe von y tabellarisch angebbar sind, so heisst y eine Function von x. Man nennt y auch die abhängige Variabele, x die unabhängige oder das Argument der Function. Die Function selbst heisst im ersten Falle einwerthig (oder eindeutig), im zweiten mehrwerthig. (Bei den Problemen der Naturforschung, welche von messbaren Grössen handeln, hat man es stets mit der durch Beobachtung ermittelten Abhängigkeit veränderlicher Grössen, mit Functionen, zu thun.)

Die Function kann auch nur innerhalb eines bestimmten Intervalles definirt sein; so ist z. B. vermöge der Relation: $y^2 = (x-1)(3-x)$ oder $y = \pm\sqrt{(x-1)(3-x)}$, y eine zweiwerthige Function (wenn man auf beide Werthe der Quadratwurzel achtet) von x, die nur für die Werthe $1 \leqq x \leqq 3$ in reellen Zahlen berechenbar ist*).

Die Functionen werden classificirt in algebraische und transscendente. y heisst eine algebraische Function von x, wenn die Gleichung zwischen x und y, durch welche y definirt wird, sich auf die Form $f(x, y) = 0$ bringen lässt, wo $f(x, y)$ ganz und rational in Bezug auf x wie auf y ist. Der allgemeinste Typus einer algebraischen Function mit zwei Veränderlichen ist demnach:

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \cdots + A_{n-1} y + A_n = 0,$$

wobei die Grössen A Polynome beliebigen Grades in x sind, d. h. von der Form:

$$A = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m. \quad (m \text{ und } n \text{ positiv ganzzahlig.})$$

Mit den veränderlichen Grössen sind hierbei nur die Operationen der vier ersten Species (Potenzen mit ganzen Exponenten eingeschlossen) in endlicher Anzahl vorgenommen.

Transscendente Functionen sind alle übrigen. Dazu gehören aus den Rechnungsoperationen die Potenz mit irrationalem Exponenten, vor allem aber die Exponentialfunction, deren einfachster Typus $y = a^x$ ist, und der Logarithmus $y = {}^b\log x$; die letzten beiden Functionen sind mit unserem bisherigen Zahlbegriff nur berechenbar für positive Werthe von a und b, die zweite ausserdem nur für positive Werthe von x.

12. Nicht minder wichtig sind die aus den Elementen der Geometrie bekannten trigonometrischen oder specieller bezeichnet goniometrischen Functionen. Dieselben sind geometrisch definirt als Verhältnisse von Strecken, welche abhängig sind von einem Winkel. Um hervortreten zu lassen, dass eine Winkelgrösse stets eine unbenannte reine Zahl ist, empfiehlt es sich, die Grösse eines Winkels

---

*) Die Bezeichnung „Function" hat Joh. Bernoulli (1667—1748) eingeführt (opera omnia t. II, p. 241).

nicht durch Grade, sondern als Verhältniss der Länge des zugehörigen Kreisbogens zur Länge des erzeugenden Radius anzugeben. Indem man die Länge der ganzen Kreisperipherie, welche, ebenso wie der zum Winkel gehörige Bogen, dem Radius, mit welchem sie beschrieben wurde, proportional ist, mit $2 r \pi$ bezeichnet, wobei π eine Zahl ist, welche, wie in der Geometrie des Euklid gelehrt wird, mit beliebiger Annäherung durch Um- oder Einbeschreibung eines Polygones berechnet werden kann, so wird jedem Winkel eine Zahl zukommen, die als Theil oder Vielfaches von 2π den Winkelbogen als Theil oder Vielfaches der Kreisperipherie bestimmt. Durch geometrische Untersuchung erschliessen wir folgende Eigenschaften der Functionen:

$$y = \sin x \text{ und } y = \cos x.$$

1) Geht x v. 0 bis $\frac{\pi}{2}$ so erhält $\sin x$ die Werthe v. 0 bis 1, $\cos x$ von 1 bis 0

,, x v. $\frac{\pi}{2}$,, π, ,, ,, $\sin x$,, ,, v. 1 bis 0, $\cos x$ v. 0 bis -1

,, x v. π ,, $\frac{3\pi}{2}$,, ,, $\sin x$,, ,, v. 0 b. -1, $\cos x$ v. -1 b. 0

,, x v. $\frac{3\pi}{2}$,, 2π ,, ,, $\sin x$,, ,, v. -1 bis 0, $\cos x$ v. 0 bis 1.

Es liegt hier einer der Fälle vor, wo es gut ist, eine Unterscheidung der Vorzeichen in die geometrische Interpretation aufzunehmen.

2) $\sin x^2 + \cos x^2 = 1.$

3) Wird die Winkelgrösse durch weitere Drehung des einen Schenkels fortgesetzt, so folgt:

$$\sin (x + 2k\pi) = \sin x; \ \cos (x + 2k\pi) = \cos x$$

(k positive ganze Zahl).

4) Wenn die Umdrehung in entgegengesetztem Sinne vollzogen wird, so soll der Winkel mit negativer Zahl bezeichnet werden; dann ist also:

$$\sin (-x) = \sin (2\pi - x) = -\sin x$$
$$\cos (-x) = \cos (2\pi - x) = \cos x,$$

und allgemein:

$$\sin (x \pm 2k\pi) = \sin x; \ \cos (x \pm 2k\pi) = \cos x.$$

Die beiden Functionen, welche immer zwischen den Werthen $+1$ und -1 liegen, haben die Eigenschaft, dass sie ihre Werthe reproduciren, sobald die unabhängige Veränderliche um ein ganzzahliges Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert wird. 2π heisst die Periode der Function, diese selbst eine periodische.

5) Geometrisch ist zu beweisen, dass:

$$\sin(x \pm x_1) = \sin x \cos x_1 \pm \sin x_1 \cos x$$
$$\cos(x \pm x_1) = \cos x \cos x_1 \mp \sin x \sin x_1,$$

woraus dann folgt:

$$\sin x - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x - x_1}{2} \cos \frac{x + x_1}{2}$$

$$\cos x - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x - x_1}{2} \sin \frac{x + x_1}{2}.$$

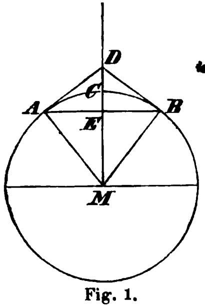


Fig. 1.

6) Die Fläche des Kreissectors $BCAM$, dessen Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, ist grösser als die Fläche des Dreieckes ABM und kleiner als die Summe der Dreiecke ADM und BDM.

Es sei der Radius $AM = 1$, der Winkel $AMC = x$, so ist $AE = \sin x$, $ME = \cos x$; ferner: $AD : AM = AE : ME$, also $AD = \frac{\sin x}{\cos x}$; demnach folgt für die genannten Flächen die Ungleichung:

$$\frac{\sin x}{\cos x} > x > \sin x \cos x \text{ oder } \frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > \cos x.$$

Diese Ungleichung gilt, wie klein man x annimmt; sie gilt auch, wenn man x negativ werden lässt. Der Quotient $\frac{x}{\sin x}$ ist so beschaffen, dass sein Zähler und Nenner unendlich klein werden können, während der Quotient selbst nach einem bestimmten endlichen Werth convergirt; denn für $x = 0$ wird $\cos x = 1$. Der Werth $\frac{1}{\cos x}$, welcher eine obere Grenze bildet, fällt also mit der unteren Grenze $\cos x$ für $x = 0$ zusammen. Demnach wird auch der eingeschlossene Werth gleich 1, d. h.

$$\text{Lim} \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ (für } x = 0).$$

Der Quotient $\frac{\sin x}{x}$ durchläuft die Reihe der reciproken Werthe und hat ebenfalls die 1 zur Grenze.

Aus den beiden Functionen sin und cos bildet man durch Division zwei andere, welche auch unmittelbar geometrisch durch Streckenverhältnisse dargestellt sind:

$$\text{tang } x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{cotg } x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

tang x wird 0 für $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi$ etc., cotg x wird 0 für $x = \pm \frac{\pi}{2}$, $\pm \frac{3\pi}{2}$, $\pm \frac{5\pi}{2}$ etc.; tang x wächst über jede angebbare Grenze hinaus und wird in bestimmter Weise gleich $+ \infty$, wenn x nach den

Werthen $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2} \cdots$ convergirt; ebenso cotg x für $x = 0, \pm \pi, \cdots$ Beide Functionen haben die Periode π.

Im Vorstehenden ist noch keine zweckmässige Methode zur Berechnung der goniometrischen Functionen gegeben; nur weil die Bestimmtheit der Aufgabe, zu jedem Winkel seinen Sinus etc. zu finden, geometrisch erkannt ist, dürfen wir den Begriff dieser Functionen und eine symbolische Bezeichnung für dieselben einführen.

13. Aus diesen vier Functionen lassen sich als inverse die cyclometrischen herleiten. Denkt man sich bei einer Function die Werthe von y als zuerst gegeben, so erscheinen die Werthe von x als abhängig; es wird dann x die umgekehrte oder inverse Function von y genannt. In einer Logarithmentafel kann man den Logarithmus als Function des Numerus, aber auch umgekehrt den Numerus als Function des Logarithmus betrachten.

Eine Function kann jedoch auch so geartet sein, dass ihre inverse Function nur für vereinzelte Werthe von y definirt ist. Betrachtet man z. B. die Function $y = G(x)$, unter $G(x)$ stets die grösste ganze in x enthaltene Zahl verstanden, so ist die inverse Function nur für die ganzzahligen Werthe $y = 0, 1, 2, \cdots$ definirt; zu jedem dieser Werthe gehören dann unendlich viele verschiedene Werthe von x, nämlich zu $y = 0$ alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$ (exclusive), zu $y = 1$ alle Werthe von $x = 1$ bis $x = 2$ (exclusive) u. s. f.

Ist $y = \sin x$, so bezeichnet die inverse den Arcus (Bogen) x, dessen Sinus den gegebenen Werth y hat; sie wird geschrieben:

$$x = \operatorname{arc} \sin y$$

(gesprochen arcus dessen sinus y, oder kürzer arcus sinus y). Ebenso aus den übrigen:

$$x = \operatorname{arc} \cos y, \quad x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y, \quad x = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} y.$$

Da nun sin und cos nur zwischen -1 und $+1$ gelegene Werthe annehmen, so ist arc sin und arc cos nur für die in diesem Intervalle gelegenen Werthe von y definirt. Da ferner zu demselben Sinus-Cosinus-Tangens-Cotangens-Werth verschiedene Kreisbogen, also verschiedene Zahlen x gehören, so werden die cyclometrischen Functionen vieldeutig. Um sie als bestimmte Zahlenwerthe in der Rechnung betrachten zu können, wird eine Festsetzung getroffen, welche zugleich continuirliche Functionen liefert:

Arc sin y bezeichnet diejenige zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegene Zahl, deren Sinus y ist. $(-1 \leq y \leq 1.)$

Arc cos y bezeichnet diejenige zwischen 0 und π gelegene Zahl, deren Cosinus y ist. $(-1 \leq y \leq 1.)$

Arc tang y bezeichnet diejenige zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegene Zahl, deren Tangens y ist. $(-\infty \leqq y \leqq +\infty.)$

Arc cotg y bezeichnet diejenige zwischen 0 und π gelegene Zahl, deren Cotangens y ist. $(-\infty \leqq y \leqq +\infty.)$

14. Die algebraischen Functionen und die vier einfachen Gattungen der transscendenten: Exponential- und goniometrische Functionen und deren inverse: Logarithmische und cyclometrische bilden in mannigfacher beliebiger Zusammensetzung zunächst das Object der analytischen Untersuchung. Im Verlauf derselben, die auf die wirkliche Berechnung der Functionen und auf die Erkenntniss ihrer Eigenschaften abzielt, wird sich herausstellen, dass Exponential- und goniometrische Functionen nahe verwandt sind, also auch Logarithmus und cyclometrische Function. Ferner wird sich zeigen, dass die Operationen der Differentialrechnung, angewandt auf diese Functionen, keine neuen liefern, dass dagegen die Integralrechnung neue darstellen und berechnen lehrt.

Fünftes Capitel.

Geometrische Darstellung der Function; ihre Stetigkeit und ihr Differentialquotient.

15. Die allgemeine Bezeichnung einer impliciten Function ist $f(x, y) = 0$; es soll durch dieselbe ausgedrückt werden, dass irgend eine Relation, eine Gleichung zwischen x und y gegeben ist; die explicite, d. h. nach y aufgelöste, ist $y = f(x)$. Ausserdem kann eine Function zwischen beiden Veränderlichen mit Hülfe einer dritten Variabelen, durch einen Parameter, dargestellt sein: $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$; zu jedem Werthe von t gehört ein Werth von x und y; auf diese Weise sind wiederum Werthe von x und y mit einander verbunden.

Der Gesammtverlauf der Function wird mit Hülfe des Cartesischen Coordinatensystemes — am einfachsten mit Hülfe des rechtwinkligen — durch eine Aufeinanderfolge von Punkten, deren Anzahl beliebig vermehrt und deren ununterbrochener Zusammenhang meistens als eine Curve gedacht werden kann, versinnbildlicht, indem man jeden Werth von x als Strecke auf der Abscissenaxe, jeden zugehörigen Werth y als Ordinate senkrecht in dem Endpunkt von x aufträgt. Der Endpunkt dieser Ordinatenstrecke ist der Punkt, welcher dem Werthsysteme x, y entspricht. Da wir aber niemals aus unendlich vielen Punkten eine Curve erzeugen können, sondern diese stets aus Linien zwischen Punkten zusammensetzen müssen, so verschafft man sich thatsächlich ein Bild der Function nur in der Weise, dass man beliebig viele, ver-

schiedenen Functionswerthen entsprechende einzelne Punkte construirt und die construirten Punkte durch gerade Linien verbindet. Dies angenäherte Bild der Function, ein Polygon mit beliebig vielen Ecken, wird eine gewisse Uebersicht über den totalen Functionsverlauf geben, um so correcter, je mehr Punkte construirt werden; aber in ihren einzelnen kleinen Theilen wird diese Darstellung niemals ganz exact sein. Besonders wenn die Function in der Nähe eines Punktes geometrisch dargestellt sehr geschlängelt ist, d. h. Polygone mit aus- und einspringenden Ecken liefert, wird jedes Bild, das wir uns auf diese Weise verschaffen, sehr unvollkommen den Verlauf darstellen, und sehr erhebliche Veränderungen erleiden, je mehr Punkte zur Construction verwandt werden, so dass das wahre Bild der Function, hinsichtlich aller ihrer Eigenschaften an jeder Stelle, sich auf diese Weise nicht fixiren lässt.

Sagen wir aber von einer Function: sie lasse sich an einer Stelle exact durch eine Curve darstellen, so sprechen wir damit eine bestimmte Eigenschaft für diese Stelle aus; denn damit nehmen wir an, dass, während die Ecken der Polygone beliebig vermehrt werden, auch die Richtungen der von jener betrachteten Ecke ausgehenden Polygonseiten nach festen Grenzlagen convergiren. Die analytische Formulirung dieser Bedingung wird noch in diesem Capitel gegeben werden.

Wir stellen die Frage: Welche Eigenschaften weist der Verlauf der abhängigen Veränderlichen y auf, während die unabhängige x alle möglichen Werthe annimmt? Dreierlei ist für die Erforschung jeder vorgelegten Function zunächst von Wichtigkeit.

Erstens: Ist der Verlauf allenthalben ein stetiger oder nicht?

Zweitens: Welche Besonderheiten kommen unter den Werthen, die die Function annimmt, vor?

Drittens: Welche Werthe erhält dieselbe, wenn die unabhängige Veränderliche unendlich gross wird?

16. Die explicite Function: $y = f(x)$ sei definirt als einwerthige Function für ein bestimmtes Intervall von $x = a$ bis $x = b$, d. h. zu jedem Werthe von x soll ausnahmslos ein und nur ein bestimmter Werth der Function gehören. Die Function wird zu beiden Seiten einer Stelle x in diesem Intervalle stetig genannt werden müssen, wenn keine sprungweisen Aenderungen der Functionswerthe vorkommen, indem man nach der einen oder der anderen Seite von dieser Stelle sich entfernt, also die Functionswerthe bildet, welche zu Werthen gehören, die beliebig wenig grösser oder kleiner als x sind. In eine für die Berechnung geeignete Form gefasst, lautet die Forderung: *Für diesen Werth von x muss es möglich sein, eine von Null verschiedene endliche Zahl h (die erst mit $\delta = 0$ nach Null convergirt) ausfindig zu machen, welche die Eigenschaft hat, dass die Differenz der Functionswerthe*

$$f(x \pm \Theta h) - f(x)$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner wird als eine vorgegebene beliebig kleine Zahl δ, *während* Θ *eine Veränderliche zwischen den Grenzen* 1 *und Null bedeutet.* — Denn darnach haben wir um die Stelle x einen Bereich $\pm h$ fixirt, in welchem die Functionswerthe um weniger als die beliebig kleine Grösse δ von dem Werthe an der Stelle x differiren und eine sprungweise Aenderung der Function an der Stelle ist damit ausgeschlossen. Man kann dieselbe Bedingung in andere Worte fassen: *Der Werth der Function für ein bestimmtes* x *muss sich als Grenzwerth von* $f(x+h)$ *und ebenso von* $f(x-h)$ *herleiten lassen, wenn* h *unendlich klein wird, d. h. stetig nach Null convergirt;* denn wenn dieses der Fall ist, so wird zufolge der Fundamentaleigenschaft der einen Grenzwerth definirenden Reihe ein Werth von h vorhanden sein, von dem ab abs $[f(x \pm h) - f(x)] \leq \delta$ wird und kleiner bleibt, wenn h nach Null convergirt.

So ist z. B.

$$\sin(x \pm h) - \sin(x) = 2 \sin\left(\pm \frac{h}{2}\right) \cos\left(x \pm \frac{h}{2}\right).$$

Der erste Factor der rechten Seite kann durch Bestimmung von h beliebig klein gemacht werden (denn der Sinus ist kleiner als sein Argument), der zweite ist für jedes x endlich; sonach wird das Product durch Wahl von h stets kleiner werden können als eine vorgegebene Zahl δ, woraus hervorgeht, dass die Sinusfunction durchweg stetig ist. Mit den vorstehenden Betrachtungen haben wir den Begriff des Bereiches oder der Umgebung einer Stelle gewonnen. Wir verstehen darunter ein beliebig kleines aber immer noch endliches Intervall zu beiden Seiten des Werthes x.

Da eine im Intervalle von a bis b stetige Function niemals einen Werth überspringen kann, der zwischen irgend zwei Functionswerthen gelegen ist, so ist es (falls die Function nicht constant ist) möglich, an jeder Stelle x einen endlichen Bereich $+h$ ausfindig zu machen derart, dass abs $[f(x+h) - f(x)]$ gleich einer gewissen vorgegebenen Grösse $\frac{\delta}{3}$ wird, während abs $[f(x + \Theta h) - f(x)] < \frac{\delta}{3}$ ist. Denkt man sich im Intervalle von a bis b, in welchem die Function stetig sein soll, zuerst von der Stelle a ab dies Intervall h nach der einen Seite ermittelt, dann sei $a+h=x_1$, so giebt es zu der Stelle x_1 gleichfalls solch ein Intervall h_1, und es sei $x_2=x_1+h_1$; fährt man fort an der Stelle x_2 das Intervall h_2 zu ermitteln, so gelangt man fortschreitend zu einem Punkte x_3 u. s. w. Bei diesem Processe muss man schliesslich vermittelst einer endlichen Anzahl von endlichen angebbaren Intervallen den Punkt b erreichen, resp. durch ein Intervall einschliessen. Denn würde dieser Process, dadurch dass die Intervalle h schliesslich unter jede angebbare Grenze sinken, sich ins unendliche fortsetzen lassen und also nach irgend

einem zwischen a und b gelegenen Werthe x oder nach dem Werthe b convergiren, so könnte für diesen Punkt x auch die Stetigkeitsbedingung nicht erfüllt sein, der zufolge sich ein endliches Intervall angeben lässt, in welchem $\operatorname{abs}[f(x-h)-f(x)] < \frac{\delta}{3}$.

Der kleinste unter der endlichen Anzahl von h Werthen, er heisse h', welche auf diese Weise ermittelt sind, liefert für jede Stelle von a bis b ein Intervall, in welchem die absolute Differenz zwischen den Functionswerthen sicherlich kleiner ist als δ. Denn zu einer beliebigen Stelle x, welche z. B. im Intervalle x_1 bis x_2 liegen soll, gehört $x+h'$, das höchstens im Intervalle x_2 bis x_3 sich befindet; nun ist

$$\operatorname{abs}[f(x_1)-f(x)] < \frac{\delta}{3}, \quad \operatorname{abs}[f(x_2)-f(x_1)] = \frac{\delta}{3},$$

$$\operatorname{abs}[f(x_2)-f(x+h')] < \frac{\delta}{3},$$

also

$$\operatorname{abs}[f(x+h')-f(x)] < \delta.$$

Diese Betrachtung hat gelehrt: Es giebt bei jeder stetigen Function einen angebbaren endlichen h Werth, der im ganzen Intervalle von a bis b für jedes x hinreichend ist, um die Ungleichung $f(x\pm\Theta h)-f(x)<\delta$ zu erfüllen, wenn δ beliebig gegeben ist. Zufolge dieser Eigenschaft nennt man nach Heine jede stetige Function eine in ihrem Intervalle gleichmässig stetige.

Man kann das Resultat dieser Untersuchungen auch so aussprechen: Bei einer jeden stetigen Function vollzieht sich jede Aenderung des Functionswerthes um eine endliche angebbare Grösse auch nur innerhalb eines endlichen angebbaren Intervalles; während bei einer unstetigen Function in einem beliebig kleinen Intervalle eine endliche Aenderung stattfindet.

17. Stellen, an denen das Kriterium der Stetigkeit nicht erfüllt ist, werden Unstetigkeits- oder Discontinuitätspunkte genannt. So ist z. B. die Function

$$y = a\,\frac{e^{\frac{1}{x-\alpha}}-1}{e^{\frac{1}{x-\alpha}}+1} \quad (e>1)$$

an der Stelle $x=\alpha$ unstetig, wenn man die Festsetzung trifft: es soll der Functionswerth an dieser Stelle so berechnet werden, dass man $x=\alpha+h$ oder $x=\alpha-h$ setzt, und h nach Null convergiren lässt. Im ersten Falle wird derselbe zunächst gleich:

$$a\,\frac{e^{\frac{1}{h}}-1}{e^{\frac{1}{h}}+1}.$$

Für $h=0$ ist dies ein Quotient, dessen Zähler und dessen Nenner in bestimmter Art über jede angebbare Grenze hinaus wachsen; trotz-

dem nähert sich derselbe einem festen endlichen Werthe. Denn da er jederzeit gleich

$$a \frac{1 - e^{-\frac{1}{h}}}{1 + e^{-\frac{1}{h}}}$$

gesetzt werden kann, so erkennt man, dass schliesslich die Werthe des zweiten Factors von der Einheit beliebig wenig unterschieden sind, weil $e^{-\frac{1}{h}}$ für abnehmende h einen immer kleiner werdenden Bruch darstellt. Der Functionswerth an der Stelle $x = \alpha$ ist nach dieser Bestimmung gleich a.

Setzt man aber $x = a - h$, so wird y gleich:

$$a \frac{e^{-\frac{1}{h}} - 1}{e^{-\frac{1}{h}} + 1},$$

für $h = 0$ der Grenzwerth folglich $-a$.

Die Function verläuft also, wenn x von einem Werthe kleiner als α beginnend wächst, bis zum Werthe $-a$, und springt dann plötzlich zum Werthe $+a$ noch an derselben Stelle, um nunmehr stetig für wachsende x abzunehmen; an der Stelle $x = \alpha$ hört sie dabei auf einwerthig zu sein. Die § 13 bereits genannte Function: $y = G(x)$, in welcher unter $G(x)$ die grösste ganze in x enthaltene Zahl verstanden wird, ist, wenn wir sie für positive Werthe von $x = 0$ an untersuchen, eine allenthalben einwerthige Function, welche an den Stellen $x = 1, 2, 3, \ldots$ unstetig wird, indem die Functionswerthe einen Sprung von 0 nach 1, von 1 nach 2 u. s. f. erleiden. An allen anderen Stellen, mögen sie auch noch so nahe an den Unstetigkeitsstellen liegen, ist die Function stetig; ja man kann sagen, dass für jeden einzelnen Werth von x: $G(x + \Theta h) - G(x) < \delta$ gemacht werden kann, durch Wahl von h (nur sinkt der Werth von h unter jede angebbare Grenze herab, wenn x einer Discontinuitätsstelle beliebig nahe kommt: die gleichmässige Stetigkeit hört auf); nicht aber $G(x - \Theta h) - G(x) < \delta$, wenn x eine der Unstetigkeitsstellen ist, woraus man sieht, dass die erste Ungleichung allein zur Bedingung der Stetigkeit nicht hinreicht.

Als Unstetigkeitspunkte werden aber auch ferner diejenigen Stellen bezeichnet, an denen der Functionswerth selbst über jede angebbare Grenze hinausliegt, oder an denen er ganz unbestimmt wird, weil auch an solchen Stellen der Stetigkeitsbedingung, wie sie oben formulirt wurde, nicht genügt werden kann. Bei einer gegebenen Function ist es dann wichtig zu untersuchen, wie sie sich in der Nähe solch einer Stelle verhält.

So wird z. B. $y = \frac{1}{x-a}$ für $x < a$ einen negativen Werth haben, dessen Betrag immer grösser wird, je mehr sich x dem Werthe a nähert; sobald x ein wenig grösser wie a geworden, wird der Betrag positiv beliebig gross; es findet hier also eine Aenderung von $-\infty$ zu $+\infty$ statt, oder:

$$f(a+h) = \frac{1}{h} \quad \text{und} \quad f(a-h) = -\frac{1}{h}$$

liefern für abnehmende Werthe von h Zahlenreihen, die in bestimmter Art (§ 9) positiv und negativ unendlich werden. Dasselbe ist zufolge der geometrischen Definition bei tang x an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ erkennbar. Dagegen wird die Function $y = \left(\frac{1}{x-a}\right)^2$ zu beiden Seiten von a positiv beliebig gross. Die Stetigkeit besteht indess für jeden Werth von x, der sich um eine beliebig kleine, jedoch endliche Grösse von a unterscheidet.

Die Functionen:

$$y = \frac{1}{x-a} \sin\left(\frac{1}{x-a}\right) \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{x-a}\left(\sin\left(\frac{1}{x-a}\right)\right)^2$$

weisen ein völlig unbestimmtes Verhalten auf; denn während bei jeder derselben der erste Factor mit Annäherung des x an a beliebig gross wird, oscillirt der zweite Factor zwischen -1 und $+1$, bez. 0 und $+1$, so dass von keiner Stelle, auch noch so nahe bei a,

$$f(a \pm h) = \frac{1}{\pm h} \sin\left(\pm \frac{1}{h}\right) \quad \text{bez.} \quad \frac{1}{\pm h}\left(\sin\left(\pm\frac{1}{h}\right)\right)^2$$

für unendlich klein werdendes h eine Reihe mit einem bestimmten endlichen oder unendlichen Grenzwerthe liefert (weder die im § 6 noch die im § 9 geforderten Eigenschaften sind hier erfüllt). Die Oscillationen der Sinusfunction folgen um so rascher auf einander, je näher x dem a kommt; nimmt man $x = a + h$ an und fragt: um wie viel h vermindert werden muss, damit die Zahl unter dem Sinus um 2π sich ändert, so folgt, wenn man

$$\frac{1}{h} + 2\pi = \frac{1}{h'}$$

setzt, dass

$$h' = \frac{h}{1 + 2\pi h},$$

also

$$h - h' = \frac{2\pi h^2}{1 + 2\pi h}$$

ist. Die Differenz, das Intervall, in welchem der Sinus bereits alle seine Werthe durchläuft, ist also kleiner als $2\pi h^2$, so dass die Anzahl der Oscillationen des Sinus in beliebig kleinem Bereiche bei a über jede angebbare Grenze hinaus liegt; für solch eine Stelle, wo sein Argu-

ment unendlich wird, hat der Sinus (und ebenso Cosinus, Tangens und Cotangens) keinen bestimmten Werth; er kann also auch nicht stetig an dieser Stelle genannt werden, wiewohl er an jeder noch so nahe liegenden Stelle stetig ist.

Wird eine stetige Function für die Werthe von x in einem Intervalle von a bis b nicht unendlich, so giebt es mindestens einen Werth von x im Intervalle oder zusammenfallend mit den Grenzen a oder b, für welchen sie einen angebbaren algebraisch (d. h. mit Berücksichtigung des Vorzeichens) grössten Werth G, und ebenso eine Stelle, an welcher sie einen algebraisch kleinsten Werth g annimmt. Dieser Satz ist nicht selbstverständlich. Bei einer unstetigen Function ist zwar auch, falls die Function endlich bleibt, eine obere (und eine untere) Grenze angebbar, die von den Functionswerthen nicht überschritten wird; auch kann man die Grenzen so fixiren, dass sicherlich die Functionswerthe an einer Stelle diesen Grenzen beliebig nahe kommen; aber es braucht dieser Werth nicht wirklich erreicht zu werden. Denkt man sich z. B. die Function $y = x$ im Intervalle von 0 bis 1, legt ihr aber an der Stelle $x = 1$ den Werth $y = 0$ statt $y = 1$ bei, so ist sie eine unstetige Function, deren obere Grenze der Werth 1 ist, den sie gleichwohl im Intervalle von 0 bis 1 (einschliesslich der Grenzen) nicht annimmt.

Für eine stetige Function beweist man den Satz folgendermassen. Zerlegt man das Intervall a bis b in n Theile, von der Grösse $\delta = \frac{b-a}{n}$, so ist entweder einer der Theilpunkte eine Stelle, an welcher die Function den Werth der oberen Grenze G annimmt, oder es ist mindestens für eines dieser Intervalle der Werth G obere Grenze; d. h. die Functionswerthe kommen dieser Grösse beliebig nahe; dieses Intervall erstrecke sich von x_μ bis $x_{\mu+1}$. Man wähle $\delta' < \delta$ und theile dieses Intervall in Unterabtheilungen von der Grösse δ'. Entweder trifft man dabei auf die Stelle mit dem Maximalwerthe, oder in einem Intervalle $x_{\mu'}$ bis $x_{\mu'+1}$ ist G die obere Grenze. Theilt man nun dieses Intervall weiter in Strecken von der Grösse $\delta'' < \delta'$ u. s. f., so gelangt man entweder durch einen endlichen Process zu der Stelle, an welcher der Maximalwerth G vorhanden ist, oder man gewinnt eine unbegrenzt fortsetzbare Reihe von wachsenden Grössen:

$$x_\mu,\ x_{\mu'},\ x_{\mu''},\ \ldots,$$

welche eine Stelle X definirt. Der Werth der stetigen Function f an dieser Stelle kann sich von dem Werthe G nicht unterscheiden, da eine stetige Function die Eigenschaft hat, dass der Werth an jeder Stelle als Grenzwerth benachbarter abgeleitet werden kann (§ 16);

$$f(x_\mu),\ f(x_{\mu'}),\ f(x_{\mu''})\ \ldots$$

ist die Reihe, durch welche $f(X)$ definirt wird. Die Werthe dieser

Reihe nähern sich aber beliebig dem Werthe G; folglich kann auch $f(X)$ nicht um eine endliche Grösse von G verschieden sein, es ist $f(X) = G$.

Ebenso findet man eine Stelle, an welcher der Functionswerth mit der unteren Grenze g zusammenfällt.

18. Bei einer Function, die nicht auf ein endliches Intervall von x beschränkt ist, wird es jedesmal von Wichtigkeit sein, ihr Verhalten für ein unendlich gross werdendes x zu prüfen, d. h. zu untersuchen: welchen Grenzwerth besitzt die Reihe der Functionswerthe, gebildet für beliebig grosse Werthe von x? Der Grenzwerth ist entweder ein bestimmt endlicher, oder bestimmt unendlicher, oder ein unbestimmter, je nach den Eigenschaften, welche die Reihe aufweist.

Beispiele hierfür sind:

$$(\alpha) \quad \text{Lim}\left(a + \frac{b}{x}\right)_{\text{für } x = \pm\infty} = a, \quad \text{Lim}\left(\frac{a}{x^m}\right) = 0 \text{ (wenn } m > 0),$$

$$(\beta) \quad \text{Lim}(x^m)_{x=+\infty} = +\infty (m > 0), \quad \text{Lim}\, {}^b\!\log(x)_{x=+\infty} = \infty (b > 1).$$

$$(\gamma) \quad \begin{cases} \text{Lim}(\sin x)_{\text{für } x = \pm\infty} \text{ unbestimmt (aber endlich)}, \\ \text{Lim}(x \sin x)_{\text{für } x = \pm\infty} \text{ (unbegrenzt unbestimmt)}. \end{cases}$$

19. Da durch die Forderung der Stetigkeit zu beiden Seiten einer Stelle auch das unendlich gross Werden der Function in der Umgebung dieser Stelle ausgeschlossen ist, so gelten für die Eigenschaft der Stetigkeit die folgenden allgemeinen Sätze:

a) Die Summe (Differenz) zweier (oder mehrerer) stetiger Functionen ist selbst eine stetige Function.

Denn sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ stetig, so ist es immer möglich ein Intervall h ausfindig zu machen, so dass

$$\text{abs}[\varphi(x \pm h) - \varphi(x)] < \frac{1}{2}\,\delta, \quad \text{abs}[\psi(x \pm h) - \psi(x)] < \frac{1}{2}\,\delta.$$

Daraus folgt, dass:

$$\text{abs}\left[\{\varphi(x \pm h) \pm \psi(x \pm h)\} - \{\varphi(x) \pm \psi(x)\}\right] < \delta.$$

b) Das Product zweier (oder mehrerer) Functionen ist selbst eine stetige Function, denn es ist:

$$\text{abs}[\varphi(x \pm h) \cdot \psi(x \pm h) - \varphi(x) \cdot \psi(x)]$$

$$= \text{abs}\left[\varphi(x \pm h)\{\psi(x \pm h) - \psi(x)\} + \psi(x)\{\varphi(x \pm h) - \varphi(x)\}\right].$$

Wird das Intervall h so bestimmt, dass

$$\text{abs}[\psi(x \pm h) - \psi(x)] < \varepsilon, \; \text{abs}[\varphi(x \pm h) - \varphi(x)] < \varepsilon,$$

so wird:

$$\text{abs}[\varphi(x \pm h)\,\psi(x \pm h) - \varphi(x)\,\psi(x)] < \varepsilon.\; \text{abs}[\varphi(x \pm h) + \psi(x)].$$

Dieser Ausdruck rechts kann aber, da φ und ψ in der Umgebung der betrachteten Stelle bestimmte obere Grenzen haben, immer kleiner gemacht werden als eine beliebig kleine vorgegebene Zahl, durch eine

entsprechende Annahme von ε und daraus folgender Bestimmung von h.

c) Der Quotient zweier stetiger Functionen ist, mit Ausnahme der Stelle, an welcher der Nenner verschwindet, selbst eine stetige Function.

Denn es ist:

$$\operatorname{abs}\left[\frac{\varphi(x \pm h)}{\psi(x \pm h)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]$$
$$= \operatorname{abs}\left[\frac{\psi(x)\,\{\varphi(x \pm h) - \varphi(x)\} - \varphi(x)\,\{\psi(x \pm h) - \psi(x)\}}{\psi(x)\,\psi(x \pm h)}\right].$$

Der Zähler dieses Ausdruckes kann, wie eine der vorigen gleiche Betrachtung zeigt, so klein gemacht werden als man will, während der Nenner endlich bleibt.

Convergirt aber in dem Bruche $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ der Nenner für $x = a$ nach Null, während der Zähler einen endlichen Werth erhält, so wird der Werth des Quotienten entweder bestimmt unendlich, d. h. unstetig, oder auch unbestimmt; für jeden dieser Stelle noch so nahe gelegenen Werth von x jedoch ist er stetig.

Convergirt auch der Zähler nach Null, so ist unter dem Werthe von $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ an dieser Stelle $x = a$ der Grenzwerth der Reihe zu verstehen, welche man erhält, indem x eine continuirliche Zahlenreihe durchläuft, welche a zur Grenze hat. Ob der Quotient alsdann einen bestimmten Werth bekommt, und ob er eine stetige Function auch an dieser Stelle ist, d. h. ob er denselben Werth für $x >$ sowohl wie $< a$ erhält, muss nach besonderen Methoden entschieden werden. Der wichtigste Fall dieser Art wird in den folgenden Paragraphen untersucht werden; aus seiner Lösung wird eine allgemeine Methode hervorgehen.

d) Ist $u = \varphi(x)$ eine stetige Function von x, und $y = f(u)$ eine stetige Function von u, so ist auch y eine stetige Function von x.

Denn damit

$$\operatorname{abs}[f(\varphi(x+h)) - f(\varphi(x))] < \delta$$

werde, muss die Aenderung von x so bestimmt werden, dass

$$[\varphi(x+h) - \varphi(x)] < \varepsilon$$

wird, wobei ε die Grösse bezeichnet, bei welcher für die stetige Function f die Forderung

$$\operatorname{abs}[f(u+\varepsilon) - f(u)] < \delta$$

erfüllt ist. Ein solcher Werth h lässt sich aber der Voraussetzung nach angeben.

20. Nachdem die ausgezeichneten Stellen in dem Verlaufe einer Function ermittelt sind, sucht man ein Maass festzustellen für die Art, wie die Function ihre Werthe ändert, wenn die unabhängige Variabele

vermehrt oder vermindert wird. Die mathematische Präcisirung dieses Maasses bildet den Kern der Differentialrechnung.

Man betrachte zwei Functionswerthe, welche zu zwei verschiedenen Werthen des Argumentes: x und $x + \Delta x$ (Δx ist Bezeichnung des Zuwachses von x und soll nicht etwa ein Product darstellen) gehören, und bezeichne die entsprechenden Werthe der Function mit y und $y + \Delta y$, so ist Δy berechenbar aus der Gleichung:

(I) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. ($\Delta x$ kann $>$ oder <0 gewählt werden).

Die rechts stehende Differenz giebt die Grösse der Veränderung für y an, wenn die unabhängige Veränderliche vom Werthe x bis zum Werthe $x + \Delta x$ gewachsen ist.

Diese Aenderung von y soll mit der von x verglichen, d. h. es soll gemessen werden, um wie viel mal sie grösser oder kleiner als Δx ist. Zu dem Zwecke ist der Quotient zu bilden:

$$\text{(II)} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (\Delta x \gtrless 0).$$

Der rechts stehende Differenzenquotient giebt ein Maass für die durchschnittliche (mittlere) Grösse der Veränderung in dem Intervalle von x bis $x + \Delta x$. Denn er sagt aus, wenn bei der Aenderung des x um die Einheit die Veränderung des y den in der Gleichung (II) angegebenen Werth betrüge, so würde, falls die Function sich gleichmässig in dem Intervalle änderte, also zu gleichen Werthen von Δx stets gleiche Werthe von Δy gehörten, der Zuwachs gleich Δy sein. Der Differenzenquotient besitzt folgende Eigenschaften: Vorausgesetzt dass f eine stetige Function von x ist, ist auch der Differenzenquotient bei irgend einem endlichen Werthe von Δx eine stetige Function von x; unter der gleichen Voraussetzung ist er aber auch zweitens eine stetige Function von Δx, so lange wir uns auf endliche aber beliebig kleine Werthe von Δx beschränken (siehe die vorige Nummer).

Indem wir nun ein Maass nicht für ein willkürliches Intervall, sondern für eine Stelle der Function zu bestimmen suchen, müssen wir Δx, die Grösse des Intervalles, nach Null convergiren lassen. Der Quotient auf der rechten Seite wird dann unendlich gross, falls nicht auch sein Zähler $f(x + \Delta x) - f(x)$ in eine Reihe von Zahlen ausläuft, welche die Null zur Grenze hat (§ 10). Indem wir aber dieses voraussetzen, betrachten wir eine Stelle, in deren unmittelbarer Umgebung die eindeutige Function stetig verläuft. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit nunmehr der Quotient:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

für immer kleiner werdende Werthe von Δx eine stetige Folge von Zahlen liefert, welche einem bestimmten Grenzwerthe: null, endlich oder unendlich gross zustrebt? Das Durchlaufen des Intervalles Δx im positiven oder negativen Sinne lässt sich wiederum so ausdrücken, dass wir Δx als festen (beliebig kleinen aber endlichen) Werth denken, und eine Zahl Θ einführen, welche sich continuirlich zwischen den Grenzen -1 und $+1$ bewegt; dann handelt es sich um die Existenz eines Grenzwerthes von:

$$\frac{f(x+\Theta\Delta x)-f(x)}{\Theta\Delta x},$$

wenn Θ von -1 nach Null, oder von $+1$ nach Null convergirt. Die Grenzwerthe, welche sich in beiden Fällen ergeben, können verschieden sein; im ersten Falle nennen wir den Differenzenquotienten rückwärts, im zweiten vorwärts genommen. Wir fassen den letzteren ins Auge:

Der besondere Werth Null wird als Grenzwerth auftreten, falls sich zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine Zahl Δx finden lässt, so dass der absolute Betrag dieses Quotienten für jeden Werth von Θ kleiner ist als δ. Dabei kann der Zähler sein Vorzeichen beliebig wechseln, d. h. $f(x+\Theta\Delta x)$ kann bald grösser, bald kleiner werden als $f(x)$, oder in anderen Worten: Die Function $f(x)$ kann, falls Null der Grenzwerth des Differenzenquotienten ist, in der Umgebung der Stelle x beliebig viele Oscillationen in Bezug auf die x-Axe besitzen*).

Soll aber der Grenzwerth ein endlicher oder bestimmt unendlicher werden, so muss, da der Nenner des Quotienten für $+1 \geqq \Theta \geqq 0$ nur positiv ist, auch der Zähler bei gleichem Vorzeichen von Θ stets dasselbe Vorzeichen haben, d. h.

$$f(x+\Theta\Delta x) \text{ ist entweder nur } > \text{ oder nur } < f(x).$$

Die Function wächst nur oder nimmt nur ab im Vergleich zu dem Werthe an der Stelle x, während x wächst; sie besitzt in beliebig kleinem Intervalle keine Oscillationen mehr in Bezug auf diesen Werth. Diese Bedingung ist eine nothwendige. Aber damit die Reihe der Differenzenquotienten einen endlichen Grenzwerth hat, muss vielmehr die Bedingung (nothwendig und hinreichend) erfüllt sein, dass

$$\text{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-\frac{f(x+\Theta\Delta x)-f(x)}{\Theta\Delta x}\right]<\delta, \quad (1>\Theta \geqq 0)$$

wird, wobei δ eine beliebige Zahl bedeutet.

Diese Ungleichung lässt sich auf folgende Weise interpretiren:

*) Die Schwankungen (Unterschiede der Ordinaten) sind, wie ich nur beiläufig anmerke, von der zweiten Ordnung unendlich klein (Cap. 7), z. B. die Function $x^2 \sin\frac{1}{x}$ hat an der Stelle $x=0$ den Differentialquotienten 0, denn es ist

$$\text{Lim}\left[\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right]=\text{Lim}\left[h\sin\frac{1}{h}\right]=0.$$

Bezeichnet man den numerischen Unterschied der zu den Werthen Δx und $\Theta\Delta x$ gehörigen Differenzenquotienten als die Schwankungen dieses Quotienten im Intervall Δx, so spricht diese Ungleichung aus: Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines bestimmten endlichen Grenzwerthes besteht darin, dass sich zu jeder noch so kleinen Zahl δ ein endliches Intervall Δx ermitteln lässt, in welchem die Schwankungen des Differenzenquotienten kleiner werden als δ.

Damit ist aber gesagt, dass in der Umgebung jeder Stelle, an welcher die stetige Function einen bestimmten endlichen Grenzwerth des Differenzenquotienten besitzt, der Differenzenquotient nicht nur eine stetige Function von Δx bei jedem endlichen Werth von Δx ist, sondern diese Eigenschaft auch beibehält für $\Delta x = 0$.

Hat der Differenzenquotient die Eigenschaft im Intervall Δx, während Θ nach Null convergirt, nur zu wachsen, oder nur abzunehmen (mit andern Worten: lässt sich an einer Stelle ein Intervall Δx ermitteln, in welchem der Differenzenquotient keine Maxima oder Minima mehr besitzt), so ist ein Grenzwerth vorhanden entweder endlich oder bestimmt unendlich (§ 6. Zusatz). Die Möglichkeit keines bestimmten Grenzwerthes ist sonach dadurch allein gegeben, dass der Differenzenquotient an einer Stelle in noch so kleinem Intervalle unendlich viele Maxima und Minima bekommt, deren Unterschiede sich nicht beliebig verkleinern lassen. In diesem Falle nennen wir den Differenzenquotienten nicht mehr stetig einschliesslich des Werthes $\Delta x = 0$.

Wir können Zähler und Nenner der obigen Ungleichung geometrisch folgendermassen deuten:

Stellen wir uns die Function $y = f(x)$ unter dem Bilde eines Polygones mit beliebig vielen Ecken vor, indem wir die Werthe von x und y als Strecken eines rechtwinkligen Cartesischen Coordinatensystems interpretiren, so erkennen wir:

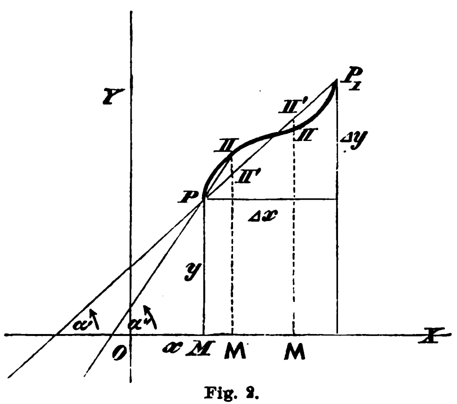


Fig. 2.

I. Die Differenz Δy giebt den Höhenunterschied zweier Punkte P und P_1 an, welche zu den Werthen x und $x + \Delta x$ gehören.

II. Der Differenzenquotient ist gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels, den die Sehne PP_1 mit der Abscissenaxe bildet; er misst die mittlere Stärke der Steigung.

Die Gleichung der Sehne als einer Graden, welche durch die Punkte P und P_1 geht, wird, wenn ξ und η die Coordinaten irgend eines auf ihr gelegenen Punktes bedeuten:

$$\frac{\eta - f(x)}{\xi - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Der Punkt mit der Abscisse $\xi = x + \Theta \Delta x$, welcher auf dieser Graden liegt, hat die Ordinate:

$$\eta = f(x) + \Theta \left\{ f(x + \Delta x) - f(x) \right\}.$$

Andererseits gehört zur Abscisse $x + \Theta \Delta x$ die Polygonecke

$$\eta = f(x + \Theta \Delta x).$$

Mithin ist

$$\Theta \left\{ f(x + \Delta x) - f(x) \right\} - \left\{ f(x + \Theta \Delta x) - f(x) \right\}$$

gleich der Differenz $M\Pi' - M\Pi = \Pi\Pi'$. Nennen wir $\frac{\Pi\Pi'}{MM}$ das Maass der Abweichung des Functionswerthes von der Geraden an dieser Stelle im Intervall Δx, so lehrt uns die obige Ungleichung, welche die zuerst genannte Bedingung in sich schliesst:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung eines bestimmten endlichen Grenzwerthes für den Differenzenquotienten besteht darin, dass sich zu jeder noch so kleinen Zahl δ ein Intervall Δx ermitteln lässt, in welchem die Abweichungen von der Geraden ihrem absoluten Betrage nach kleiner werden als δ*).

Die andere Interpretation der Ungleichung erhält man, indem man den Winkel, welchen die Sehne PP_1 mit der Abscissenaxe bildet, mit α', ebenso den Winkel zwischen $P\Pi$ und der Abscissenaxe mit α'' bezeichnet, so ist

$$\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \alpha'' = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x + \Theta \Delta x) - f(x)}{\Theta \Delta x} < \delta,$$

d. h. es muss sich ein Intervall Δx ermitteln lassen, in welchem die Unterschiede der Winkel α', α'' beliebig klein werden. Alsdann nähern sich die Polygonseiten einer festen Grenzlage und die Function ist an dieser Stelle unter dem Bilde einer Curve zu denken; d. h. eines geometrischen Gebildes, welches an der Stelle eine bestimmte Richtung hat, so dass der Verlauf an dieser Stelle mit beliebiger Annäherung durch eine bestimmte Gerade dargestellt wird. Die Bedingung für die Existenz eines Grenzwerthes ist also geometrisch gesprochen nichts anderes als die Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function durch eine Curve. (§ 15.)

Dagegen wird der Grenzwerth in bestimmter Weise unendlich gross, wenn das Maass der Abweichung von der Geraden PP_1 stets

*) Die Abweichungen können dabei fortwährend ihr Zeichen wechseln, d. h. eine Curve kann in jedem noch so kleinen Intervalle in Bezug auf ihre Tangente unendlich viele Oscillationen haben.

positiv oder stets negativ über jeden Betrag hinaus wächst oder tg α' unendlich wird (§ 24a). Völlig unbestimmt aber wird er, wenn die Abweichung weder Null noch in bestimmter Weise unendlich wird, sondern zwischen verschiedenen Grenzen oscillirt.

Dieser Grenzwerth, definirt durch die Gleichung:

$$\text{(III)}\quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Theta=0} \frac{f(x+\Theta\Delta x) - f(x)}{\Theta\Delta x} \quad \text{oder kürzer:} \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

vorwärts genommener Differentialquotient der Function an der Stelle x genannt, giebt ein Maass für die Aenderung der Function an der Stelle, während x wächst.

Ebenso giebt der rückwärts genommene Differentialquotient

$$\text{(IIIa)}\quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Theta=0} \frac{f(x-\Theta\Delta x) - f(x)}{-\Theta\Delta x} \quad \text{oder kürzer:} \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{-\Delta x}$$

ein Maass für die Aenderung der Function an jener Stelle, während x abnimmt.

Statt der Gleichungen (III) kann man auch für den Fall, dass $\frac{dy}{dx}$ endlich ist, schreiben:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \delta,$$

wobei δ eben jene mit Δx nach Null convergirende Differenz zwischen den Gliedern der aus den Differenzenquotienten gebildeten Reihe und ihrem Grenzwerthe bedeutet. Hierbei ist zu bemerken, dass zu einem noch so kleinen endlichen Werthe von δ sich jedesmal ein endlicher Werth von Δx ermitteln lassen muss, welcher diese Gleichung befriedigt, weil der Differenzenquotient eine stetige Function von Δx ist; es braucht aber nicht dasselbe Δx bei allen Werthen von x in einem Intervalle bei gegebenem δ zu gelten (siehe den folgenden Paragraphen). Die Gleichung

$$\Delta y = \Delta x \cdot \frac{dy}{dx} + \Delta x \cdot \delta$$

sagt dann aus: je kleiner Δx gewählt wird, um so genauer ist die zugehörige Aenderung der Function gleich dem Producte aus Differentialquotient mal Δx, so dass dasselbe für die Stelle selbst das Maass des Wachsthumes präcise bezeichnet. Auch sieht man ein, was schon anfangs gesagt wurde, dass die Existenz bestimmter endlicher Werthe für den vor- und für den rückwärts genommenen Differentialquotienten zugleich stets die Bedingung der Stetigkeit der Function an dieser Stelle involvirt.

21. Je nachdem der vorwärts genommene Differentialquotient positiv oder negativ ist, wächst die Function an dieser Stelle mit wachsenden Werthen von x oder nimmt ab; und je nachdem der rückwärts genommene Differentialquotient positiv oder negativ ist, nimmt die Function ab oder sie wächst mit abnehmenden Werthen von x.

Die Unterscheidung des vor- und des rückwärts genommenen Differentialquotienten wird aber bei einer stetigen Function in den meisten Fällen, die späterhin betrachtet werden, unnöthig, denn es besteht der Satz:

Wenn in der beiderseitigen Umgebung einer Stelle, an welcher $f(x)$ stetig ist, bei jedem Werthe von x ein Intervall Δx ermittelt werden kann, so dass die Unterschiede der Differenzenquotienten dieses Intervalles gebildet für alle Werthe zwischen 0 und Δx ihrem absoluten Betrage nach kleiner bleiben als eine beliebig kleine Zahl δ, so ist der vorwärts genommene Differentialquotient eine stetige Function von x und der Werth des rückwärts genommenen ist mit ihm identisch.

Zu beiden Seiten einer Stelle x trage man das Intervall $\pm h$ ab. Die Grösse h ist beliebig klein, jedoch endlich gedacht; sie repräsentirt die beiderseitige Umgebung. Die Bedingung besagt alsdann, dass die Differenz

$$\text{abs}\left[\frac{f(x\pm h+\Delta x)-f(x\pm h)}{\Delta x}-\frac{f(x\pm\eta h+\Theta\Delta x)-f(x\pm\eta h)}{\Theta\Delta x}\right]$$

kleiner bleibt als δ, mögen Θ und η alle Werthe von 0 bis 1 annehmen. Diese Bedingung kann in die Worte gefasst werden: Der Differenzenquotient ist eine stetige Function beider Variabelen h und Δx; oder er ist eine gleichmässig stetige Function von h und Δx. (Die Begründung dieser Benennung siehe Cap. 9.)

Der vorwärts genommene Differentialquotient, gebildet von $f(x)$ an der Stelle x, werde mit $f_1(x)$ bezeichnet, so kann (zufolge der Voraussetzung) Δx immer so klein gewählt werden, dass

$$(1)\qquad f_1(x\pm h)=\frac{f(x\pm h+\Delta x)-f(x\pm h)}{\Delta x}\pm\delta.$$

Ebenso ist für den Differentialquotienten an der Stelle x:

$$(2)\qquad f_1(x)=\frac{f(x\pm h+\Delta x)-f(x\pm h)}{\Delta x}\pm\delta,$$

und es ist von Bedeutung, dass zufolge der Voraussetzung im ganzen Intervall derselbe Werth von Δx ausreichend ist bei gegebenem Werthe von δ.

Demnach wird sich auch die Differenz $f_1(x\pm h)-f_1(x)$ von

$$\left[\frac{f(x\pm h+\Delta x)-f(x\pm h)}{\Delta x}-\frac{f(x\pm h+\Delta x)-f(x\pm h)}{\Delta x}\right]=0$$

um weniger als 2δ unterscheiden.

Mithin ist

$$\text{abs}\,[f_1(x\pm h)-f_1(x)]<2\delta,$$

d. h. der vorwärts genommene Differentialquotient ist in der Umgebung der Stelle x stetig.

Um nun auch den zweiten Theil der Behauptung zu beweisen, bezeichne man den rückwärts genommenen Differentialquotienten an der Stelle x mit $f_2(x)$, so ist er definirt durch die Gleichung:

$$f_2(x) = \frac{f(x - \Theta\Delta x) - f(x)}{-\Theta\Delta x} + \varepsilon, \tag{3}$$

wenn ε mit Θ nach Null convergirt. Setzt man aber nach Gleichung (1) in $f_1(x-h)$ für h den Werth $\Theta\Delta x$, so folgt:

$$f_1(x - \Theta\Delta x) = \frac{f(x) - f(x - \Theta\Delta x)}{\Theta\Delta x} \pm \delta. \tag{4}$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, dass der Quotient

$$\frac{f(x - \Theta\Delta x) - f(x)}{-\Theta\Delta x}$$

einem festen Grenzwerthe zustrebt, der gleich $f_1(x)$ ist, folglich ist, was zu beweisen war,

$$f_2(x) = f_1(x). \text{*)}$$

Der Satz von der Gleichheit der vor- und rückwärts genommenen Differentialquotienten bleibt auch an den Stellen richtig, an welchen $f_1(x)$ positiv oder negativ über alle Grenzen wächst; falls nur $f_1(x - \eta h)$ und $f_1(x + \eta h)$ für $\eta = 0$ in demselben Sinne unendlich gross werden. Denn wachsen die Quotienten

$$\frac{f(x - \eta h + \Theta\Delta x) - f(x - \eta h)}{\Theta\Delta x}, \quad \frac{f(x + \eta h + \Theta\Delta x) - f(x + \eta h)}{\Theta\Delta x},$$

wie auch η und Θ nach Null convergiren, beide im nämlichen Sinne über jeden Betrag, so werden auch, wenn man in dem ersten Quotienten $\eta h = \Theta\Delta x$, im zweiten $\eta = 0$ setzt,

$$\frac{f(x) - f(x - \Theta\Delta x)}{\Theta\Delta x} \text{ und } \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

in demselben Sinne bestimmt unendlich. Der rückwärts genommene Differentialquotient an der Stelle x ist also mit dem vorwärts genommenen identisch.

Die Function, welche den vor- und rückwärts genommenen Differentialquotienten von $f(x)$ darstellt, nennt man nach Lagrange (1736—1813) die erste Derivirte oder nach Crelle die erste Ableitung von f und bezeichnet sie häufig mit $f'(x)$.

Es sind also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

*) Dass aus der Stetigkeit des vorwärts genommenen Differentialquotienten zusammen mit der von $f(x)$ ohne weitere Voraussetzung die Identität von $f_2(x)$ und $f_1(x)$ gefolgert werden kann, siehe Integralrechnung § 92.

nur verschiedene Bezeichnungen für eine Grösse, die zu berechnen ist aus der Form:

$$\text{Lim}\,\frac{f(x \pm \Delta x) - f(x)}{\pm \Delta x} \text{ für } \Delta x = 0\,.$$

22. Der Differentialquotient hat, wie schon oben angedeutet wurde, gleichwie der Differenzenquotient, eine einfache geometrische Bedeutung. Wenn nämlich der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, während Δx immer kleiner wird, einem bestimmten Grenzwerthe zustrebt und sich also (Fig. 2, S. 34) die Gerade PP_1 einer festen Grenzlage nähert, so heisst diese Grenzlinie die Tangente des durch die Function dargestellten Gebildes. Man muss dieses als die Definition der Tangente an eine durch eine Gleichung definirte continuirliche Punktreihe betrachten: Grenzlage der Secante gelegt durch zwei beliebig nahe Punkte. Demnach haben wir noch den Satz III, ableitbar aus II:

III. Der Differentialquotient ist gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels, den die berührende Gerade (Tangente) im Punkte P der Curve mit der Abscissenaxe bildet; er misst die Neigung der Curve in diesem Punkte zur Abscissenaxe.

Es wird die Bemerkung nicht überflüssig sein, dass eine continuirliche Punktreihe, welche wir Curve nennen, in zweierlei Weisen definirt werden kann. Entweder geometrisch durch einen Bewegungsmechanismus (wie der Kreis durch Drehung einer festen Strecke) oder analytisch durch eine Functionalgleichung zwischen den Coordinaten. In beiden Fällen muss ein Existenzbeweis für die Tangente erbracht werden, und erst wenn dieser geführt ist, soll streng genommen das Gebilde eine Curve heissen. Bei der geometrischen Definition liefert die Kinematik den Existenzbeweis, bei der analytischen ist der Nachweis in der Differentiirbarkeit der Function enthalten.

23. Mit Berechnung des Differentialquotienten ist die Aufgabe gelöst, die Tangente in jedem Punkte jedweder Curve, deren Gleichung gegeben ist, zu construiren. Dieses Problem gab die Veranlassung zur Ausbildung der Differentialrechnung, deren Grundlagen in den auch heute noch gebräuchlichen Bezeichnungen zuerst Leibnitz (1646—1716) im Jahre 1684 veröffentlicht hat in einem Aufsatze von wenigen Seiten: „Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus“, erschienen in der Zeitschrift: Acta Eruditorum zu Leipzig. Unabhängig von ihm hatte schon Newton*) bei der Bearbeitung mechanischer

*) Die Inschrift auf dem Grabmale Newton's in der Westminsterabtei zu London lautet: H. S. E. ISAACUS NEWTONUS, EQUES AURATUS, QUI ANIMI VI PROPE DIVINA PLANETARUM MOTUS FIGURAS, COMETARUM SEMI-

Probleme durch Jahre hindurch dieselbe Rechnungsweise ausgebildet, die er seit Anfang der siebziger Jahre in seinen Briefen wiederholt erwähnt und angedeutet hat, bis er sie schliesslich 1687 in seinem Hauptwerke: „Philosophiae naturalis principia mathematica" als das unentbehrlichste Hülfsmittel zur Erforschung messbarer continuirlicher Erscheinungen bekannt gab*). Newton führte dabei den Begriff der Veränderlichen ein, indem er die unabhängige Variabele als Maasszahl der Zeit sich dachte. Für die Rechnung mit stetig veränderlichen Grössen stellt er gleich anfangs den Satz auf: „Grössen welche in einer gegebenen Zeit sich beständig der Gleichheit nähern und einander vor dem Ende jener Zeit näher kommen können, als jede gegebene Grösse, werden endlich einander gleich"; was nur eine Einkleidung des Fundamentalsatzes § 5 ist. Interpretirt man die abhängige Veränderliche als Maasszahl einer Strecke, welche ein beweglicher Punkt durchläuft, so giebt der Differenzenquotient die mittlere Geschwindigkeit an, mit welcher eine endliche Strecke durchlaufen ist, während der Differentialquotient die Geschwindigkeit an jeder Stelle misst.

24. Geometrische Zusätze und Erläuterungen.

a) Wenn der Differentialquotient für einen endlichen Werth von x und y in bestimmter Weise unendlich ist, so ist die Tangente der Curve an dieser Stelle der Ordinatenaxe parallel.

b) An Stellen, wo die vor- und rückwärts genommenen Differentialquotienten verschieden sind, ändert sich die Richtung der Tangente discontinuirlich; die Curve bildet eine Ecke.

c) An Stellen, wo die Function einen Sprung erleidet, kann sie, falls sie sich nach einer Seite continuirlich fortsetzt, auch nach dieser Seite einen Differentialquotienten besitzen.

**) d) *An Stellen, wo die Functionswerthe bei continuirlichem Wachsthum unendlich gross geworden sind, muss auch der Differential-*

TAS, OCEANIQUE AESTUS, SUA MATHESI FACEM PRAEFERENTE, PRIMUS DEMONSTRAVIT. RADIORUM LUCIS DISSIMILITUDINES, COLORUMQUE INDE NASCENTIUM PROPRIETATES, QUAS NEMO ANTE VEL SUSPICATUS ERAT, PERVESTIGAVIT. NATURAE, ANTIQUITATIS, S. SCRIPTURAE SEDULUS, SAGAX, FIDUS INTERPRES DEI O. M. MAIESTATEM PHILOSOPHIA APERUIT, EVANGELII SIMPLICITATEM MORIBUS EXPRESSIT. SIBI GRATULENTUR MORTALES TALE TANTUMQUE EXTITISSE HUMANI GENERIS DECUS.

Natus XXV. Decemb. A. D. MDCXLII; obiit Martii XX MDCCXXVI (nach jetziger Jahreszählung 1727).

*) Nach seinem Tode erschien erst 1736 die Schrift: „Methodus fluxionum et serierum infinitarum, cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam".

**) Dieser Satz kommt im 10. Capitel zur Anwendung und kann zunächst beim ersten Studium übergangen werden.

quotient, wenn ein solcher vorhanden, unendlich gross sein, falls nicht die unabhängige Variabele ebenfalls unendlich gross wird. Es ist dies der Fundamentalsatz für die Theorie der Asymptoten, daher ich auf seinen Beweis besonders eingehe.

Erstlich: für $x = a$ werde $f(a) = \infty$, d. h. $f(a - \delta)$ bilde für abnehmende Werthe von δ eine Reihe, deren Glieder von einer Stelle ab stets dasselbe Zeichen haben, und grösser sind als eine beliebig grosse Zahl. Damit der Differentialquotient ein bestimmter werden könne, setzen wir überdies voraus, dass von einer Stelle ab die Glieder nur wachsen. Alsdann wird bei jedem Werthe von δ der Differenzenquotient $\frac{f(a+h-\delta)-f(a-\delta)}{h}$ grösser werden als eine beliebig grosse Zahl, indem man h dem δ beliebig nahe bringt, weil dadurch $f(a+h-\delta)$ stets mit gleichem Zeichen grösser als jede vorgegebene Zahl gemacht werden kann. Lässt man nun δ und mit ihm h nach Null convergiren, so wird auch dieser Grenzwerth — Differentialquotient an der Stelle a — über jeden Betrag hinaus wachsen.

Werden aber zweitens $f(x)$ und x gleichzeitig in bestimmter Weise unendlich gross, so besteht der Satz*), dass für jeden endlichen Werth von h

$$\text{Lim}\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \text{Lim}\,\frac{f(x)}{x} \quad \text{für } x = \infty$$

falls überhaupt ein bestimmter endlicher Grenzwerth für den ersten Quotienten bei irgend einem bestimmten Werthe von h vorhanden ist; dabei nehmen wir für den folgenden Beweis an, dass $h > 0$ ist, und dass $f(x)$ in bestimmter Weise positiv unendlich wird, so zwar, dass von einer Stelle ab die Werthe von $f(x)$ stets wachsen. Sei der Grenzwerth der linken Seite gleich K, so ist

$$K - \varepsilon < \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < K + \varepsilon,$$

wobei ε eine Grösse bedeutet, deren Betrag durch Wahl einer unteren Grenze für x $(x > g)$ beliebig klein gemacht werden kann; oder:

$$Kh - \varepsilon h < f(x+h) - f(x) < Kh + \varepsilon h.$$

Substituirt man für x die Werthe: $x,\ x+h,\ x+2h, \ldots x+(n-1)h$ und addirt die entstehenden Gleichungen, so kommt:

$$nKh - n\varepsilon h < f(x+nh) - f(x) < nKh + n\varepsilon h$$

oder der absolute Betrag von

$$[f(x+nh) - K(x+nh)] - [f(x) - Kx] \leq n\varepsilon h.$$

Um das Argument der Function in allgemeinster Weise unendlich werden zu lassen, setze man:

$$x = x_0 + ph, \text{ wobei } 0 < x_0 < h, \ p \text{ eine ganze positive Zahl.}$$

*) Cauchy, Cours d'Analyse algébr. Cap. 2. Der Satz ist erweitert worden von Stolz: Ueber die Grenzwerthe der Quotienten. Math. Annalen Bd. XIV.

Ferner sei $n + p = r$, so wird, wenn wir die Ungleichung durch $x_0 + rh$ dividiren und beachten, dass $\frac{nh}{x_0 + rh} < 1$ ist:

$$\left[\frac{f(x_0 + rh)}{x_0 + rh} - K\right] - \frac{f(x_0 + ph) - K(x_0 + ph)}{x_0 + rh} < \varepsilon.$$

Der Betrag des zweiten Quotienten der linken Seite kann, welchen Werth auch x_0 zwischen Null und h haben mag, durch Wahl einer unteren Grenze für r kleiner gemacht werden als eine beliebig kleine Grösse δ, denn es ist

$$\begin{gathered} f(ph) < f(x_0 + ph) < f(h + ph), \\ ph < \quad x_0 + ph < \quad h + ph, \end{gathered}$$

also ist:

$$f(ph) - K(h + ph) < f(x_0 + ph) - K(x_0 + ph) < f(h + ph) - Kph.$$

Bezeichnet man also mit P den grösseren der absoluten Beträge der äusseren Glieder dieser Ungleichung, so hat man r so zu wählen, dass

$$\frac{P}{rh} < \delta$$

wird, dann ist auch sicherlich der Betrag von

$$\frac{f(x_0 + ph) - K(x_0 + ph)}{x_0 + rh}$$

kleiner als δ, also:

$$\text{abs}\left[\frac{f(x_0 + rh)}{x_0 + rh} - K\right] < \varepsilon + \delta.$$

Da ε durch Wahl von p, δ durch Wahl von r beliebig klein werden, so ist:

$$\text{Lim}\,\frac{f(x)}{x} = K \quad (\text{für } x = \infty).$$

Der Werth von K ist also von h ganz unabhängig.

Leitet man demnach den Differentialquotienten an der Stelle $x = \infty$ durch stetigen Uebergang aus dem Differenzenquotienten her, indem man

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

zuerst für $x = \infty$, sodann für $h = 0$ bestimmt, so ist sein Werth ebenfalls gleich K. Lässt man aber in diesem Ausdrucke zuerst $h = 0$ sodann $x = \infty$ werden, bildet man also den Werth: Lim $f'(x)$ für $x = \infty$ — unter $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$ verstanden, vor- und rückwärts genommen identisch — so kann, vorausgesetzt, dass sich für diesen Limes ein bestimmter Werth durch stetigen Uebergang

überhaupt ergiebt*), dieser Werth von dem vorigen nicht verschieden sein; denn es wird später (§ 37) bewiesen werden, dass unter dieser Annahme für jeden endlichen Werth von x die Gleichung besteht:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\Theta h)$$

wobei Θ eine Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet. Hat nun $f'(x)$ für $x=\infty$ einen bestimmten Grenzwerth H, so heisst das, es lässt sich eine untere Grenze für x ausfindig machen, so dass für alle Werthe oberhalb dieser Grenze $f'(x)=H\pm\delta$, wobei δ eine beliebig kleine Zahl ist. Desgleichen ist $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=K\pm\varepsilon$, und ε durch Wahl von x beliebig klein. Es wird also jederzeit ein x angegeben werden können, so dass

$$K\pm\varepsilon=H\pm(<\delta).$$

Lässt man x beliebig wachsen, so muss $K=H$ werden.

Mithin ist bewiesen: Wenn eine stetige Function $f(x)$ von einer Stelle ab continuirlich wächst und für $x=\infty$ ebenfalls ∞ wird, so ist falls:

$$\text{Lim}\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

für irgend einen Werth von h gleich K wird, dieser Werth K gleich Lim $\frac{f(x)}{x}$; er stellt den Differentialquotienten für $x=\infty$ dar und wird auch gleich Lim $f'(x)$, vorausgesetzt, dass auch $f'(x)$ eine stetige Function von x ist.

Es kann aber auch der Werth von K in bestimmter Weise unendlich gross werden, dann wird auch Lim $\frac{f(x)}{x}$ in bestimmter Weise unendlich. Denn nun ist durch Wahl einer untern Grenze für x, wenn man mit K eine beliebig grosse Zahl bezeichnet:

$$f(x+h)-f(x)>Kh,$$

folglich, wie vorhin:

$$\frac{f(x_0+rh)}{x_0+rh}>K+\frac{f(x_0+ph)-K(x_0+ph)}{x_0+rh}.$$

---

*) Die Function $f(x)=x+\frac{1}{x}\sin(x^2)$ wird für $x=\infty$ in bestimmter Weise unendlich. $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}\sin(x^2)+2\cos(x^2)$ wird für $x=\infty$ unbestimmt.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h+\frac{1}{x+h}\sin(x+h)^2-\frac{1}{x}(\sin x^2)}{h}$$

wird für $x=\infty$ bestimmt gleich 1. Dieser Werth ist auch als der Werth des Differentialquotienten der Function an der Stelle $x=\infty$ zu betrachten.

Der numerische Betrag der rechten Seite kann durch Wahl von r beliebig vergrössert werden, denn zu jedem noch so grossem vorgegebenen Werthe K lässt sich der Betrag des zweiten Quotienten vermöge r beliebig klein machen; also wird auch

$$\frac{f(x_0 + rh)}{x_0 + rh}$$

von einer Stelle ab stets grösser sein als eine gegebene Grösse, d. h.

$$\operatorname{Lim} \frac{f(x)}{x} = \infty \text{ für } x = \infty.$$

Beispiel:

(1) $f(x) = \lg(x)$. $\operatorname{Lim} \frac{\lg(x+h) - \lg(x)}{h} = \frac{1}{h} \operatorname{Lim} \lg(1 + \frac{h}{x}) = 0,$

$$\text{für } x = +\infty,$$

also ist auch $\operatorname{Lim} \frac{\lg(x)}{x} = 0$. Im nächsten Capitel wird gezeigt werden, dass die Ableitung des Logarithmus gleich $\frac{1}{x}$ ist, so dass in der That auch $\operatorname{Lim} f'(x) = 0$ ist.

(2) $f(x) = a^x$. $\operatorname{Lim} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^h - 1}{h} \operatorname{Lim} a^x = \infty \quad (a > 0)$

$$\text{für } x = +\infty.$$

$$\operatorname{Lim} \frac{a^x}{x} = \infty \text{ für } x = +\infty.$$

e) Hat $f(x)$ für $x = \infty$ einen endlichen bestimmten Werth, so wird: $\operatorname{Lim} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]_{x=\infty} = 0$ bei jedem endlichen Werthe von h. Dieser Werth ist auch als Werth des Differentialquotienten an der Stelle $x = \infty$ zu betrachten; er stimmt mit dem Werthe $\operatorname{Lim} [f'(x)]$ überein, falls $f'(x)$ überhaupt durch continuirliche Aenderung einen für $x = \infty$ bestimmten Grenzwerth bei beliebig wachsendem x annimmt.

f) Der Differentialquotient kann unbestimmt werden an allen Stellen einer stetigen Function, wenn z. B. die Differenz $f(x + \Delta x) - f(x)$ überall in beliebig kleinem Intervalle Δx Zeichenwechsel erleidet ohne dass der Betrag des Differenzenquotienten $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ nach Null convergirt; es ist dies ein Fall, wo die Function auf Grund der Formel, nach welcher sie berechnet werden soll, unter dem Bilde einer Curve nicht fixirbar ist, weil die Einschaltung von immer mehr Punkten zwar die Polygonecken schliesslich unmessbar, dagegen die Polygonseiten messbar verschiebt.

g) Bei unseren Vorstellungen über die Bewegungsvorgänge in der Natur werden keine Unstetigkeiten vorausgesetzt, weder in Bezug auf die Orte, die der bewegte Körper annimmt, noch in Bezug auf die

Richtung und Grösse seiner Bewegung. In gewissen Erscheinungen (unter dem Einflusse von Stössen) vollziehen sich aber die Aenderungen so rasch, dass wir den Vorgang wie einen discontinuirlichen auffassen.

Die Stetigkeit der Function ist in präciser Weise zuerst von Cauchy (1789—1857) (Analyse algébr. 1821) definirt worden, dem man überhaupt die Begründung der Differentialrechnung in der Form, wie dieselbe im Vorstehenden entwickelt ist, zu verdanken hat. Durch Riemann ist man auf stetige Functionen aufmerksam geworden, die innerhalb eines beliebig kleinen Intervalles unendlich viele Stellen haben, an denen der vor- und der rückwärts genommene Differentialquotient unbestimmt werden. Das erste Beispiel einer stetigen Function, die in keinem Punkte einen bestimmten Werth des Differentialquotienten weder vor- noch rückwärts besitzt, hat Weierstrass gegeben (mitgetheilt in dem Aufsatze von Du Bois-Reymond Journ. f. Math. Bd. 79). Die Function erscheint hier als Grenze einer Reihe von Functionen, deren Werthe schliesslich beliebig wenig unterschieden sind, während für die Werthe der Differentialquotienten das gleiche nicht stattfindet; dieselben variiren vielmehr zwischen beliebig grossen positiven und beliebig grossen negativen Werthen.

Sechstes Capitel.

Die Berechnung des ersten Differentialquotienten der einfachsten Functionen. Allgemeine Regeln.

25. Ich werde zuvörderst die Functionen behandeln, welche in § 4 definirt wurden und die man als die elementaren Functionen bezeichnet.

I. Die algebraischen, deren einfachster Typus $y = x^m$, deren allgemeinster die implicite Function: $A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \cdots A_{n-1} y + A_n = 0$ ist, in welcher $A_0, A_1 \cdots A_n$ Polynome beliebigen Grades in x sind.

II. Die transscendenten und zwar:
 a) die Exponentialfunction $y = a^x$ und die goniometrischen: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{cotang} x$;
 b) der Logarithmus $y = {}^a\log x$ und die cyclometrischen: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctang} x$, $\operatorname{arccotg} x$.

Das nächste Ziel der Untersuchung ist: aus den Eigenschaften dieser Functionen zweckmässige Methoden ihrer Berechnung zu gewinnen; denn mit Ausnahme des Falles $y = x^m$, in welchem m eine positive oder negative ganze Zahl ist, wobei die Berechnung durch Ausführung einer m-maligen Multiplication geleistet wird, sind wir bisher auf das Verfahren der Einschliessung in Grenzen oder geometrische Betrachtungen angewiesen. Das umfassendste Problem wird

durch die implicite algebraische Function gestellt, deren Behandlung jedoch noch weitere allgemeine Betrachtungen vorangehen müssen.

26. Für die Bildung der ersten Differentialquotienten, und zwar bei positiven oder negativen Werthen von Δx, bedarf man folgender allgemeiner Regeln:

1) Der Differentialquotient einer Constanten ist gleich Null.

2) Der Differentialquotient einer Summe von Functionen ist gleich der Summe aus den Differentialquotienten der Summanden. Denn ist:

$$y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \cdots + f_n(x),$$

so wird:

$$y + \Delta y = f_1(x + \Delta x) + f_2(x + \Delta x) \cdots + f_n(x + \Delta x),$$

also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \frac{f_2(x) + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} \cdots + \frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x}.$$

Nach dem Satze I § 10 folgt also:

$$\frac{dy}{dx} = f_1'(x) + f_2'(x) \cdots + f_n'(x) \text{ w. z. b. w.}$$

Folgesatz: Zwei Functionen, die sich nur um eine additive Constante unterscheiden, besitzen dieselben Werthe des Differentialquotienten.

3) Ist y gleich dem Producte zweier Functionen:

$$y = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

so wird:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) \cdot \psi(x + \Delta x) - \varphi(x) \cdot \psi(x)}{\Delta x}.$$

Der Ausdruck rechts lässt sich für jeden endlichen Werth von Δx ersetzen durch

$$\varphi(x + \Delta x) \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} + \psi(x) \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Sind φ und ψ stetig und besitzen sie an der Stelle x bestimmte Werthe des Differentialquotienten, so wird, wenn Δx nach Null convergirt, nach Satz II § 10:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[\varphi(x) \cdot \psi(x)]}{dx} = \varphi(x)\, \psi'(x) + \psi(x)\, \varphi'(x).$$

Dieses Gesetz lässt sich auf eine beliebige bestimmte Anzahl von Factoren ausdehnen.

Folgesatz: Bedeutet a eine Constante, so ist, wenn $y = a f(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\, a f(x)}{dx} = a \cdot f'(x).$$

4) Ist $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, so ist an einer Stelle, wo $\psi(x)$ nicht gleich Null,

$$\Delta y = \frac{\varphi(x+\Delta x)}{\psi(x+\Delta x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\psi(x)\,\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\,\psi(x+\Delta x)}{\psi(x)\,\psi(x+\Delta x)}$$

oder:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\psi(x)\,\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} - \varphi(x)\,\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}\right) : \psi(x)\,\psi(x+\Delta x).$$

Nach Satz III § 10 wird demnach:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x)\cdot\varphi'(x) - \varphi(x)\cdot\psi'(x)}{(\psi(x))^2}.$$

Folgesatz: Ist $y = \frac{1}{\psi(x)}$ so ist: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\psi'(x)}{(\psi(x))^2}$.

5) Zusammengesetztere Functionen lassen sich zweckmässig in der Form auffassen: $y = f(u)$, wobei u selbst eine Function von x bedeutet (z. B. $y = (ax + b)^m$ ist aufzufassen unter der Form: $y = u^m$, wobei $u = ax + b$, oder $y = \sin(x^2)$ ist $y = \sin(u)$, wo $u = x^2$). Alsdann wird, wenn x um Δx vermehrt wird, sich zunächst u ändern; wir bezeichnen die Grösse der Aenderung mit Δu, so ist:

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u), \text{ also } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Ist u eine stetige Function von x, und f eine stetige Function von u, so convergirt, wenn Δx Null wird, auch Δu nach Null (§ 19d). Der Grenzwerth des ersten Factors rechts ist, wie seine Form zeigt, nichts anderes als die erste Ableitung der Function f gebildet nach u als der unabhängigen Variabelen, der zweite ist der Differentialquotient von u nach x. Folglich ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d f(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

27. Die expliciten rationalen algebraischen Functionen.

1) $y = x^m$.

α) m eine ganze positive Zahl. $-\infty < x < +\infty$.

Für $x = \pm\infty$ wird auch der Functionswerth seinem absoluten Betrage nach unendlich gross; für jeden endlichen Werth von x ist die Function stetig und besitzt einen endlichen Werth des Differentialquotienten; denn es ist, wie durch Ausmultipliciren gefunden wird:

$$\frac{(x \pm \Delta x)^m - x^m}{\pm \Delta x} = \frac{\pm m x^{m-1} \Delta x + C_2 (\pm \Delta x)^2 + C_3 (\pm \Delta x)^3 \cdots + C_m (\pm \Delta x)^m}{\pm \Delta x}.$$

Die Coefficienten C sind endlich, von x und m, nicht von Δx abhängig; auf ihre nähere Bestimmung kommt es hier nicht an.

$$\text{Lim}\,\frac{(x\pm\Delta x)^m - x^m}{\pm\Delta x} = m x^{m-1} + C_2\,\text{Lim}\,(\pm\Delta x) + C_3\,\text{Lim}\,(\pm\Delta x)^3 \cdots + C_m\,\text{Lim}\,(\pm\Delta x)^{m-1},$$

also für $\Delta x = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^m)}{dx} = m x^{m-1}$, insbesondere ist: $\frac{d(x)}{dx} = 1$. Als Differentialquotient an der Stelle $x = \infty$ ist der Werth $\text{Lim}(m x^{m-1})$ für $x = \infty$ zu betrachten.

β) m eine ganze negative Zahl. $-\infty < x < +\infty$.

$$y = x^m = \frac{1}{x^\mu} \quad (\mu = -m > 0).$$

Für $x = 0$ wird der absolute Betrag des Functionswerthes unendlich. Nach dem eben bewiesenen Satze 4) ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,\frac{1}{(x^\mu)}}{dx} = -\frac{\mu x^{\mu-1}}{x^{2\mu}} = -\frac{\mu}{x^{\mu+1}} = m x^{m-1}.$$

Der Differentialquotient wird an der Stelle $x = 0$ ebenfalls ∞, während für $x = \pm\infty$ die Function y und ihr Differentialquotient nach Null convergiren.

2) $y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} \cdots + a_{m-1} x + a_m = \mathsf{A}$, m ganzzahlig > 0. Für jeden endlichen Werth von x wird nach Satz 2) und 3):

$$\frac{dy}{dx} = m a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + \cdots a_{m-1} = \frac{d\mathsf{A}}{dx},$$

unabhängig zufolge Satz 1) von der additiven Constante a_m.

Ist $y = (ax+b)^m = u^m$, $u = ax + b$, so wird nach Satz 5) der Differentialquotient berechnet, ohne dass das Binom ausgeführt zu werden braucht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = m u^{m-1} a = m a (ax+b)^{m-1}.$$

3) Die gebrochene rationale Function:

$$y = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots b_{n-1} x + b_n} = \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}$$

m und n ganzzahlig > 0. Für jedes endliche x, an einer Stelle wo B nicht gleich 0 ist, wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathsf{B}\frac{d\mathsf{A}}{dx} - \mathsf{A}\frac{d\mathsf{B}}{dx}}{\mathsf{B}^2}.$$

Anwendung der Differentiation zur Ableitung des binomischen Satzes für ganze positive Exponenten:

Setzt man:

$$(1)\qquad (1+x)^m = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots C_m x^m$$

und sucht die C dieser Gleichung zu bestimmen, so erhält man durch Differentiation:

(2) $$m(1+x)^{m-1} = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \cdots mC_m x^{m-1}.$$

Multiplicirt man beiderseits mit $1 + x$ und ordnet nach Potenzen von x, so kommt:

(3) $$m(1+x)^m = C_1 + x(2C_2 + C_1) + x^2(3C_3 + 2C_2) + \cdots$$
$$+ x^{m-1}(mC_m + (m-1)C_{m-1}) + x^m mC_m.$$

Vergleicht man die rechten Seiten der Gleichung (1) und (3) so folgt:

$$m = C_1,\ mC_1 = 2C_2 + C_1,\ mC_2 = 3C_3 + 2C_2 \ldots$$
$$\ldots mC_{m-1} = mC_m + (m-1)C_{m-1},$$

oder:

$$C_1 = m,\ C_2 = \frac{m(m-1)}{2},\ C_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} \ldots$$

$$\ldots C_k = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{k!} = m_k$$

($k! = 1.2.3 \ldots k$, in Worten: k-Facultät).

28. Die Exponentialfunction.

1) $$y = a^x. \quad (a > 0,\ -\infty < x < +\infty).$$

Ist $a > 1$, so wird die Function für $x = +\infty$ selbst positiv unendlich gross, für $x = -\infty$ dagegen 0; ist $a < 1$ so ist y für $x = +\infty$ gleich 0, für $x = -\infty$ positiv unendlich gross. Für alle Werthe von x hat y einen positiven Werth und besitzt einen Differentialquotienten. Es ist:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{Lim}\frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \operatorname{Lim}\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \quad (\Delta x \gtrless 0)$$

und es ist zu zeigen, dass sich der Factor von a^x einem bestimmten endlichen Grenzwerth nähert, wenn Δx nach Null convergirt. Die Bedingung, dass Zähler und Nenner die Null zur Grenze haben, ist erfüllt. Man setze, um die Rechnung bequemer zu führen:

$$a^{\Delta x} - 1 = \delta,\ \Delta x = {}^a\log(1+\delta),\ \text{so ist}\ \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{\delta}{{}^a\log(1+\delta)} =$$

$$= \frac{1}{{}^a\log\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]};$$

δ ist positiv beliebig klein, wenn entweder $a > 1$ und $\Delta x > 0$ oder $a < 1$ und $\Delta x < 0$, dagegen in den andern Fällen negativ beliebig klein. Der Ausdruck wird für $\frac{1}{\delta} = m$ gleich

$$\frac{1}{{}^a\log\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]}.$$

Nun muss gezeigt werden, dass $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ einen bestimmten endlichen Grenzwerth erhält, wenn m die continuirliche oder auch jede discontinuirliche Zahlenreihe durchläuft, deren Grenzwerth über jeden Betrag hinausgeht. Die Untersuchung ist so zu führen, dass dabei zugleich eine zweckmässige Methode zur Berechnung dieses Werthes gewonnen wird.

Lassen wir m zuerst die Reihe der ganzen positiven Zahlen durchlaufen, so ist stets nach dem eben bewiesenen Binomialsatze:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \cdots + R$$
$$= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{1}{3!} + \cdots + R$$
$$= \Sigma_n + R.$$

Wir verstehen dabei unter Σ_n die Summe der n ersten, unter R die Summe der letzten Glieder vom $(n+1)$ten an gerechnet, so dass also:

$$R = \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{1}{n!}\cdot S$$

wird, und S $(m+1-n)$ Glieder umfasst,

$$S = 1 + \left(1-\frac{n}{m}\right)\frac{1}{n+1} + \left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$
$$+ \left(1-\frac{n}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{1}{(n+1)\cdots m}.$$

Ist m eine beträchtlich grosse Zahl, so kann man sich dem Werthe von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ beliebig annähern, wenn man blos die n ersten Glieder der Reihe summirt, wobei diese Anzahl n viel kleiner sein darf als m.

Denn weil in den Ausdrücken für R und S die Differenzen $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$ u. s. f. positive echte Brüche sind, so ist der Rest R sicher kleiner als der Werth, welchen man erhält, wenn man statt dieser Differenzen überall 1 setzt; und um so mehr ist

$$R < \frac{1}{n!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{m-n}}\right] =$$
$$= \frac{1}{n!}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^{m+1-n}}{1-\frac{1}{n+1}};$$

um so mehr noch:

$$R < \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Also ist für jedes positive ganzzahlige m:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \Sigma_n + \left(<\frac{1}{n!}\frac{n+1}{n}\right), \quad (n < m+1).$$

Halten wir nun den Werth von n fest, und lassen die Zahl m immer mehr wachsen, so werden sich die Brüche $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \cdots \frac{n-2}{m}$, welche in Σ_n vorkommen, immer mehr der Null nähern, d. h. Σ_n nähert sich dem Grenzwerthe:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n-1!}.$$

Der Fehler, welcher begangen wird, wenn der Werth von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ für $m=\infty$ dieser Summe gleich gesetzt wird, ist positiv und kleiner als $\frac{1}{n!}\cdot\frac{n+1}{n}$, wird also durch Wahl des n beliebig klein. Daher erhält man, für ein beliebig grosses m:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\cdots \text{in inf.*)}$$

d. h. je mehr Glieder dieser Summe man addirt, um so mehr nähert man sich einem bestimmten Werthe, der mit e bezeichnet wird; man findet $e = 2{,}718\,281\,8\cdots$

Die Zahl e ist irrational, d. h. sie wird weder durch einen Decimalbruch mit endlicher Stellenzahl, noch durch einen periodischen Decimalbruch vollständig dargestellt. Der Beweis dafür ist einfach: Wäre $e=\frac{a}{b}$, wo a und b ganze Zahlen sind, so fände man durch Multiplication der Reihe mit $b!$:

$$a\,(b-1)! = 2b! + \frac{b!}{2!}+\frac{b!}{3!}+\cdots 1 + \frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)\,(b+2)}+\cdots$$

oder, wenn alle ganzzahligen Werthe der rechten Seite auf die linke gebracht werden, und dann die ganze Zahl der linken Seite mit G bezeichnet wird:

$$G = \frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)\,(b+2)}+\cdots < \frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)^2}+\cdots$$

Diese Gleichung ist unmöglich, denn der Werth der rechten Seite ist kleiner als $\frac{1}{b}$, also ein echter Bruch**).

Ist m keine ganze Zahl, sondern liegt sein Werth zwischen den Zahlen n und $n+1$ eingeschlossen:

---

*) Euler: Introductio in analysin infinit. I §. 115.

**) Hermite hat bewiesen, dass die Zahl e auch nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung von beliebig hohem Grade mit rationalen Coefficienten sein kann. Sur la fonction exponentielle. Paris 1874.

$$n + \alpha = m = n + 1 - \beta,$$

so ist

$$1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{m} > 1 + \frac{1}{n+1},$$

also

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^m,$$

oder

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^\beta.$$

Es convergirt aber $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ebenso wie $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ nach dem Werthe e, während $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha$ und $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^\beta$ bei beliebig wachsendem n die 1 zur Grenze haben; die obere und untere Grenze nähern sich dem Werthe e, also ist auch für dieses m

$$\text{Lim}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Endlich wenn m negativ ist, so setze man $m = -\mu$; es ist

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu}{\mu - 1}\right)^\mu = \left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right)^\mu =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right)^{\mu - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right).$$

Also:

$$\text{Lim}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \text{Lim}\left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right)^{\mu - 1} \cdot \text{Lim}\left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right) = e \,.\, 1.$$

Mithin wird, wie auch Δx nach Null convergiren mag:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \text{Lim}\,\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \text{Lim}\,\frac{1}{{}^a\!\log\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]} =$$
$$= a^x \cdot \frac{1}{{}^a\!\log e} = a^x \; {}^e\!\log a.$$

Daraus erkennt man, dass die Exponentialfunction, deren Basis e selbst ist, die Eigenschaft hat, sich bei der Differentiation unverändert zu reproduciren; es ist

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x, \text{ weil } {}^e\!\log e = 1.$$

Die Irrationalzahl e heisst die Basis des natürlichen Logarithmensystems; der Logarithmus in Bezug auf diese Basis wird kurz mit l bezeichnet.

29. Die goniometrischen Functionen.

$$\alpha)\; y = \sin x. \qquad \beta)\; y = \cos x.$$

Wiewohl wir diese Functionen bisher nur geometrisch definirt haben für alle endlichen Werthe von x, so lässt sich doch ihr Differentialquotient vermittelst der im §. 12 mitgetheilten Sätze angeben.

ad α) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{Lim} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \operatorname{Lim} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

ad β) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{Lim} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \operatorname{Lim} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x.$$

γ) $y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \frac{d \sin x}{dx} - \sin x \frac{d \cos x}{dx}}{\cos x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x^2}.$$

δ) $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \frac{d \cos x}{dx} - \cos x \frac{d \sin x}{dx}}{\sin x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin x^2}.$$

Alle diese vier Functionen sind nebst ihren Differentialquotienten für unendliche Werthe von x völlig unbestimmt. An allen Stellen, wo die letzten beiden Functionen unendlich werden, werden auch die Differentialquotienten unendlich.

30. Die inversen Functionen: der Logarithmus und die cyclometrischen.

Allgemeine Regel: Ist $x = f(y)$ und $\frac{dx}{dy} = f'(y)$ berechnet, so folgt, wenn $y = \varphi(x)$ die inverse Function (§. 13) darstellt, dass $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) = \frac{1}{f'(y)}$. Denn es ist: $\frac{dy}{dx} = \operatorname{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{Lim}\left(1 : \frac{\Delta x}{\Delta y}\right)$. Man berechnet also $\varphi'(x)$ für irgend einen Werth von x, indem man in den Ausdruck $\frac{1}{f'(y)}$ den entsprechenden Werth von y substituirt; besonders zu beachten sind die Stellen, an denen $f'(y) = 0$ wird.

1. $y = {}^a\log x$. Inverse Function: $x = a^y$. $(a > 0.)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y la} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{la} = \frac{1}{x}\, {}^a\log e.$$

2. α) $y = \arcsin x$. Inverse Function: $x = \sin y$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Quadratwurzel ist positiv, weil nach der Festsetzung (§. 13) $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$, also $\cos y \geqq 0$.

β) $y = \arccos x$. Inverse Function: $x = \cos y$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Quadratwurzel ist positiv, weil $0 \leqq y \leqq \pi$, also $\sin y \geqq 0$.

γ) $y = \operatorname{arctang} x$. Inverse Function: $x = \operatorname{tang} y$.

$$\frac{dy}{dx} = \cos y^2 = \frac{1}{1+x^2}.$$

δ) $y = \operatorname{arccotg} x$. Inverse Function: $x = \operatorname{cotang} y$.

$$\frac{dy}{dx} = -\sin y^2 = -\frac{1}{1+x^2}.$$

In den beiden ersten Functionen bilden die Werthe ± 1, an denen die Definition der Functionen aufhört, besondere Stellen; in den beiden letzten läuft x von $-\infty$ bis $+\infty$ und die Functionen sind wie ihre Differentialquotienten auch an diesen Grenzen endlich.

Logarithmus und cyclometrische Function sind transscendent; ihre Differentialquotienten aber sind algebraisch.

31. Wir können endlich auch die explicite irrationale Function: $y = x^m$, in welcher m eine beliebige reelle Zahl bedeutet, x aber positiv ist, und die Wurzel stets positiv genommen wird, differentiiren. Denn es ist, wenn auf beiden Seiten der Gleichung $y = x^m$ der natürliche Logarithmus genommen wird:

$$l(y) = m\, l(x).$$

Differentiirt man diese Gleichung und beachtet dabei, dass auf der linken Seite y eine Function von x ist, so folgt nach der Regel 5) § 26:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{m}{x}, \text{ also: } \frac{dy}{dx} = \frac{m}{x} y = m x^{m-1}.$$

Mithin gilt für jeden Werth von m die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^m)}{dx} = m \cdot x^{m-1}. \quad (y > 0.)$$

Bemerkenswerth ist, dass falls $0 < m < 1$ die Function an der Stelle $x = 0$ endlich, an der Stelle $x = +\infty$ unendlich gross wird, während ihr Differentialquotient an der ersten Stelle unendlich gross, an der zweiten endlich gleich Null wird. Die implicite algebraische Function siehe Capitel 10.

Bei allen in diesem Capitel behandelten Functionen ist es gleichgiltig ob Δx positiv oder negativ gewählt wird; d. h. alle diese Functionen haben an jeder Stelle gleiche Werthe des vor- und rückwärts genommenen Differentialquotienten; jede besitzt eine abgeleitete Function.

Siebentes Capitel.

Die höheren Differentialquotienten der expliciten Functionen. Unendlich kleine Grössen verschiedener Ordnung.

32. Die erste Ableitung einer Function oder der erste Differentialquotient ist, wie die Rechnungen des vorigen Capitels zeigen, selbst wieder eine Function der Variabelen. Für die lineare Function $y = ax + b$ ist der vor- und rückwärts genommene Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = a$ constant, und diese ist die einzige stetige Function mit constantem Differentialquotienten, wie in der Integralrechnung Capitel 1 bewiesen werden soll. Demnach lassen sich von jeder neuen abgeleiteten Function unter den gleichen Voraussetzungen und nach den nämlichen Regeln weitere Ableitungen bilden, deren Berechnung sich jedesmal aus der vorhergehenden ergiebt. Bezeichnet $y = f(x)$ die ursprüngliche Function, ferner

$$\frac{dy}{dx} = \text{Lim}\,\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

eindeutig und bestimmt für jedes x ihre erste Ableitung, so erhält man, falls $f'(x)$ stetig ist und $\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$ einem bestimmten Grenzwerth sich nähert:

die zweite Ableitung: $f''(x) = \text{Lim}\,\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$,

die dritte Ableitung: $f'''(x) = \text{Lim}\,\frac{f''(x+\Delta x) - f''(x)}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$ u. s. f.

Es sind aber die höheren Ableitungen, ebenso wie die erste, unmittelbar vermittelst der ursprünglichen Function definirbar. Denn es wird für $\Delta x \gtrless 0$:

$$f'(x) = \text{Lim}\,\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

$$f'(x+h) = \text{Lim}\,\frac{f(x+h+\Delta x) - f(x+h)}{\Delta x},$$

also $f''(x) = \text{Lim}_{h=0}\,\text{Lim}_{\Delta x=0}\,\frac{f(x+h+\Delta x) - f(x+h) - f(x+\Delta x) + f(x)}{h\,\Delta x}$.

Diese zweifache Grenzbestimmung lässt sich noch einfacher vollziehen. Im nächsten Capitel (§ 37) wird bewiesen werden, dass der Differenzenquotient einer stetigen Function $\varphi(x)$

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

stets gleich gesetzt werden kann dem Werthe der Ableitung gebildet für eine Stelle $x + \Theta\,\Delta x$ im Innern des Intervalles von x bis $x + \Delta x$, (es bedeutet Θ eine Zahl zwischen 0 und 1), vorausgesetzt, dass für

das ganze Intervall eine Ableitung (vor- und rückwärts genommen identisch) existirt. Da dieses bei der stetigen Function

$$\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$$

zutrifft, so kann man setzen:

$$\frac{f(x+h+\Delta x) - f(x+\Delta x) - f(x+h) + f(x)}{\Delta x} = f'(x+h+\Theta\Delta x) - f'(x+\Theta\Delta x),$$

also

$$\frac{f(x+h+\Delta x) - f(x+\Delta x) - f(x+h) + f(x)}{h\Delta x} = \frac{f'(x+h+\Theta\Delta x) - f'(x+\Theta\Delta x)}{h}.$$

Lässt man zuerst Δx, sodann h nach Null convergiren, so erhält man den Werth $f''(x)$. Es soll nun gezeigt werden, dass es immer gestattet ist, in dem Quotienten der linken Seite $h = \Delta x$ anzunehmen, und so gleichzeitig h mit Δx verschwinden zu lassen. Aus der Substitution $h = \Delta x$ folgt:

$$\frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} = \frac{f'(x+\Delta x+\Theta\Delta x) - f'(x+\Theta\Delta x)}{\Delta x}.$$

Man gebe der rechten Seite die Form:

$$\frac{f'(x+\Delta x+\Theta\Delta x) - f'(x)}{\Delta x(1+\Theta)} \cdot (1+\Theta) - \frac{f'(x+\Theta\Delta x) - f'(x)}{\Theta\Delta x} \cdot \Theta.$$

Man kann nun Δx so klein wählen, dass sich

$$\frac{f'(x+\Delta x(1+\Theta)) - f'(x)}{\Delta x(1+\Theta)} \quad \text{und} \quad \frac{f'(x+\Theta\Delta x) - f'(x)}{\Theta\Delta x}$$

von dem Werthe $f''(x)$ um weniger als die beliebig kleine Grösse δ unterscheiden.

Demnach wird:

$$\frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} = f''(x) + (< 2\delta\Theta)$$

also die neue Definition:

$$f''(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2}.$$

Desgleichen erhält man, falls $f''(x)$ vor- und rückwärts genommen gleich bleibt und eine bestimmte Ableitung $f'''(x)$ besitzt, für $f'''(x)$ die Definition vermittelst der ursprünglichen Function:

$$f'''(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)}{(\Delta x)^3},$$

weil:

$$f'''(x) = \lim_{h=0} \lim_{\Delta x = 0} \frac{\frac{f(x+h+2\Delta x) - 2f(x+h+\Delta x) + f(x+h)}{\Delta x^2} - \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2}}{h}$$

Nach dem angeführten Satze wird nämlich der Quotient der rechten Seite gleich

$$\frac{f'(x+2\Delta x+\Theta h)-2f'(x+\Delta x+\Theta h)+f'(x+\Theta h)}{(\Delta x)^2}$$

und auch gleich

$$=\frac{f''(x+\Delta x+\eta\Delta x+\Theta h)-f''(x+\eta\Delta x+\Theta h)}{\Delta x}, \quad (0<\eta<1).$$

Man erkennt ebenso wie früher, dass man $h=\Delta x$ annehmen und beide gleichzeitig nach Null convergiren lassen kann.

Es ist nicht schwer die allgemeine Gleichung dieser Art durch Schluss von n auf $n+1$ zu beweisen.

33. Diese neuen Ausdrücke sind zwar zu einer Berechnung der höheren Ableitungen minder geeignet als die zuerst gebildeten; sie lassen aber, was für die Theorie von Wichtigkeit ist, dieselben als Grenzwerthe höherer Differenzenquotienten erkennen. Euler (1707—1783) hat in seinem Werke: Institutiones calculi differentialis, Petrop. 1755, folgende zweckmässige Darstellung hierfür gegeben. Bezeichnet man die Werthe der Function $y=f(x)$, welche zu den Argumenten

$$x,\; x+\Delta x,\; x+2\Delta x \cdots x+n\Delta x \text{ gehören, bezüglich mit}$$
$$y,\quad y_1,\quad y_2,\quad \cdots \quad y_n,$$

so erhält man die Reihe der ersten Differenzen:

$$y_1-y=\Delta y,\; y_2-y_1=\Delta y_1,\; y_3-y_2=\Delta y_2 \cdots y_n-y_{n-1}=\Delta y_{n-1}.$$

Aus diesen bildet man eine Reihe der zweiten Differenzen:

$$\Delta y_1-\Delta y=\Delta^2 y,\; \Delta y_2-\Delta y_1=\Delta^2 y_1,\; \Delta y_3-\Delta y_2=\Delta^2 y_2 \cdots$$
$$\Delta y_{n-1}-\Delta y_{n-2}=\Delta^2 y_{n-2},$$

und so fort der dritten:

$$\Delta^2 y_1-\Delta^2 y=\Delta^3 y,\; \Delta^2 y_2-\Delta^2 y_1=\Delta^3 y_1,\; \Delta^2 y_3-\Delta^2 y_2=\Delta^3 y_2 \cdots$$
$$\Delta^2 y_{n-2}-\Delta^2 y_{n-3}=\Delta^3 y_{n-3},$$

bis zur n^{ten} Differenz:

$$\Delta^{n-1}y_1-\Delta^{n-1}y=\Delta^n y.$$

Stellt man sich die Aufgabe, die höheren Differenzen durch die ursprünglichen Functionswerthe auszudrücken, so findet man:

$$\Delta y=y_1-y,$$
$$\Delta^2 y=(y_2-y_1)-(y_1-y)=y_2-2y_1+y=f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x),$$
$$\Delta^3 y=\{(y_3-y_2)-(y_2-y_1)\}-\{(y_2-y_1)-(y_1-y)\}=y_3-3y_2+3y_1-y$$
$$=f(x+3\Delta x)-3f(x+2\Delta x)+3f(x+\Delta x)-f(x),$$

woraus hervorgeht, dass $f''(x)=\operatorname{Lim}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $f'''(x)=\operatorname{Lim}\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$ u. s. f.

Dadurch wird für die höheren Differentialquotienten die Bezeichnung motivirt: $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. w.; allgemein $\frac{d^ny}{dx^n} = \text{Lim}\,\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$.

Man kann auch von den Werthen der unabhängigen Variabelen höhere Differenzen bilden, aber man erkennt, dass dieselben Null werden.

Denn aus den Werthen

$$x_1 = x + \Delta x,\ \ x_2 = x + 2\Delta x,\ \ x_3 = x + 3\Delta x \cdots x_n = x + n\Delta x$$

folgt:

$$x_1 - x = \Delta x,\ x_2 - x_1 = \Delta x_1,\ x_3 - x_2 = \Delta x_2 \ldots x_n - x_{n-1} = \Delta x_{n-1},$$

also
$$\begin{aligned} &\Delta x_1 - \Delta x = \Delta^2 x = 0,\ \Delta^2 x_1 - \Delta^2 x = \Delta^3 x = 0 \\ &\Delta x_2 - \Delta x_1 = \Delta^2 x_1 = 0,\ \Delta^2 x_2 - \Delta^2 x_1 = \Delta^3 x_1 = 0 \\ &\Delta x_3 - \Delta x_2 = \Delta^2 x_2 = 0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die höheren Differenzen der unabhängigen Variabelen sind also Null, weil die Werthe derselben um gleiche Grössen wachsend gedacht sind.

Dasselbe ist der Fall, wenn die Function y dem x proportional wächst, also $y = ax + b$ ist.

Da nach der obigen Bestimmungsweise die Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),\ \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) \text{ u. s. w.}$$

die Bedeutung wirklicher Brüche haben, so kann man von ihnen auch zu den Gleichungen zwischen den Differentialen übergehen:

$$dy = f'(x)\cdot dx,\ d^2y = f''(x)\cdot dx^2,\ d^3y = f'''(x)\cdot dx^3 \cdots d^n y = f^n(x)\cdot dx^n.$$

Freilich steht nun auf jeder Seite solch einer Gleichung eine verschwindende Grösse, so dass sie dem äusseren Anscheine nach keinen andern Inhalt hat, als die selbstverständliche Identität $0 = 0$. Jedoch bewahrt sie einen bestimmten Inhalt, wenn die Entstehung derselben im Sinne behalten wird. Denn dann sagt sie aus: die n^{te} Differenz $\Delta^n y$ an der Stelle x wird um so näher gleich dem Producte von Δx^n mit dem bestimmten Werthe $f^n(x)$, je kleiner Δx gewählt wird, so dass der Grenzwerth des Quotienten $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$, den wir mit $\frac{d^n y}{dx^n}$ bezeichnet haben, gleich $f^n(x)$ ist. *Also eine Gleichung zwischen unendlich kleinen Grössen hat einen bestimmten Inhalt, wenn sie als Relation zwischen den Grenzwerthen stetig veränderlicher Grössen interpretirt werden kann.*

Bemerkenswerth ist nun weiter, dass in den obigen Gleichungen das Differential dx in wachsenden Potenzen vorkommt, so dass wir unendlich kleine Grössen verschiedener Ordnung zu unterscheiden ver-

mögen. Nennt man dx unendlich klein von der ersten Ordnung, so ist dx^2 von der zweiten, dx^3 von der dritten, dx^n von der n^{ten} Ordnung unendlich klein. Das Verhältniss zwischen zwei unendlich kleinen Grössen n^{ter} und m^{ter} Ordnung $(n > m)$ ist selbst unendlich klein von der $n - m^{\text{ten}}$ Ordnung: $dx^n : dx^m = dx^{n-m}$. Der Zähler convergirt so zu sagen viel rascher nach Null als der Nenner; ist $n = m$, so ist der Quotient endlich, gleich 1.

34. Dieses Maass des Unendlichklein-werdens lässt sich allgemein aussprechen: *Zwei Grössen werden von derselben Ordnung unendlich klein, wenn ihr Quotient einen endlichen Werth erhält.* Die Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ u. s. w. besitzen im allgemeinen für irgend welches x endliche Werthe; es sind in folge dessen die Differentiale dy, d^2y, $d^3y \cdots$, ebenso wie die ihnen entsprechenden Potenzen von dx, unendlich klein bezüglich von 1., 2., 3. $\cdots$ Ordnung. Will man die Ordnung untersuchen, nach welcher eine Function, von der bekannt ist, dass sie für $x = a$ verschwindet, an dieser Stelle unendlich klein wird, so hat man den Quotienten $\frac{f(x)}{(x-a)^r}$ zu bilden, und zu bestimmen, für welchen Werth von r derselbe endlich wird. Erst die Untersuchungen des nächsten Capitels liefern für die Berechnung solcher Quotienten $\frac{0}{0}$ eine allgemeine Methode. Dabei kann es eintreten, dass die Ordnung des Unendlichklein-werdens durch eine gebrochene oder auch irrationale Zahl ausgedrückt werden muss, wie, um das einfachste nur zu nennen, bei $f(x) = x^n$ an der Stelle $x = 0$, wenn n irgend welche positive Zahl ist. Selbst das ist möglich, wie hier nur erwähnt werden soll, dass sich gar keine Zahl ermitteln lässt, sondern nur eine Grenze für r, unterhalb welcher der Quotient Null, oberhalb welcher er unendlich gross wird. Das einfachste Beispiel dieser Art ist $f(x) = x^a \cdot \lg(x)$, $(a > 0)$, in welchem a solch eine Grenzscheide der Werthe r bildet*).

In den Anwendungen der Differentialrechnung auf Probleme der Geometrie und Mechanik kann man immer zwei Wege einschlagen: entweder man geht von Gleichungen zwischen Differenzenquotienten aus und von diesen über zu Differentialquotienten; oder man geht von Gleichungen zwischen Differenzen aus und von diesen über zu Differentialen. Das letztere entspricht der unmittelbaren Anschauung häufig besser. In diesem Falle kann man sich die Rechnung von vornherein dadurch erleichtern, dass man schon in der Gleichung zwischen den noch endlich gedachten Grössen alle die Glieder fortlässt, welche, bei dem Uebergange zu Differentialen, von höherer Ordnung

*) Cauchy, Sur les divers ordres des quantités infiniment petites. Exercices de mathématiques. Tome I.

unendlich klein werden, als ein Glied, mit welchem sie in derselben Summe vorkommen. Ist z. B. $y = x^n$, (n positiv ganzzahlig), so ist $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + n_1 x^{n-2}\Delta x^2 + n_2 x^{n-3}\Delta x^3 + \cdots \Delta x^n$; alle Glieder der rechten Seite werden von höherer Ordnung unendlich klein als das erste, also ist $\Delta y = nx^{n-1}\Delta x$ eine Gleichung, die für endliche Werthe zwar nicht exact ist, für unendlich kleine jedoch den richtigen Werth $dy = nx^{n-1} \cdot dx$ darstellt. Schon in der elementaren Stereometrie kommt diese Ueberlegung zur Geltung, wenn bei der Cubatur der durch Ebenen begrenzten Körper der Satz bewiesen wird, dass das Volumen einer durch parallele Ebenen begrenzten Schicht wie das eines Prismas berechnet werden kann, falls die Anzahl der parallelen Ebenen unendlich wird. In der That unterscheidet sich das Volumen einer Schicht von dem eines Prismas mit gleicher Grundfläche um eine Grösse, welche von der zweiten Ordnung unendlich klein wird, wenn jenes selbst bei beliebig fortgesetzter Theilung als unendlich klein von erster Ordnung betrachtet wird; was man am einfachsten Beispiele der dreiseitigen Pyramide, durch directe Berechnung dieser Differenz als Function der Schichthöhe, leicht nachweisen kann. Daraus folgt dann, dass die Summe aus den Grenzwerthen der Prismen identisch ist mit der Summe aus den Grenzwerthen der abgestumpften Pyramiden, wodurch die Rechnung von vornherein erleichtert ist.

35. Die höheren Differentialquotienten, gebildet für die im vorigen Capitel behandelten expliciten Functionen, liefern folgende Werthe:

$$\text{I. } y = x^m,\ \frac{dy}{dx} = mx^{m-1},\ \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}\ldots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\,x^{m-n}.$$

Bedeutet m eine positive ganze Zahl, so wird $\frac{d^my}{dx^m}$ constant.

$$\text{II. 1) } y = a^x,\ \frac{dy}{dx} = a^x la,\ \frac{d^2y}{dx^2} = a^x(la)^2\cdots,\ \frac{d^ny}{dx^n} = a^x(la)^n.\ (a > 0.)$$

Insbesondere für $y = e^x$ wird $\frac{d^ny}{dx^n} = e^x$.

$$\text{2) } y = \sin x.\quad \frac{dy}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x = \cos(x + \pi) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

(3) $y = \cos x.\ \frac{dy}{dx} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdots \frac{d^n y}{dx^n} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

Ist y gleich einer Summe von Functionen:

$$y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \cdots + f_m(x),$$

so wird

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f_1(x)}{dx^n} + \frac{d^n f_2(x)}{dx^n} + \frac{d^n f_3(x)}{dx^n} \cdots + \frac{d^n f_m(x)}{dx^n};$$

z. B.

$$y = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right), \text{ also } \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{2}\left[\frac{d^n \frac{1}{1-x}}{dx^n} + \frac{d^n \frac{1}{1+x}}{dx^n}\right]$$

oder explicite

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right].$$

Ist y gleich dem Producte zweier Functionen:

$$y = \varphi(x) \cdot \psi(x) = \varphi \cdot \psi, \text{ so ist } \frac{dy}{dx} = \varphi' \cdot \psi + \varphi \cdot \psi'$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi''\psi + 2\varphi'\psi' + \varphi\psi'',\ \frac{d^3 y}{dx^3} = \varphi'''\psi + 3\varphi''\psi' + 3\varphi'\psi'' + \varphi\psi'''.$$

Allgemein, wenn $\frac{d^k \varphi}{dx^k}$ mit $\varphi^{(k)}$ und die Binomialcoefficienten (§. 27) mit n_k bezeichnet werden: $(n_0 = 1)$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi^{(n)}\psi + n_1 \varphi^{(n-1)}\psi^{(1)} + n_2 \varphi^{(n-2)}\psi^{(2)} \cdots n_k \varphi^{(n-k)}\psi^{(k)} + \cdots \varphi\psi^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} n_k \varphi^{(n-k)} \psi^{(k)}.$$

Denn nimmt man an, diese Formel sei für irgend einen Werth von n erwiesen, so folgt durch Differentiation:

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \sum_{k=0}^{k=n} n_k \left[\varphi^{(n+1-k)}\psi^{(k)} + \varphi^{(n-k)}\psi^{(k+1)}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} n_k \varphi^{(n+1-k)}\psi^{(k)} + \sum_{k=0}^{k=n} n_k \varphi^{(n-k)}\psi^{(k+1)}.$$

Schreibt man das erste Glied der ersten und das letzte der zweiten Summe gesondert:

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \varphi^{(n+1)}\psi + \varphi\psi^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{k=n} n_k \varphi^{(n+1-k)}\psi^{(k)} + \sum_{k=0}^{k=n-1} n_k \varphi^{(n-k)}\psi^{(k+1)},$$

so erkennt man, dass sich je zwei Glieder der beiden Summen vereinigen lassen, derart dass:

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \varphi^{(n+1)}\psi + (n_1 + n_0)\varphi^{(n)}\psi^{(1)} + (n_2 + n_1)\varphi^{(n-1)}\psi^{(2)} + \cdots$$
$$+ (n_k + n_{k-1})\varphi^{(n+1-k)}\psi^{(k)} + \cdots \varphi\psi^{(n+1)}.$$

Es haben aber die Binomialzahlen die Eigenschaft, dass $n_k + n_{k-1}$

$= (n+1)_k$, also kann diese Summe nach der obigen Bezeichnungsweise geschrieben werden:

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \sum_{k=0}^{k=n+1} (n+1)_k \, \varphi^{(n+1-k)} \psi^{(k)},$$

womit erwiesen ist, dass das angenommene Gesetz, falls es für irgend ein n richtig ist, auch für die folgende Zahl, mithin für alle folgenden giltig bleibt; seine Giltigkeit ist aber in der That für $n = 2$ und $n = 3$ direct erkannt worden.

Nach dieser Regel erhält man folgende Darstellung für:

4) $y = \operatorname{tang} x$. Setzt man $y \cdot \cos x = \sin x$, so wird, $y^{(n)}$ bedeutet $\frac{d^n y}{dx^n}$,

$$y' \cos x + y \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' \cos x + 2y' \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y''' \cos x + 3y'' \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3y' \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) + y \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \\ = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

. . . .

$$y^{(n)} \cos x + n_1 y^{(n-1)} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + n_2 y^{(n-2)} \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) + \cdots \\ + n_k y^{(n-k)} \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + \cdots y \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Die Berechnung des n^{ten} Differentialquotienten $y^{(n)}$ aus der letzten Gleichung erfordert also die Berechnung aller vorangehenden Ableitungen aus den vorangehenden Gleichungen; die aufgestellte Formel für $y^{(n)}$ heisst dieses Umstandes wegen eine Recursionsformel. Die Werthe aller Ableitungen sind endlich bis auf die Stellen, wo $\cos x = 0$.

5) $$y = \operatorname{cotang} x, \; y \sin x = \cos x.$$

$$y^{(n)} \sin x + n_1 y^{(n-1)} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + n_2 y^{(n-2)} \left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \cdots \\ \cdots n_k y^{(n-k)} \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \cdots y \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

III. 1) $y = {}^a\!\log x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} {}^a\!\log e$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} {}^a\!\log e$, $\frac{d^3y}{dx^3} = +\frac{1 \cdot 2}{x^3} {}^a\!\log e$,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n-1!}{x^n} \, {}^a\!\log e. \quad (a > 0.)$$

2) $$y = \arcsin x. \quad \left(-1 \leqq x \leqq +1, \; -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}.\right)$$

Aus der Gleichung: $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ oder $y' \sqrt{1-x^2} = 1$ folgt, indem man

sie nochmals differentiirt und beachtet, dass auf der rechten Seite eine Constante steht:

$$y'' \sqrt{1-x^2} - \frac{y' x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \text{ oder } y'' (1-x^2) - y' x = 0.$$

Wird diese Gleichung nach der Productregel behandelt, so erhält man nach $n$maliger Differentiation:

$$y^{(n+2)} (1-x^2) - 2 n_1 y^{(n+1)} x - 2 n_2 y^{(n)} - y^{(n+1)} x - n_1 y^{(n)} = 0,$$

oder:

$$(1-x^2) y^{n+2} = (2n+1) y^{(n+1)} x + n^2 y^{(n)}.$$

Dies ist ebenfalls eine Recursionsformel zur Berechnung sämmtlicher Ableitungen; dieselben werden an den Stellen $x^2 = 1$ unendlich.

3) $$y = \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x. \quad \frac{d^n y}{dx^n} = -\frac{d^n (\arcsin x)}{dx^n}.$$

4) $$y = \operatorname{arctg} x \left(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}\right).$$

Aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, oder $y' (1+x^2) = 1$ folgt:

$$y^{(n+1)} (1+x^2) + 2 n_1 y^{(n)} x + 2 n_2 y^{(n-1)} = 0,$$

oder:

$$y^{(n+1)} (1+x^2) = -2nxy^{(n)} - n(n-1) y^{(n-1)}.$$

und endlich 5), für $y = \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ wird:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = -\frac{d (\operatorname{arctg} x)}{dx^n}.$$

36. Für die cyclometrischen Functionen sind sonach nur Recursionsformeln gewonnen; solche Formeln wird man für jede zusammengesetzte Function durch Anwendung der Productregel erhalten. Man kann aber auch die Aufgabe stellen, independente Formeln zur Berechnung der n^{ten} Ableitung zu bilden, d. h. solche, welche nicht erst die Berechnung aller vorangehenden Ableitungen erfordern*).

Als Beispiel dafür, wie eine independente Darstellung erhalten wird, diene $y = \operatorname{arctg} x$, was sich in folgender besonders einfacher Weise behandeln lässt.

Es ist:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \cos y^2 = \cos y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

---

*) Die hierauf bezüglichen Sätze sind in dem „Compendium der höheren Analysis von Schlömilch, Bd. II“, und Hoppe: „Theorie der höheren Differentialquotienten“ ausführlich erörtert.

also:

$$y'' = y' \left[-\sin y \sin \left(y + \frac{\pi}{2} \right) + \cos y \cos \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right] = y' \cos \left(2y + \frac{\pi}{2} \right)$$
$$= \cos y^2 \sin 2 \left(y + \frac{\pi}{2} \right),$$
$$y''' = y' \left[-2 \cos y \sin y \sin 2 \left(y + \frac{\pi}{2} \right) + 2 \cos y^2 \sin 2 \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$
$$= 2y' \cos y \cos \left(3y + \frac{2\pi}{2} \right) = 2 \cos y^3 \cdot \sin 3 \left(y + \frac{\pi}{2} \right).$$

Durch Schluss von n auf $n + 1$ weist man nach, dass allgemein:

$$y^{(n)} = n - 1! \cos y^n \sin n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \quad (0! = 1).$$

Achtes Capitel.

Der Mittelwerthsatz und die Berechnung der Functionen durch unendliche Reihen. Allgemeine Sätze über Potenzreihen.

37. Schon §. 21 wurde gezeigt, dass die Werthe der ersten Ableitung einer Function Aufschluss geben über die Art des Wachsthumes, indem sie an jeder Stelle erkennen lassen, ob dasselbe im positiven oder negativen Sinne erfolgt. Nunmehr soll nachgewiesen werden, dass auch die Werthänderung der Function in einem Intervalle von endlicher Ausdehnung durch die Werthe der ersten Ableitung gemessen werden kann. Zu dem Zwecke beweise ich zunächst den Hülfsatz: *Wenn eine eindeutige Function, deren vor- und rückwärts genommene Differentialquotienten in einem Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ an jeder Stelle übereinstimmen, an den Endpunkten dieses Intervalles gleiche Werthe besitzt, so muss im Intervall mindestens eine Stelle vorhanden sein, an welcher die erste Ableitung Null wird*)*. Denn entweder hat die Function überall den gleichen Werth, dann

*) Solch eine Function lässt sich geometrisch darstellen durch einen Curvenzug von der Form:

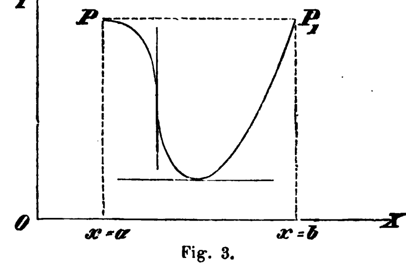


Fig. 3.

sie kann auch Stellen haben, an denen die Tangente der Ordinatenaxe parallel läuft. Der Satz behauptet, was die geometrische Anschauung leicht erkennen lässt: Es existirt im Innern mindestens eine Stelle mit horizontaler Tangente, wenn die Endpunkte gleich hohe Ordinaten haben.

ist sie constant, also der Differentialquotient allenthalben gleich Null. Oder die Function erreicht an mindestens einer Stelle im Innern des Intervalles ihren grössten oder ihren kleinsten Werth (§. 17). Sie kann auch mehrmals den Wechsel einer Zu- und Abnahme erfahren, **ein** solcher ist aber jedenfalls erforderlich. Ist x_1 eine solche Stelle, so wird in ihrer unmittelbaren Umgebung $f(x_1-h)-f(x_1)$ das gleiche Vorzeichen wie $f(x_1+h)-f(x_1)$ besitzen. Zufolge dessen sind also die Quotienten $\frac{f(x_1-h)-f(x_1)}{-h}$ und $\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ von verschiedenem Zeichen, wie klein man auch den Werth von h wählen mag. Beide Quotienten erhalten aber denselben Grenzwerth, denn rückwärts und vorwärts genommener Differentialquotient sind der Voraussetzung nach identisch; eine positive und eine negative Zahlenreihe kann aber nur dieselbe Grenze haben, wenn diese Grenze Null ist, also wird an dieser Stelle $f'(x_1) = 0$.

Dieser Satz dient zum Beweise des **Mittelwerthsatzes**: *Ist $f(x)$ eine im Intervalle von a bis b eindeutige Function, deren vor- und rückwärts genommene Differentialquotienten im Intervalle allenthalben denselben bestimmten Werth haben, so lässt sich immer ein zwischen a und b gelegener Werth x_1 ausfindig machen, so dass der Differenzenquotient:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_1).\text{*)}$$

Bezeichnet man nämlich den Werth des Differenzenquotienten mit K, so dass:

$$[f(b)-Kb]-[f(a)-Ka]=0,$$

und bildet man die Function:

$$\varphi(x)=[f(b)-Kb]-[f(x)-Kx],$$

so wird dieselbe ebenso wie $f(x)$ stetig verlaufen, desgleichen allent-

---

*) Geometrisch:

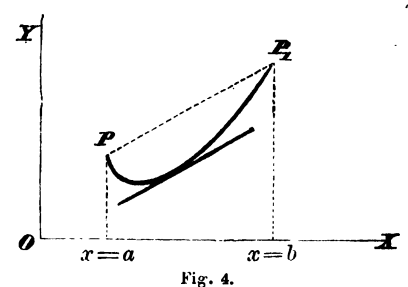


Fig. 4.

Es giebt im Innern eine Stelle, an welcher die Tangente parallel ist der Verbindungslinie der Endpunkte. Auch hier kann der Fall eintreten, dass die Ableitung unendlich wird; d. h. dass die Tangente an einer Stelle parallel der Ordinatenaxe läuft.

halben denselben vor- oder rückwärts genommenen Differentialquotienten besitzen, ausserdem aber für $x = a$ und für $x = b$ denselben Werth, nämlich 0 annehmen. Folglich muss es im Intervalle einen Werth x_1 geben, für welchen $\varphi'(x_1) = 0$ wird.

Es ist aber:

$$\varphi'(x_1) = [f'(x_1) - K] = 0,$$

d. h.

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1). \quad \text{Q. e. d.*)}$$

Einen zwischen a und b gelegenen Werth x_1 kann man stets durch die Form ausdrücken: $x_1 = a + \Theta(b - a)$, wo Θ einen positiven echten Bruch bezeichnet, so dass sich die Gleichung des Mittelwerthsatzes auch schreiben lässt:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'\big(a + \Theta(b - a)\big). \quad 0 < \Theta < 1.$$

Folgesatz: *Ist der vor- und rückwärts gebildete Differentialquotient allenthalben im Intervalle gleich Null, so ist die Function in diesem Intervalle stetig und zwar constant.* Denn alsdann ist, wenn x einen beliebigen Werth im Intervalle bezeichnet

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a + \Theta(x - a)) = 0, \text{ d. h. } f(x) = f(a).$$

(Siehe auch Integralrechnung Capitel 1.)

38. Der Mittelwerthsatz lässt sich nun mit successiver Benutzung der weiteren Ableitungen in einer Form darstellen, welche die Grundlage des wichtigsten Theoremes der Differentialrechnung bildet.

Es sei $f(x)$ eine von a bis b eindeutige Function, deren Ableitungen: $f'(x), f''(x) \ldots f^{n-1}(x)$ in demselben Intervalle durchaus stetig (und also auch endlich) sind, während die n^{te} Ableitung $f^n(x)$ nur die Eigenschaft zu erfüllen braucht, dass sie vor- und rückwärts gebildet an jeder Stelle denselben Werth erhält, so untersuche man zunächst den Quotienten: $\frac{f(b) - f(a) - (b - a) f'(a)}{(b - a)^2}$, dessen Werth wieder mit K bezeichnet werde. Es soll die Frage beantwortet werden, ob sich K vermittelst der höheren Ableitungen ausdrücken lässt. Aus der Gleichung

$$f(b) - f(a) - (b - a) f'(a) - K(b - a)^2 = 0$$

geht hervor, dass:

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b - x) f'(x) - (b - x)^2 K$$

eine stetige Function mit bestimmtem Differentialquotienten ist, welche

---

*) Der Beweis des Satzes, der auch das Theorem von Rolle (1652—1719) genannt wird, ist nach Serret: Cours de calcul différentiel et intégral. T. I. éd. II., pag. 17 ff. gegeben.

für $x = a$ und für $x = b$ verschwindet. Also muss es ein x_1 geben, so dass

$$\varphi'(x_1) = -f'(x_1) + f'(x_1) - (b - x_1) f''(x_1) + 2(b - x_1) K = 0,$$

d. h.

$$K = \frac{f''(x_1)}{2}.$$

Sonach besteht die Gleichung:

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(x) + \frac{(b - a)^2}{2} f'\big(a + \Theta (b - a)\big) \quad 0 < \Theta < 1.$$

Fährt man in gleicher Weise fort und setzt:

$$f(b) - f(a) - (b - a) f'(a) - \frac{(b - a)^2}{2!} f''(x) - \frac{(b - a)^3}{2!} K = 0,$$

so bestimmt sich der Werth von K aus der Gleichung:

$$K = \frac{f'''(x_1)}{3},$$

so dass:

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(b - a)^3}{3!} f'''(a + \Theta (b - a).$$

Die Grösse 2! wurde von vornherein in den Nenner aufgenommen, damit die aus der Differentiation hervorgehende Gleichung für K eine möglichst einfache Form gewinne. So setzen wir nun für ein beliebiges n etwas allgemeiner:

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots \frac{(b-a)^{n-1}}{n-1!} f^{n-1}(a) + \frac{(b-a)^p}{p} K,$$

wobei p irgend welche Zahl bedeuten soll, und fragen, ob sich K durch Werthe der n^{ten} Ableitung ausdrücken lässt.

Wiederum wird

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b - x) f'(x) - \frac{(b - x)^2}{2!} f''(x) - \cdots$$
$$- \frac{(b-x)^{n-1}}{n-1!} f^{n-1}(x) - \frac{(b - x)^p}{p} K$$

eine stetige, überall endliche Function mit bestimmtem Differentialquotienten, die für $x = a$ und $x = b$ verschwindet. Also muss

$$\varphi'(x_1) = -\left[\frac{(b-x_1)^{n-1}}{n-1!} f^n(x_1) - (b - x_1)^{p-1} K\right] = 0$$

werden, oder, da x_1 von b verschieden sein muss:

$$K = \frac{(b - x_1)^{n-p}}{n-1!} f^n(x_1) = \frac{(b - a)^{n-p} \cdot (1 - \Theta)^{n-p}}{n-1!} f^n\big(a + \Theta (b - a)\big).$$

5*

Sonach ist:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots \frac{(b-a)^{n-1}}{n-1!}f^{n-1}(a) +$$
$$+ \frac{(b-a)^n \cdot (1-\Theta)^{n-p}}{n-1!\,p} f^n\big(a+\Theta(b-a)\big).$$

Das letzte Glied bekommt eine besonders einfache Form, wenn $p = n$, oder $p = 1$ gesetzt wird; es ist

$$\text{I. } f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots \frac{(b-a)^{n-1}}{n-1!}f^{n-1}(a) +$$
$$+ \frac{(b-a)^n}{n!} f^n\big(a+\Theta(b-a)\big),$$

oder:

$$\text{II. } f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots \frac{(b-a)^{n-1}}{n-1!}f^{n-1}(a) +$$
$$+ \frac{(b-a)^n (1-\Theta)^{n-1}}{n-1!} f^n\big(a+\Theta(b-a)\big).$$

In den beiden Gleichungen bedeutet Θ nicht den nämlichen Werth, es ist auch zunächst nur von Wichtigkeit zu wissen, dass in beiden Fällen ein Werth für Θ zwischen 0 und 1 existirt*).

39. Durch die aufgestellten Formeln wird die Aufgabe gelöst, die Werthe einer Function für ein gegebenes Intervall ihres Argumentes x wirklich zu berechnen, wozu bisher ausser der Einschliessung in Grenzen selbst für die elementaren Functionen: x^n (bei beliebigem n), a^x, ${}^a\log x$ (für positives a), und für die goniometrischen und cyclometrischen, noch kein Verfahren gelehrt wurde, wiewohl wir auch ohne dieses ihre Eindeutigkeit und Stetigkeit erkennen, ja selbst alle ihre Ableitungen durch die gleichen Rechnungszeichen angeben konnten. Als wirklich ausführbare Rechnungsoperationen stehen nur die beiden: die Summation und die Multiplication und zwar an positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen, also rationalen Zahlen zur Verfügung — die irrationalen müssen mit beliebiger Annäherung durch rationale ersetzt werden — und diese beiden Operationen vermögen wir nur in endlicher Anzahl mit einer bestimmten Menge von Zahlen auszuführen**).

---

*) Die erste Formel ist von Lagrange: Théorie des fonctions analytiques (1797) entwickelt worden, die in der zweiten enthaltene Abänderung hat Cauchy: Exercices de mathématiques T. I. pag. 29 gegeben. Später sind noch allgemeinere Formen für das letzte Glied nach der Methode, welche hier befolgt wurde, von Schlömilch gebildet worden.

**) Subtraction ist Summation mit negativen, Division ist Multiplication mit gebrochenen Zahlen.

Demnach ist allein die Berechnung der rationalen algebraischen Function:

$$y = f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots b_{m-1} x + b_m}$$

als gelöst zu betrachten. *Jede andere Function für einen beliebigen Werth von x berechnen, heisst eine Methode angeben, nach welcher man fortgesetzte Summationen oder Multiplicationen auszuführen hat, deren Ergebniss mit um so grösserer Annäherung den gesuchten Werth darstellt, je häufiger nach Vorschrift der Methode die Operationen ausgeführt werden.*

Es müssen sich also die elementaren Functionen $f(x)$ entweder in der Form von Summen, deren Summanden Potenzen des Argumentes x sein können, oder in der Form von Factoren, welche das Argument ebenfalls in Potenzen enthalten können, darstellen lassen. Wenn sie auf diese Weise berechnet sind, können sie selbst zur Berechnung complicirterer Functionen benutzt werden. Die Anzahl solcher Summanden oder solcher Factoren wird freilich, analog der Darstellung einer irrationalen Zahl, unendlich gross werden, denn sonst liesse sich jede Function auf die Form einer rationalen algebraischen bringen; aber es wird die Aufeinanderfolge so geartet sein, dass schon eine endliche Summation oder Multiplication hinreichend ist, um einen Werth zu erzielen, dessen Unterschied von dem gesuchten Functionswerthe nachweislich kleiner ist als eine beliebig kleine Grösse. Die Berechnung der Zahl e giebt hierfür ein Beispiel; die unendliche Summen- oder Productformel heisst dann eine convergente*).

Die Eigenschaft der Convergenz irgend welcher unendlichen Reihe wird analytisch folgendermassen ausgedrückt:

Seien

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

die Glieder der unendlichen Reihe, welche nach irgend einem Gesetze unbeschränkt fortgesetzt werden können, so müssen die Summen, welche man erhält, indem man zuerst n Glieder, sodann $n+1$, $n+2, \ldots$ $n+k$ Glieder addirt:

---

*) Es ist wichtig, dass der Anfänger sich diese Forderung der Berechenbarkeit einer Function klar mache; also den wesentlichen Unterschied zwischen einer rationalen Function und allen anderen Functionsbezeichnungen $\sqrt{}$, log, sin, cos. Letztere sind nur als Symbole zu betrachten, durch welche die Abhängigkeit einer Zahl von einer andern ausgedrückt wird, deren Eigenschaften man zwar kennt, so dass die Art der Abhängigkeit vollständig definirt ist (durch Umkehr einer Rechnungsoperation, oder durch geometrische Definitionen) für deren Berechnung aber noch kein festes Gesetz vorliegt.

$$S_n \quad = u_1 + u_2 + \cdots u_n,$$
$$S_{n+1} = u_1 + u_2 + \cdots u_n + u_{n+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{n+k} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots u_{n+k}$$

eine Folge von Zahlen mit bestimmtem endlichen Grenzwerthe bilden. Dazu ist erforderlich: erstlich dass keines der Glieder S, also auch keines der Glieder u über jeden Betrag hinaus wächst, zweitens dass zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine Stelle n angegeben werden kann, so dass der Betrag der Differenz: $S_n - S_{n+k}$ für jeden Werth von k kleiner werde als δ. Diese Differenz ist aber nichts anderes als die Gesammtheit aller Glieder, welche auf das n^{te} folgen; *es muss sonach:*

$$\text{abs}\,(u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+k}) < \delta$$

werden, für jeden Werth von k lediglich durch Wahl von n.

Bezeichnet man diese Differenz: $S_{n+k} - S_n = u_{n+1} \cdots u_{n+k}$ mit $R_{n,\,k}$ und analog: $S_{n+k} - S_{n+1}$ mit $R_{n+1,\,k}$ u. s. w., so erkennt man, dass falls abs $[R_{n,\,k}]$ für jeden Werth von k durch Wahl von n kleiner als δ wird, auch der Betrag von $R_{n+1,\,k}, R_{n+2,\,k} \cdots$ für jeden Werth von k sicherlich kleiner als 2δ bleibt. Denn es ist:

$$\text{abs}\,(R_{n+1,\,k}) = \text{abs}\,[(S_{n+k} - S_n) - (S_{n+1} - S_n)]$$
$$\text{abs}\,(R_{n+2,\,k}) = \text{abs}\,[(S_{n+k} - S_n) - (S_{n+2} - S_n)] \text{ u. s. w.}$$

Und umgekehrt, wenn $R_{n,\,\infty}\, R_{n+1,\,\infty} \cdots$ kleiner als δ sind, so werden auch die Differenzen:

$$R_{n,\,\infty} - R_{n+k,\,\infty} = u_{n+1} + u_{n+2} \cdots + u_{n+k}$$

für jeden Werth von k kleiner als 2δ.

Nennt man also die Gesammtheit aller Glieder vom $n+1^{ten}$ an $R_{n,\,\infty}$ oder kürzer R_n, den Rest der Reihe von der n^{ten} Stelle ab, so kann man die Convergenzbedingung auch folgendermassen formuliren:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz einer unendlichen Reihe besteht darin, dass sich zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine Stelle n finden lässt, von der ab die Beträge der Reste der unendlichen Reihe: R_n, R_{n+1}, $R_{n+2}, \ldots$ kleiner bleiben als δ.

Dazu ist also jedenfalls nothwendig erforderlich, dass die Beträge der Glieder in der unendlichen Reihe schliesslich abnehmen und die Null zur Grenze haben, aber diese Bedingung allein genügt noch nicht. Eine unendliche Reihe, welche nicht convergirt, wird entweder einen ganz unbestimmten Werth haben, wenn die Reihe der Summen S zwischen beliebigen Werthen oscillirt, oder einen bestimmten positiven oder negativen unendlichen. In beiden Fällen heisst die Reihe divergent.

40. Die in §. 38 entwickelten Formen liefern nun eine Darstellung der einfachen Functionen in Form unendlicher Potenzreihen.

Denn nimmt man an, es sei der Werth der Function und aller ihrer Ableitungen an der einen Stelle a bekannt, und es werde der Functionswerth für irgend ein anderes x gesucht, so ist zufolge dieser Gleichungen, (statt b setze man x):

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots \frac{(x-a)^{n-1}}{n-1!} f^{n-1}(a) + R,$$

$$R = \frac{(x-a)^n}{n!} f^n\big(a + \Theta(x-a)\big), \text{ oder} = \frac{(x-a)^n (1-\Theta)^{n-1}}{n-1!} f^n\big(a+\Theta(x-a)\big).$$

Auf der rechten Seite sind alsdann alle Glieder bekannt, bis auf das letzte, in welchem der unbekannte Bruch Θ vorkommt. Kann man aber nachweisen, dass dieses letzte Glied R, gebildet für beliebig wachsende Werthe von n, eine Zahlenreihe durchläuft, deren Grenze die Null ist, so wird man mit Vernachlässigung dieses letzten Gliedes den Werth von $f(x)$ mit beliebiger Annäherung durch Summation beliebig vieler Glieder aus der unendlichen Reihe erhalten:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \cdots \text{in inf.}$$

Diese Reihe heisst nach ihrem Entdecker die Taylor'sche*); sie lehrt: *Kennt man den Werth einer Function und aller ihrer Ableitungen an einer einzigen Stelle, so kann man den Functionswerth für jede andere Stelle $x \gtrless a$ berechnen, wenn in dem Intervalle von a bis x die Function nebst ihren Ableitungen, soviele man auch bilden mag, stetig verläuft, ohne unendlich zu werden, und wenn $Lim\ (R)$ für $n = \infty$ Null wird.*

41. Die Prüfung der ersten Voraussetzung ist scheinbar complicirt, weil alle Ableitungen der Function im Intervalle von a bis x auf ihre Endlichkeit und Stetigkeit zu untersuchen sind; sie vereinfacht sich jedoch durch den Satz: Wenn die n^{te} Ableitung einer Function vorwärts und ebenso rückwärts gebildet, in einem Intervalle von endlicher Ausdehnung durchweg bestimmt und nur endlich ist (stetig braucht sie dabei nicht zu sein), so müssen alle vorhergehenden Ableitungen, sowie die Function selbst in diesem Intervalle stetig verlaufen ohne unendlich zu werden. Denn ist z ein Werth im Intervalle von a bis x, so sind die Werthe der vorwärts gebildeten Ableitung $f^n(z)$, und der rückwärts gebildeten $\varphi^n(z)$ definirt durch die Gleichungen:

$$\frac{f^{n-1}(z+h) - f^{n-1}(z)}{h} = f^n(z) + \delta, \quad \frac{f^{n-1}(z-h) - f^{n-1}(z)}{-h} = \varphi^n(z) + \delta'.$$

Daraus folgt durch Subtraction:

$$f^{n-1}(z+h) - f^{n-1}(z-h) = h\,\big(f^n(z) + \varphi^n(z)\big) + h\,(\delta + \delta').$$

*) Taylor (1685—1731) stellte in seinem Hauptwerke: Methodus incrementorum directa et inversa 1715, diese Reihe auf, aber ohne Berücksichtigung des Restgliedes. Mac Laurin (1698—1746) entwickelte in seinem Werke: A treatise of fluxions (1742) die Reihe für den speciellen Werth $a = 0$.

Wenn nun f^n und φ^n durchweg endlich sind, so ist im Innern des Intervalles an jeder Stelle

$$\text{Lim}\,[f^{n-1}(z+h) - f^{n-1}(z-h)] = 0, \text{ für } h = 0,$$

also ist die Function zu beiden Seiten dieser Stelle stetig. Sie bleibt dabei durchweg endlich: denn ist M der grösste Werth, den f^n zwischen $z = x_0$ und $x_0 + h$ erhält, m der kleinste, so ist im ganzen Intervalle von x_0 bis $x_0 + h$ der Ausdruck

$$f^{n-1}(z) - f^{n-1}(x_0) - (z - x_0)\,m \qquad \text{grösser als } 0,$$

weil er für $z = x_0$ gleich Null ist und seine Ableitung $f^n(z) - m$ stets > 0 bleibt; dagegen ist:

$$f^{n-1}(z) - f^{n-1}(x_0) - (z - x_0)\,M < 0, \text{ weil } f^n(z) - M < 0.$$

Zu jedem Werthe von z wird also ein echter Bruch Θ gehören, so dass

$$f^{n-1}(z) - f^{n-1}(x_0) = (z - x_0)\,[m + \Theta\,(M - m)],$$

d. h. zu jedem z gehört ein endlicher Werth von $f^{n-1}(z)$. Mit Anwendung des gleichen Beweisverfahrens folgt dasselbe für alle vorhergehenden Ableitungen, sowie für $f(z)$ selbst.

Bei der Bestimmung des Grenzwerthes von R ist bisweilen folgender Satz dienlich: Wenn die Werthe der n^{ten} Ableitung auch für $n = \infty$ in einem Intervalle endlich bleiben, so ist Lim R gleich Null. Denn in dem Producte:

$$\frac{(x-a)^n}{n-1!} = x - a \cdot \frac{x-a}{1} \cdot \frac{x-a}{2} \cdots \frac{x-a}{n-1} = (x-a)\,\varrho$$

ist $\varrho = \frac{x-a}{1} \cdot \frac{x-a}{2} \cdots \frac{x-a}{n-1}$, also $\varrho^2 = \frac{(x-a)^2}{1 \cdot n-1} \cdot \frac{(x-a)^2}{2 \cdot n-2} \cdots \frac{(x-a)^2}{n-1 \cdot 1}$,

mithin $\varrho^2 < \left(\frac{(x-a)^2}{n-1}\right)^{n-1}$, weil $n - 1 \leqq k\,(n - k)$, da ja $k \leqq n - 1$,

folglich
$$\varrho < \left(\frac{x-a}{\sqrt{n-1}}\right)^{n-1}.$$

Ist nun $x - a$ eine endliche Grösse, so wird $\frac{x-a}{\sqrt{n-1}}$ mit wachsenden Werthen von n ein Bruch, welcher auf immer höhere Potenzen erhoben die Null zur Grenze hat. Im vorliegenden Falle wird also die erste und zweite Voraussetzung in die eine zusammengefasst: Eine Function, für welche in einem Intervalle die n^{te} Ableitung auch für $n = \infty$ endlich bleibt, lässt sich in diesem Intervalle durch eine Potenzreihe berechnen. Aber dieser Satz ist nicht umkehrbar, weil Lim R auch Null werden kann, ohne dass die n^{te} Ableitung für $n = \infty$ endlich ist, wie die folgenden Beispiele zum Theil lehren.

42. Die Exponentialreihe: $y = f(x) = e^x$.

Für $x = 0$ ist $f(x)$ und alle seine Ableitungen bekannt; denn es ist $f^n(x) = e^x$, also $f_n(0) = 1$. Dieselben sind für alle endlichen Werthe von x stetige Functionen, und die n^{te} Ableitung bleibt auch für $n = \infty$ stets endlich. Demnach convergirt die Taylor'sche Reihe und es ist:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^k}{k!} + \cdots \text{ in infinit. } -\infty < x < +\infty.\text{*)}$$

Ist allgemeiner $y = a^x$ $(a > 0)$, so setze man $y = e^{x\,la}$ und es wird:

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{(x\,la)^2}{2!} + \frac{(x\,la)^3}{3!} + \cdots \frac{(x\,la)^k}{k!} + \cdots \text{ in infinit.}$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

43. Die goniometrischen Reihen.

$y = \sin x$. $\frac{d^n y}{d x^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ ist endlich für jedes endliche Argument. Demnach convergirt die Taylor'sche Reihe, und da

$$f(0) = \sin(0) = 0,\ f''(0) = \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = 0,\ f^4(0) = \sin\left(\frac{4\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f'(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ f'''(0) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1,\ f^5(0) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1,$$

so ist:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1!} \cdots \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$y = \cos x.\quad \frac{d^n y}{dx^n} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$f(0) = \cos(0) = 1,\ f''(0) = \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) = -1,\ f^4(0) = \cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) = 1,$$

$$f'(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ f'''(0) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,\ f^5(0) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} \cdots \quad -\infty < x < +\infty.$$

Die vorstehenden Reihen geben die Möglichkeit, die trigonometrischen Tafeln für sin und cos jeder Zahl zu berechnen; will man von der geometrischen Definition des Sinus und Cosinus ganz absehen, so sind diese Reihen als Definitionen dieser Functionen zu betrachten. Die bisher benutzten Eigenschaften derselben müssen sich direct aus diesen Reihen entwickeln lassen.

---

*) Die Reihe selbst ist zuerst von Newton aufgestellt worden, ebenso die Reihen für sin und cos; als Basis der Exponentialfunctionen wurde die Zahl e, wie schon erwähnt, von Euler eingeführt.

44. Um dieses nachzuweisen, ist unabhängig von den bisherigen Betrachtungen zu zeigen, dass die definirenden Reihen convergiren und stetige Functionen von x sind. Zu dem Zwecke beweisen wir folgende

Allgemeine Sätze über Potenzreihen*).

I. *Wenn in einer Potenzreihe:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots$$

die Coefficienten $a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ *alle einerlei Vorzeichen haben und für einen bestimmten positiven Werth* X *von einer bestimmten Stelle ab die Glieder abnehmen und nach Null convergiren, derart dass der Quotient zweier auf einander folgender Glieder kleiner ist als eins, und für* $n = \infty$ *höchstens gleich eins wird, so convergirt die Reihe für alle positiven Werthe von* x, *die kleiner sind als* X.

Da der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n} X$ von einer bestimmten Stelle ab kleiner als 1 (höchstens gleich 1) wird, so wird sich, wenn $x < X$ gewählt ist, ein echter Bruch α angeben lassen, so dass:

$$\frac{a_{n+1} x}{a_n} < \alpha, \ \frac{a_{n+2} x}{a_{n+1}} < \alpha, \ \frac{a_{n+3} x}{a_{n+2}} < \alpha \ldots$$

also ist:

$$a_{n+1} x < \alpha a_n, \ a_{n+2} x^2 < \alpha^2 a_n \ldots a_{n+k} x^k < \alpha^k a_n \ldots$$

folglich:

$$a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} \ldots a_{n+k} x^{n+k} \ldots < a_n x^n \left[1 + \alpha + \alpha^2 \ldots \alpha^k \ldots\right]$$

oder:

$$a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} \ldots a_{n+k} a^{n+k} < a_n x^n \cdot \frac{1}{1-\alpha}.$$

Die rechte Seite stellt eine positive endliche Grösse dar, welche durch Wahl von n beliebig klein wird, woraus das Behauptete folgt.

Für $\alpha = 1$ ist diese Schlussweise nicht mehr anwendbar; es bedarf also jedesmal einer besonderen Untersuchung, ob eine Reihe in dem Falle, dass der Quotient zweier auf einander folgender Glieder dem Grenzwerthe 1 zustrebt, noch convergirt oder nicht.

Wenn dagegen für einen Werth x das Verhältniss zweier auf einander folgender Glieder von einer Stelle ab stets grösser ist als 1, mag er auch für $n = \infty$ gleich 1 werden, so wird für diesen, sowie für alle grösseren Werthe die Reihe keine bestimmte endliche Summe haben, d. h. divergiren, weil von dieser Stelle ab die Glieder wachsen, und folglich auch der Rest der Reihe nicht nach Null convergirt.

---

*) Abel: Untersuchungen über die Binomialreihe. Crelle J. B. 1. S. 311.

Das Convergenzintervall der Potenzreihe ist also im allgemeinen durch die Bedingung:

$$\mathrm{Lim}\,\frac{a_{n+1}}{a_n}\,x < 1, \text{ oder } x < \mathrm{Lim}\,\frac{a_n}{a_{n+1}} \quad (n = \infty)$$

gegeben.

II. Die Summe (Differenz) zweier convergenter Reihen ist selbst eine convergente Reihe, deren Glieder aus der Summe (Differenz) der Glieder beider Reihen besteht.

Ist
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_{n-1} x^{n-1} + R_n,$$
$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots b_{n-1} x^{n-1} + R'_n,$$

so zwar, dass durch Wahl eines bestimmten n, R sowohl wie R' kleiner werden, als eine noch so kleine Zahl, so ist

$$f(x) \pm \varphi(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + \cdots (a_{n-1} \pm b_{n-1}) x^{n-1} + R_n + R'_n.$$

Da nun bei allen Werthen von x, für welche beide Reihen convergiren,

$$\mathrm{Lim}\,(R_n + R_n') = 0$$

wird, so erhält man für die algebraische Summe die unendliche Reihe:

$$f(x) \pm \varphi(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots$$

Allgemeiner noch wird:

$$f(x) \pm \varphi(x') = (a_0 \pm b_0) + (a_1 x \pm b_1 x') + (a_2 x^2 \pm b_2 x'^2) + \cdots,$$

falls die Reihen bezüglich für x und x' convergiren.

III. Eine unendliche Potenzreihe, deren Glieder für irgend einen Werth von x verschiedene Vorzeichen haben, convergirt, wenn sowohl die Glieder mit positivem als auch die mit negativem Zeichen, für sich gesondert summirt, endliche Werthe liefern.

Denn nach dem Satze II stellt solch eine Reihe die Differenz der Werthe zweier convergenter Potenzreihen dar. Diese Bedingung ist für die Convergenz einer Reihe, deren Glieder verschiedene Vorzeichen haben, nicht nothwendig; ist sie erfüllt, so heisst die Reihe eine unbedingt convergente. Bedingt convergent heisst sie, wenn sie einen endlichen Werth besitzt, ohne dass die Vereinigung der positiven oder der negativen Glieder allein eine endliche Summe liefert. Eine Potenzreihe convergirt unbedingt, wenn der absolute Werth der Quotienten zweier auf einander folgender Glieder von einer Stelle ab kleiner ist und für $n = \infty$ auch kleiner bleibt als eins. Denn alsdann erfüllt die Reihe, auch wenn man allen Gliedern das gleiche Vorzeichen giebt, die im Satze I als hinreichend erwiesene Convergenzbedingung.

Daraus erkennt man: eine bedingte Convergenz kann nur dadurch zu Stande kommen, dass das Verhältniss zweier auf einander folgender Glieder seinem Betrage nach kleiner ist als eins, aber für $n = \infty$

gleich eins wird; und hieraus folgt weiter: Convergirt eine Potenzreihe für einen bestimmten Werth X von x nur bedingt, so convergirt sie unbedingt für jeden numerisch kleineren Werth von x; während sie für einen grösseren Werth divergirt.

Denn für einen kleineren Werth bleibt der Betrag des Quotienten kleiner als eins, für einen grösseren Werth wird er grösser als eins; die Glieder der Reihe nehmen dann in ihrem Betrage nicht ab, sondern wachsen.

IV. *Jede Potenzreihe ist innerhalb des Intervalles, in welchem sie unbedingt convergirt, eine stetige Function der Variabelen.*

Bedeutet $f(x)$ den Werth der unendlichen Reihe:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots,$$

für welche, da x ein Werth im Innern des Convergenzintervalles sein soll:

$$\text{abs}\left[\frac{a_{n+1}}{a_n} x\right] < 1,$$

so muss gezeigt werden, dass $\text{Lim}\,[f(x \pm \delta) - f(x)] = 0$, für $\delta = 0$. Man setze:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_{n-1} x^{n-1} = \varphi(x)$$
$$a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \cdots = \psi(x),$$

so ist

$$\text{abs}\,\psi(x) < \text{abs}\,a_n x^n \cdot \frac{1}{1-\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Mithin kann man lediglich durch Wahl einer unteren Grenze für n, $\psi(x)$ sowohl wie $\psi(x \pm \delta)$, also auch den Betrag der Differenz $\psi(x \pm \delta) - \psi(x)$ kleiner machen als eine noch so kleine Grösse ε, weil das Glied $a_n x^n$ mit wachsenden Werthen von n beliebig klein wird. Man hat, wenn X den grössten Werth des Intervalles für x bezeichnet, n so zu wählen, dass $a_n < \frac{\varepsilon}{X^n}$ wird*). Demnach wird

$$f(x \pm \delta) - f(x) = \varphi(x \pm \delta) - \varphi(x) + \varepsilon.$$

Da nun $\varphi(x)$ eine ganze rationale Function von x darstellt, die wie

---

*) Zufolge dieser Eigenschaft, dass für dasselbe n, $\psi(x)$ sowohl wie $\psi(x \pm \delta)$ kleiner werden als ε, heissen die Potenzreihen in gleichem Grade oder gleichmässig convergente. Abel hat zuerst im oben angeführten Aufsatze darauf aufmerksam gemacht, dass aus der Stetigkeit der Reihenglieder nicht ohne weiteres auch die Stetigkeit der Reihe folgt. Die gleichmässige Convergenz lehrt auch, dass die unendliche Reihe in ihrem ganzen Convergenzintervalle mit beliebiger Annäherung durch dieselbe ganze rationale Function ersetzt werden kann. Man bezeichnet daher nach Weierstrass die durch die Potenzreihe dargestellte Function als eine solche, welche den Charakter einer ganzen rationalen Function hat.

früher gefunden stetig ist, so wird mit abnehmendem Werthe von δ die Differenz $f(x \pm \delta) - f(x)$ kleiner als eine beliebig kleine Grösse, d. h. $f(x)$ ist eine stetige Function.

Der Satz gilt auch für den Fall, dass an den Grenzen des Convergenzintervalles für X die Reihe (bedingt oder unbedingt) convergirt: es wird

$$\operatorname{Lim} f(X - \delta) = f(X). \quad (\text{Für } \delta = 0.) \quad \frac{X-\delta}{X} < 1.$$

Denn es wird hier:

$$\psi(X) = a_n X^n + a_{n+1} X^{n+1} + a_{n+2} X^{n+2} + \cdots$$

$$\psi(X - \delta) = a_n \left(\frac{X-\delta}{X}\right)^n X^n + a_{n+1} \left(\frac{X-\delta}{X}\right)^{n+1} X^{n+1} + \cdots$$

Haben die Glieder in $\psi(X)$ alle einerlei Vorzeichen (z. B. das positive), so erkennt man ohne weiteres, dass:

$$\psi(X-\delta) < \left(\frac{X-\delta}{X}\right)^n \cdot \psi(X) \quad \frac{X-\delta}{X} < 1,$$

ebenso wie $\psi(X)$ lediglich durch Wahl von n kleiner gemacht werden kann, als eine beliebig kleine Grösse ε.

Sind aber die Glieder in $\psi(X)$ von verschiedenem Zeichen, so bedarf es noch einer besonderen Untersuchung. Dieselbe wird durch den folgenden Hülfsatz vermittelt:

Bezeichnet man durch $t_0\, t_1\, t_2 \ldots t_m \ldots$ eine unendliche Reihe von beliebigen Grössen und ist die Grösse:

$$p_m = t_0 + t_1 + \cdots t_m$$

bei allen Werthen von m stets algebraisch kleiner als eine bestimmte Grösse G, dagegen grösser als g, so ist

$$g\varepsilon_0 < r = \varepsilon_0 t_0 + \varepsilon_1 t_1 + \cdots \varepsilon_m t_m < G\varepsilon_0,$$

wenn $\varepsilon_0\, \varepsilon_1 \ldots$ positive abnehmende Grössen bezeichnen.

Es ist

$$t_0 = p_0, \; t_1 = p_1 - p_0, \; t_2 = p_2 - p_1 \text{ u. s. w.}$$

also:

$$r = \varepsilon_0 p_0 + \varepsilon_1 (p_1 - p_0) + \varepsilon_2 (p_2 - p_1) + \ldots \varepsilon_m (p_m - p_{m-1}),$$

oder:

$$r = p_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + p_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \ldots p_{m-1} (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + p_m \varepsilon_m.$$

Da die Differenzen $(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \ldots$ positiv sind, so ist der Werth dieses Ausdruckes kleiner als:

$$G(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \cdots - \varepsilon_m + \varepsilon_m) = G\varepsilon_0,$$

dagegen grösser als:

$$g(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \cdots - \varepsilon_m + \varepsilon_m) = g\varepsilon_0.$$

Angewandt auf den vorliegenden Fall, in welchem $\left(\frac{X-\delta}{X}\right), \left(\frac{X-\delta}{X}\right)^2\cdots$ eine Reihe von positiv abnehmenden Grössen bezeichnen, ergiebt dieser Satz das Resultat: der Betrag von

$$\psi(X-\delta) \text{ ist kleiner als } \left(\frac{X-\delta}{X}\right)^n\cdot M,$$

unter M den numerisch grössten Werth verstanden, in der Reihe

$a_n X^n,\ a_n X^n + a_{n+1} X^{n+1},\ a_n X^n + a_{n+1} X^{n+1} + \cdots a_{n+k} X^{n+k}$ u. s. w.

Da die Reihe $f(X)$ convergent ist, so lässt sich eine Stelle n finden, von der ab der Werth von M kleiner wird als eine beliebig kleine Grösse ε, woraus das Behauptete hervorgeht.

V. *Die unendliche Potenzreihe wird differentiirt, indem man die Reihe aus den Differentialquotienten der einzelnen Glieder bildet.*

Die aus der Reihe:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots$$

abgeleitete:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots n a_n x^{n-1} + \cdots$$

convergirt sicher für alle Werthe von x, welche innerhalb des Convergenzintervalles der ursprünglichen Reihe liegen. Denn das Intervall der abgeleiteten Reihe wird nach dem Kriterium bestimmt aus der Gleichung:

$$\text{abs Lim}\,\frac{(n+1)\,a_{n+1}\,x}{n\,a_n} < 1,\ \text{oder abs } x < \text{abs Lim}\,\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}.$$

Da nun $\text{Lim}\,\frac{n}{n+1} = \text{Lim}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$ wird für $n=\infty$, so folgt:

$$\text{abs } x < \text{abs Lim}\,\frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Um nun den Differentialquotienten der stetigen Function $f(x)$ zu bestimmen, bilde man zunächst den Differenzenquotienten; wir wollen denselben z. B. rückwärts nehmen, um möglichen Falles auch die obere Grenze des Convergenzintervalles zu berücksichtigen:

$$\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x} = \frac{\varphi(x-\Delta x)-\varphi(x)}{-\Delta x} + \frac{\psi(x-\Delta x)-\psi(x)}{-\Delta x}.$$

Bei einem noch so kleinen aber endlichen Werth Δx hat dieser in Δx stetige Ausdruck einen endlichen bestimmten Werth.

Bezeichnet man die unendliche Reihe $a_1 + 2a_2 x + \cdots n a_n x^{n-1}\cdots$ mit $\chi(x)$, den Rest mit $R_n(x)$, so erhält diese Gleichung die Form:

$$\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x} = \chi(x-\Theta\Delta x) - R_n(x-\Theta\Delta x) + \frac{\psi(x-\Delta x)-\psi(x)}{-\Delta x}.$$

Hält man den Werth von Δx fest und lässt n beliebig wachsen, so ändert sich auf der rechten Seite zwar der Werth von Θ. Da aber

das Restglied einer Potenzreihe die Eigenschaft hat, dass von einem bestimmten n ab $R_n(x)$ beliebig klein wird für alle Werthe zwischen x und $x - \Delta x$, so folgt, weil auch der letzte Quotient mit wachsenden Werthen von n beliebig klein gemacht werden kann:

$$\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x} = a_1 + 2a_2(x - \Theta\Delta x) + 3a_3(x - \Theta\Delta x)^2 + \cdots$$

Denn weil die stetige Function $\chi(x)$ dem Differenzenquotienten im Intervalle von χ bis $x - \Delta x$ beliebig nahe kommt, so muss es (vergl. S. 29) auch eine Stelle geben, wo beide gleich sind. Der Differentialquotient $f'(x)$ geht aus dem Differenzenquotienten durch stetigen Uebergang für $\Delta x = 0$ hervor. Die rechte Seite aber ist, so lange sie überhaupt convergirt, nach Satz IV eine stetige Function der Variabelen $x - \Theta\Delta x$, folglich wird für $\Delta x = 0$:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots,$$

was zu beweisen war. Der rückwärts genommene Differentialquotient der unendlichen Potenzreihe ist eine stetige Function von x. Für den vorwärts genommenen erhält man in derselben Weise die nämliche Reihe.

45. Wendet man diese Sätze auf die Reihen an:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + \cdots = \sin x,$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots = \cos x,$$

so erkennt man, dass jede dieser Reihen unbedingt convergirt, und zwar für alle endlichen Werthe von x, denn es ist

$$\text{abs}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1!} : \frac{x^{2n-1}}{2n-1!}\right] = \text{abs}\left[\frac{x^2}{2n\cdot(2n+1)}\right] = 0,$$

$$\text{abs}\left[\frac{x^{2n}}{2n!} : \frac{x^{2n-2}}{2n-2!}\right] = \text{abs}\left[\frac{x^2}{(2n-1)\cdot 2n}\right] = 0. \quad (n = \infty.)$$

Sonach sind die durch die Reihen dargestellten Functionen für alle Werthe von x stetig. Ferner wird

1) $\frac{d\sin x}{dx} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{2n!} \cdots$, d. h. gleich $\cos x$.

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \cdots (-1)^n \cdot \frac{x^{n2-1}}{2n-1!} \cdots,$$

d. h. gleich $-\sin x$.

Sodann folgt aus den Reihen:

2) $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$.

Entwickelt man, da die Gleichungen 1) lehren, dass alle Ableitungen endlich und stetig bleiben auch für $n = \infty$, $\cos(x+y)$ gemäss der Taylor'schen Reihe nach Potenzen von y, so folgt:

$$\cos(x+y) = \cos x + y\,\frac{d\cos x}{dx} + \frac{y^2}{2!}\,\frac{d^2\cos x}{dx^2} + \frac{y^3}{3!}\,\frac{d^3\cos x}{dx^3} + \frac{y^4}{4!}\,\frac{d^4\cos x}{dx^4} + \cdots$$

$$= \cos x - y\sin x - \frac{y^2}{2!}\cos x + \frac{y^3}{3!}\sin x + \frac{y^4}{4!}\cos x + \cdots$$

$$= \cos x\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - + \cdots\right) - \sin x\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right),$$

d. h.

3) $$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

In gleicher Weise findet man:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Damit ist das Additionstheorem, welches die Basis unserer früheren Berechnungen bildete, unabhängig von der geometrischen Betrachtung bewiesen.

Aus der Gleichung 3) folgt, wenn statt y $-y$ gesetzt wird, zufolge der Gleichung 2): $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. Nimmt man $x = y$ an, so ergiebt sich der Satz:

4) $$1 = \cos x^2 + \sin x^2.$$

Es erübrigt noch die Periodicität der beiden Functionen zu zeigen. Zu dem Zwecke bemerke man an der Beschaffenheit der Glieder beider Reihen, dass $\sin x$ und $\cos x$ positiv bleiben, wenn x von 0 bis 1 wächst, woraus hervorgeht, dass innerhalb dieses Intervalles $\sin x$ eine von 0 an wachsende, $\cos x$ eine von 1 an abnehmende Function ist, denn der Differentialquotient der ersten Function ist positiv, der der zweiten ist negativ. Da nun bei Berücksichtigung der Anfangsglieder:

$$\sin 1 > 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}, \quad \cos 1 < 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!},$$

so folgt, dass

$$\sin 1 - \cos 1 > \frac{7}{24} + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}\right) + \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{8!}\right),$$

also $\sin 1 > \cos 1$. Mithin muss zwischen 0 und 1 ein Werth liegen, für welchen $\sin x = \cos x$ ist. Bezeichnet man diesen Werth mit $\frac{1}{4}\pi$ (< 1), so ist zufolge der Gleichung 4)

$$\sin\frac{1}{4}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi = +\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Da nun:

$$\cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2, \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x,$$

so wird:

$$\cos\frac{1}{2}\pi = 0, \quad \sin\frac{1}{2}\pi = 1;$$

ferner:

$$\cos\pi = -1, \quad \sin\pi = 0; \quad \cos 2\pi = 1, \quad \sin 2\pi = 0.$$

Darnach wird:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x,$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos x, \quad \sin(x+\pi) = -\sin x,$$
$$\cos(x+2\pi) = \cos x, \quad \sin(x+2\pi) = \sin x.$$

Die Zahl 2π ist die Periode. Der Verlauf der Functionen zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ lässt sich noch folgendermassen bestimmen:

Es ist:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = (\cos x - \sin x)\,\frac{1}{2}\sqrt{2},$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = (\cos x + \sin x)\,\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

So lange $x < \frac{\pi}{4}$, ist die Differenz $\cos x - \sin x$ immer positiv, daher ist im Intervalle $x = \frac{\pi}{4}$ bis $x = \frac{\pi}{2}$, $\cos x$ eine vom Werthe $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ bis zum Werthe Null stetig abnehmende, $\sin x$ eine vom Werthe $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ bis zum Werthe Eins stetig wachsende Function. Die Zahl π, welche hiernach rein arithmetisch definirt ist, wird bei den cyclometrischen Reihen berechnet werden. Damit sind die wesentlichen Eigenschaften der Functionen unmittelbar aus den sie definirenden Potenzreihen erkannt. Fortan soll unter $\sin x$, $\cos x$ stets nur eine symbolische Darstellung der betreffenden Potenzreihe verstanden werden; $\arcsin x$, $\arccos x$ sind dann als die inversen Functionen definirt.

46. Die Binomialreihe.

$y = f(x) = (1+x)^m$. $x > -1$. m beliebig. y stets positiv.

Für $x = 0$ ist der Werth von y und aller Ableitungen bekannt; denn es ist

$$f^n(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

Diese Ableitungen sind stetige Functionen, so lange $x > -1$; also:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{n-1!}x^{n-1} + R;$$

$$R = m_n x^n (1+\Theta x)^{m-n}, \text{ oder } R = m_n n x^n (1-\Theta)^{n-1}(1+\Theta x)^{m-n};$$

$$m_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}.$$

Es ist zweckmässig, die zweite Form des Restgliedes zu betrachten. Da $x > -1$, so ist $(1+\Theta x)$ für alle Werthe von Θ wie erforderlich eine positive Zahl. Man setze:

$$\frac{(1-\Theta)x}{1+\Theta x} = z, \quad (1+\Theta x)^{m-1}\cdot x = E,$$

so ist:

$$R = m \cdot \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdots \frac{m-k}{k} \cdots \frac{m-(n-1)}{n-1} z^{n-1} E$$

$$= m \cdot \frac{(m-1)z}{1} \cdot \frac{(m-2)z}{2} \cdots \frac{(m-k)z}{k} \cdots \frac{(m-(n-1))z}{n-1} \cdot E.$$

Die Factoren E und m sind endlich. Das Product wird sicher die Null zur Grenze haben, wenn seine Factoren von einer Stelle ab echte Brüche sind und für $n = \infty$ echte Brüche bleiben. Denn ist G der numerisch grösste der Brüche zwischen $\frac{(m-k)z}{k}$ und $\frac{m-(n-1)}{n-1} z$, so ist das Product dieser Factoren absolut genommen kleiner als G^{n-k}; solch eine Potenz hat aber die Null zur Grenze. Hingegen wird das Product sicherlich über alle Grenzen wachsen, falls die Factoren von einer Stelle ab grösser als eins werden und bleiben.

Da nun aber mit wachsendem n der Betrag von $\frac{m-(n-1)}{n-1} z$ dem Betrage von z beliebig nahe kommt, so muss der Betrag von z kleiner als eins sein; also

für $x > 0$ $\frac{(1-\Theta)x}{1+\Theta x} < 1$, oder $(1-\Theta)x < 1 + \Theta x$, d. h. $x < 1$,

für $x < 0$ $\frac{(1-\Theta)x}{1+\Theta x} > -1$, oder $(1-\Theta)x > -1 - \Theta x$, d. h. $x > -1$.

Resultat: Wenn $-1 < x < +1$, so ist für jedes m die positive Function $(1+x)^m$ mit beliebiger Annäherung aus der unendlichen Summe zu berechnen:

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{n-1!} x^{n-1} + \cdots {}^{*)}.$$

Der Fehler, welchen man begeht, wenn man die Reihe beim n^{ten} Gliede abbricht, ist höchstens gleich dem Maximalwerthe des Restgliedes:

$$m_n x^n (1+x)^{m-n} \text{ oder } m_n x^n,$$

je nachdem $x <$ oder > 0.

Man erkennt aus der vorstehenden Betrachtung, dass (mit Ausnahme ganzzahliger und positiver Werthe von m, bei welchen die Reihe abbricht) für $x > +1$ oder < -1 die Reihenglieder ihrem Betrage nach über jede Grenze hinaus wachsen, so dass die Reihe nicht mehr convergirt.

Die Grenzfälle: $x = +1$ oder -1 erfordern eine besondere Betrachtung, die sich vermittelst der Restbestimmung, da man den Maximalwerth für $(1-\Theta)^{n-1}$, $(1+\Theta x)^{m-n}$ berücksichtigen muss, nicht ohne weiteres erledigen lässt. Zunächst ist deutlich, wenn die Reihe

---

*) Newton in den Briefen für Leibnitz vom 18. Juni u. 24. October 1676.

für diese Grenzen überhaupt convergirt, so muss sie bezüglich den Werth 2^m und 0^m darstellen; denn so lange die Potenzreihe convergirt, ist sie eine stetige Function von x und muss also denselben Werth annehmen, wie die stetige Function: $(1+x)^m$, mit der sie für alle Werthe von x innerhalb dieser Grenzen übereinstimmt.

Ist $m > 0$ und $x = -1$, so erhält die Reihe die Form:

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{2!} - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cdots (-1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} \cdots$$

In dieser Reihe werden die Glieder von einer Stelle ab, nämlich wenn $n > m$, alle dasselbe Zeichen bekommen. Die Summe von 2, 3, ... $n+1$ Gliedern wird aber:

$$-\frac{m-1}{1}, \frac{(m-1)(m-2)}{2!}, -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3!}, \cdots (-1)^n \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{n!}.$$

Hier wird jedes Glied seinem absoluten Betrage nach schliesslich kleiner als das vorhergehende; man hat also eine Reihe von Zahlen mit einerlei Vorzeichen, von denen jede folgende kleiner ist als die vorhergehende. Diese Zahlenreihe besitzt also eine bestimmte Grenze und diese Grenze ist zufolge der obigen Bemerkung Null.

Für $x = +1$ erhält man die Reihe:

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \cdots \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} \cdots$$

Hier werden die Glieder von einer Stelle ab ihr Vorzeichen wechseln; die Reihe convergirt aber, und zwar unbedingt, weil nach dem vorigen Ergebniss die Reihe convergirt, auch wenn man den Gliedern allen dasselbe Vorzeichen giebt. Die Reihe stellt den Werth 2^m dar.

Ist $m = -\mu < 0$, so kann für $x = -1$ die Reihe nicht convergiren, denn es wird $(1-1)^{-\mu} = \infty$. Demnach kann für $x = +1$ die Reihe, wenn überhaupt, nur bedingt convergiren. Man erhält:

$$1 - \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu+1)}{2!} - \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{3!} \cdots (-1)^n \cdot \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)}{n!} \cdots$$

Diese Reihe, in welcher die Glieder wechselnde Vorzeichen haben, kann nicht convergiren, wenn $\mu - 1 > 0$, $\mu > 1$ ist; denn alsdann wachsen die Beträge der Glieder unaufhörlich.

Ist aber $\mu - 1 < 0$, so nehmen die Beträge der Glieder unaufhörlich ab, und werden dem früheren Ergebniss zufolge Null; (man setze $\mu - 1 = -m$).

Eine Reihe, deren Glieder alterniren, abnehmen und die Null zur Grenze haben, convergirt aber stets.

Denn bezeichnet man die Summe der Reihe von der n^{ten} Stelle ab mit:

$$R_n = (u_n - u_{n+1}) + (u_{n+2} - u_{n+3}) \ldots$$

oder:

$$R = u_n - (u_{n+1} - u_{n-2}) - (u_{n-3} - u_{n-4}) \dots$$

so ersieht man, R_n ist positiv aber kleiner als u_n. Mit wachsenden Werthen von n hat es also, ebenso wie u_n, die Null zur Grenze.

Die Binomialreihe:

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \cdots$$

convergirt also unbedingt bei allen positiven Werthen von m auch für die Grenzen ± 1; dagegen muss bei negativen m, $m > -1$ sein, damit die Reihe auch für $x = +1$ convergire und zwar bedingt.

Wiewohl die Convergenz der Reihe beschränkt ist, so kann sie doch dazu benutzt werden, um eine beliebige Wurzel aus einer beliebigen Zahl auszuziehen; denn ist a die gegebene Basis, $m = \frac{p}{q}$ ein rationaler Bruch, so bestimme man eine Zahl b^q möglichst nahe an a und setze:

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(b^q - (b^q - a)\right)^{\frac{p}{q}} = b^p \left(1 - \frac{b^q - a}{b^q}\right)^{\frac{p}{q}},$$

so lässt sich das Binom entwickeln.

47. Die logarithmische Reihe*).

$$y = f(x) = l(1 + x), \text{ so ist } f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}\, n-1!}{(1+x)^n}, \quad x > -1,$$

$$l(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n-1} + R_n$$

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{(1+\Theta x)^n}, \text{ oder } (-1)^{n-1} \cdot \frac{(1-\Theta)^{n-1} x^n}{(1+\Theta x)^n}.$$

Das Restglied in der zweiten Form convergirt nach Null, wenn

$$\text{abs}\left[\frac{(1-\Theta)x}{1+\Theta x}\right] < 1, \text{ d. h.} -1 < x < +1.$$

Die erste Form des Restgliedes zeigt, dass die Reihe noch convergent bleibt für $x = 1$.

Es ist also

$$l(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \cdots, \quad -1 < x \leqq +1,$$

und insbesondere:

$$l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$$

---

*) Nic. Mercator (Logarithmotechnica 1668) und Jacob Gregory (1636—1675) (Exercit. geometr. 1668); letzterem verdankt man in demselben Werke die Reihe für arctg x.

Die letzte Reihe liefert ein Beispiel für eine blos bedingt convergente Reihe; denn die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

oder auch die Reihen:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdots \text{ und } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \cdots$$

convergiren nicht, wiewohl ihre Glieder abnehmen und nach Null convergiren, vielmehr wächst die Summe dieser Reihen über jeden Betrag hinaus; denn es ist:

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \; \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}, \; \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}, \cdots$$

$$\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{1}{2} \text{ u. s. w.*)}.$$

Um brauchbare Reihen für die Berechnung des Logarithmus jedweder positiven Zahl zu erhalten, setze man in die gefundene Reihe $-x$ statt x, so wird: $(x < 1)$

$$l(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots - \frac{x^{n-1}}{n-1} + R',$$

also:

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right] + R - R',$$

---

*) Die oben stehende divergente Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots$ heisst die harmonische Reihe. Für spätere Anwendungen ist es wichtig zu bemerken, dass die Reihe

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{5^\mu} \cdots$$

für alle Werthe $\mu > 1$ convergirt. Denn gruppirt man ebenso wie oben

$$\frac{1}{1^\mu} = \frac{1}{1^\mu},$$

$$\frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} < 2 \cdot \frac{1}{2^\mu} = \frac{1}{2^{\mu-1}},$$

$$\frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{5^\mu} + \frac{1}{6^\mu} + \frac{1}{7^\mu} < 4 \cdot \frac{1}{4^\mu} = \left(\frac{1}{2^{\mu-1}}\right)^2,$$

$$\frac{1}{8^\mu} + \frac{1}{9^\mu} + \cdots \cdots \frac{1}{15^\mu} < 8 \cdot \frac{1}{8^\mu} = \left(\frac{1}{2^{\mu-1}}\right)^3,$$

so sieht man, dass die Summe von beliebig vielen Gliedern der Reihe kleiner bleibt, als die Summe einer entsprechenden Anzahl von Gliedern in der geometrischen Progression des echten Bruches $\frac{1}{2^{\mu-1}}$.

und da $R - R'$ im angenommenen Intervalle nach Null convergirt, so ist:

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \cdots\right] \quad 0 < x < 1.$$

Substituirt man nun:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{z+a}{z} \text{ also } x = \frac{a}{2z+a} \quad a > 0,$$

so wird: $\quad 0 < z < \infty,$

$$l(z+a) = l(z) + 2\left[\frac{a}{2z+a} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2z+a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a}{2z+a}\right)^5 \cdots\right]$$

z. B. $z = 1,\ a = 1.$

$$l(2) = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \cdots\right]$$

$z = 2,\ a = 1.$

$$l(3) = l(2) + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \cdots\right].$$

Um von den natürlichen Logarithmen, mit der Basis e, zu den gewöhnlichen mit der Basis 10 überzugehen, berechne man, weil ${}^{10}\log a = {}^{e}la : {}^{e}l10$ die Zahl:

$$l(10) = l(2) + l(5) = 2{,}302\,585\,092\,9 \ldots,$$

so hat man alle Werthe mit $\frac{1}{l(10)} = 0{,}434\,294\,481\,9 \ldots$ zu multipliciren.

48. Die cyclometrische Reihe: $y = \operatorname{arctg} x$.

Für die cyclometrische Function $f(x) = \operatorname{arctg} x$ wurde im § 36 eine independente Darstellung der n^{ten} Ableitung gegeben:

$$f^n(x) = n - 1!\cos y^n \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{n-1!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin n\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Da nun für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, so folgt, dass für diesen Werth:

$$f^2(0) = 0,\ f^4(0) = 0,\ f^6(0) = 0 \ldots f^{2k}(0) = 2k - 1!\sin\frac{2k}{2}\pi = 0,$$

$$f^1(0) = 1,\ f^3(0) = -2!,\ f^5(0) = 4!,\ f^{2k+1}(0) = 2k!\sin\frac{2k+1}{2}\pi = $$
$$= (-1)^k 2k!.$$

Das Restglied R wird nach der ersten Formel gleich:

$$\frac{n-1!\,x^n}{n!\,(1+\Theta^2x^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \sin n\left(\operatorname{arctg}\Theta x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{x^2}{1+\Theta^2x^2}\right)^{\frac{n}{2}} \sin n\left(\operatorname{arctg}\Theta x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Der erste Factor convergirt nach Null, der dritte hat einen endlichen Werth. Der mittlere wird für $n = \infty$ nicht unendlich, wenn der Quotient in der Klammer für alle Werthe von Θ gleich oder kleiner als 1 ist, d. h. wenn $x^2 \leqq 1$. Demnach ist:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \cdots \quad -1 \leq x \leq +1.$$

Diese Reihe liefert zu jedem echten Bruchwerthe von x den zugehörigen Bogen zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$. Der Arcus, dessen Tangente den Werth $+1$ hat, ist gleich $\frac{\pi}{4}$; also lässt sich diese für die Perioden der goniometrischen Functionen wichtige Zahl durch die Form berechnen:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \cdots$$

Die Convergenz der Reihe ist eine sehr langsame, d. h. man muss viele Glieder summiren, um einen einigermassen angenäherten Werth zu erhalten*); für die Berechnung von π kann man stärker convergirende Reihen bilden. Ist x ein Bruch, klein genug um rasch den Werth von $\varphi = \operatorname{arctg} x$ nach der obigen Reihe angenähert zu finden, so bilde man tang $(m\varphi)$, unter m eine ganze positive Zahl verstanden, die so gewählt sei, dass $m\varphi$ nahezu gleich $\frac{\pi}{4}$, also $m\varphi - \frac{\pi}{4}$ ein sehr kleiner Bogen wird; dadurch wird auch $\operatorname{tg}\left(m\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} m\varphi - 1}{1 + \operatorname{tg} m\varphi}$ ein kleiner Bruch, also ist $m\varphi - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} m\varphi - 1}{1 + \operatorname{tg} m\varphi}\right)$ mit rascher Convergenz aus der Reihe zu berechnen.

Für $x = \frac{1}{5}$, $m = 4$ wird $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi^2} = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{120}{119}$

$$\frac{\operatorname{tg} 4\varphi - 1}{1 + \operatorname{tg} 4\varphi} = \frac{1}{239},$$

also**):

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 - \right]$$

$$- \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 - \cdots\right]$$

$$\pi = 3{,}141592653 \ldots$$

Um für Werthe der Tangente, deren Betrag grösser als 1 ist, den zugehörigen Bogen zu berechnen, beachte man, dass, für

---

*) Durch Addition einer ungeraden Anzahl von Gliedern in der obigen Reihe erhält man eine obere, durch Summation einer geraden Anzahl eine untere Grenze des gesuchten Werthes. Sollen z. B. die beiden Grenzen nur noch in der 11ten Decimalstelle differiren, so müsste man $\frac{1}{2} \cdot 10^{10}$ Stellen summiren.

**) Zuerst aufgestellt von dem Engländer Machin, der π auf 100 Decimalstellen berechnete 1706. (Siehe Klügel: Math. Wörterbuch: Cyclotechnie.) Um π auf 10 Stellen genau zu erhalten, genügt es hier 15 Glieder der ersten und 8 Glieder der zweiten Reihe zu summiren.

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2},\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$$

und für

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0,\ \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Demnach wird, indem man $\operatorname{tg}\varphi = x$ setzt, $\pm\frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $(x \gtrless 0)$, also

$$\operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2} - \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \cdots\right\}.$$

Damit sind wir zu einer Reihe mit wachsenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ oder mit absteigenden von x gelangt.

49. In den Reihen für $\sin x$ und $\operatorname{arctg} x$ kommen nur ungerade Potenzen von x vor, in der für $\cos x$ nur gerade (einschliesslich der Null). Die beiden ersten Functionen sind dadurch als unpaare, die andern als paare gekennzeichnet.

Eine unpaare Function $f(x)$ lässt sich allgemein durch die Eigenschaft definiren, dass $f(x) = -f(-x)$, bei einer paaren ist $f(x) = f(-x)$. Daraus folgt, dass eine unpaare Function, falls sie an der Stelle $x = 0$ stetig ist, dort den Werth Null haben muss; weiter folgt durch Differentiation, dass alle ihre Ableitungen ungerader Ordnung paare Functionen sind, die Ableitungen gerader dagegen unpaare. Diese letzteren müssen an der Stelle Null deshalb ebenfalls alle verschwinden. Bei der paaren Function dagegen werden alle Ableitungen ungerader Ordnung auch unpaare Functionen und bekommen für $x = 0$ den Werth Null.

50. Die Entwickelung der Taylor'schen Reihe beruht auf der Bildung der n^{ten} Ableitung. Damit ist zugleich die Grenzé ihrer Anwendbarkeit ausgesprochen; denn wird für eine Function der allgemeine Ausdruck dieser zu complicirt, so verliert diese Methode an Brauchbarkeit. Aus der für $\arcsin x$ aufgestellten Recursionsformel ist es z. B. nicht schwer, die Werthe der Ableitungen an der Stelle $x = 0$ allgemein zu berechnen, aber für die Bildung des Restgliedes ist dieselbe nicht geeignet*). Man wird daher vor allem bestrebt sein müssen, die Frage nach der Convergenz einer Potenzreihe und nach der Entwickelbarkeit einer Function lediglich aus den Eigenschaften der Function selbst, nicht wie es im vorstehenden geschehen ist auch aus den Eigenschaften aller ihrer Ableitungen, zu beantworten. Sodann aber wird man einsehen, dass eine Potenzreihe, welche man auf irgend welche Weise für eine Function in einem Intervall gewonnen hat, mit

*) Die Entwickelung von $\arcsin x$ in eine Reihe siehe Integralrechnung. Buch 3. Cap. 4.

der Taylor'schen Reihe identisch sein muss, weil $f(x)$ nicht durch zwei verschiedene Potenzreihen dargestellt werden kann. Die Untersuchungen erfordern, sollen sie vollständig sein, die Erweiterung des Zahlengebietes und dafür müssen erst durch die Theorie der Functionen mit mehr als einer unabhängigen Variabelen neue Begriffe eingeführt werden.

Neuntes Capitel.

Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

51. Wenn der Werth einer Veränderlichen z durch die Werthe zweier von einander unabhängiger Veränderlicher x und y derart bestimmt ist, dass zu jedem Werthe von x im Intervall von a bis b und zu jedem Werthe von y im Intervall α bis β ein oder auch mehrere Werthe von z gehören, so heisst z eine Function der beiden unabhängigen Variabelen x und y. Auch hierbei können wir die Functionen nach der Art ihres analytischen Ausdruckes classificiren in algebraische und transscendente, und die Form, in welcher die Function gegeben ist, kann eine explicite: $z = f(x, y)$ oder eine implicite: $f(x, y, z) = 0$, oder auch eine durch zwei Parameter vermittelte sein: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$. Der Gesammtverlauf der Function wird mit Hülfe des Cartesischen Coordinatensystems im Raume — am einfachsten mit Hülfe eines rechtwinkligen — veranschaulicht, indem man jedes Werthsystem: x und y durch einen Punkt in der horizontalen xy-Ebene darstellt und den zugehörigen Werth von z nach oben oder nach unten, je nachdem er positiv oder negativ ist, auf einer Strecke senkrecht zur Ebene aufträgt. Der Endpunkt dieser Strecke repräsentirt das zusammengehörige Werthsystem $x\ y\ z$. Das Intervall von $x = a$ bis b, $y = \alpha$ bis β bestimmt in der xy-Ebene ein Rechteck, über welches sich die construirten Punkte lagern, das Gebiet, für welches die Function definirt ist. Durchlaufen x und y alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so breiten sich dieselben über die ganze Ebene aus. Eine Uebersicht über die Vertheilung der Punkte wird erzielt, indem man der einen Variabelen z. B. x einen festen Werth giebt, zunächst $x = a$, und y verschiedene Werthe zwischen α und β ertheilt; durch Verbindung der so construirten Punkte entsteht ein Polygon im Raume, dessen Projection in der xy-Ebene die Gerade $x = a$ ist. Durch Abänderung des Werthes x erhält man für die gleichen Werthe von y andere Polygone; denkt man sich die Punkte, für welche y denselben Werth erhalten hat, verbunden, so entsteht ein Netz, dessen viereckige Maschen durch weitere Einschaltung von Punkten immer mehr verkleinert werden, und welches

eine bestimmte Fläche zur Grenze haben kann. Diese Fläche ist alsdann das totale Bild der Function, ihre Durchschnitte mit Ebenen, parallel der yz- oder xz-Ebene, sind Curven, welche die Grenzen der anfangs construirten Polygone bilden.

52. Wir betrachten die explicite Function $z = f(x, y)$, die wir zugleich als eindeutig voraussetzen, und fragen, wann dieselbe in einem Gebiete, für welches sie bestimmte Werthe hat, stetig ist. Irgend eine Stelle des Gebietes denke man sich mit einem kleinen Rechteck umschlossen, dessen Seiten parallel der Abscissenaxe die Länge $2h$, parallel der Ordinatenaxe die Länge $2k$ haben, so dass $x \pm h$, $y \pm k$ die Coordinaten der vier Eckpunkte werden. Jede Stelle in diesem Bereiche oder auf der Grenze desselben hat dann die Coordinaten $x \pm \Theta h$, $y \pm \eta k$, $(0 \leq \Theta \leq 1,\ 0 \leq \eta \leq 1)$. Bezeichnet man den zugehörigen Functionswerth mit $f(x \pm \Theta h,\ y \pm \eta k)$, *so soll die Function an der Stelle xy nur dann stetig genannt werden, wenn sich endliche Werthe von h und k ausfindig machen lassen, für welche die Differenz: $f(x \pm \Theta h,\ y \pm \eta k) - f(x, y)$ bei jedem Werthe der unabhängigen Veränderlichen Θ und η ihrem absoluten Betrage nach kleiner wird, als eine vorgegebene beliebig kleine Zahl δ.* Dann und nur dann nämlich wird jede Zahlenreihe, welche man aus $f(x \pm \Theta h,\ y \pm \eta k$ $- f(x, y)$ erhält, wenn man Θ und η in irgend welcher Weise nach Null convergiren lässt, selbst die Null zur Grenze haben. Nothwendig zur Stetigkeit ist also, dass $f(x \pm \Theta h, y) - f(x, y)$ und ebenso $f(x,\ y \pm \eta k) - f(x, y)$ unendlich klein werden, oder in anderen Worten: dass $f(x, y)$ als Function allein der Veränderlichen x, oder allein der Veränderlichen y stetig sei; aber hinreichend ist dieses noch nicht. Es bezeichnet also verschiedenes, wenn man sagt $f(x, y)$ ist eine stetige Function der beiden Variabelen x und y, oder f ist eine stetige Function sowohl von x wie von y.

Dagegen kann man die obige Definition durch die ihr gleichwerthige ersetzen: Es muss sich an der Stelle xy ein endlicher Werth h und ein endlicher Werth k ausfindig machen lassen, so dass für alle Werthe gleich oder kleiner als h respective k, $f(x \pm \Theta h,\ y)$ eine stetige Function von y und $f(x,\ y \pm \eta k)$ eine stetige Function von x allein ist, dergestalt dass der Betrag:

$$\text{abs}\,[f(x \pm \Theta h,\ y \pm \eta k) - f(x \pm \Theta h,\ y)] < \delta$$

wird, für alle Werthe von η lediglich durch Wahl von k unabhängig von Θh, und analog:

$$\text{abs}\,[f(x \pm \Theta h,\ y \pm \eta k) - f(x,\ y \pm \eta k)] < \delta$$

für alle Werthe von Θ lediglich durch Wahl von h unabhängig von ηk.

Diese Bedingungen bezeichnet man in Worten: $f(x, y)$ muss eine gleichmässig stetige Function von x sowohl wie von y in der Umgebung der Stelle x, y sein.

Denn nach dieser Forderung ist auch, wenn in der zweiten Ungleichung $\eta = 0$ angenommen wird:

$$\text{abs}\,[f(x \pm \Theta h;\ y) - f(x,\ y)] < \delta \quad \text{(für alle Werth von } \Theta).$$

Diese Ungleichung zur ersten addirt, zeigt, dass

$$\text{abs}\,[f(x \pm \Theta h,\ y \pm \eta k) - f(x,\ y)]$$

für alle Werthe von Θ und η lediglich durch Wahl von h und k kleiner wird als die beliebig kleine Grösse 2δ.

Diese Formulirung ist deshalb nicht unwichtig, weil sie die Untersuchung der Stetigkeit einer Function mit zwei Veränderlichen auf die Untersuchung der **gleichmässigen Stetigkeit** in Bezug auf je eine der Veränderlichen reduciren lässt.

Beispiele: 1. Die Function $z = a\,x^\mu\,y^\nu$ (μ und ν ganzzahlig > 0) in welcher a eine beliebige Constante bedeutet, ist eine stetige Function beider Variabelen.

Es ist nämlich:

$$(y \pm \eta k)^\nu - y^\nu = (\nu_1\,(\pm \eta k)\,y^{\nu-1} + \nu_2\,(\pm \eta k)^2\,y^{\nu-2} + \cdots (\pm \eta k)^\nu)$$

seinem Betrage nach kleiner als:

$$N\,[(\eta k) + (\eta k)^2 + \cdots (\eta k)^\nu] = N\,\frac{(\eta k) - (\eta k)^{\nu+1}}{1 - (\eta k)},$$

unter N den grössten Betrag verstanden, der unter den Coefficienten in der obigen Klammer vorkommt. Nimmt man $\eta k < 1$, so ist der Betrag der Differenz:

$$(y \pm \eta k)^\nu - y^\nu < N \cdot \frac{\eta k}{1 - \eta k}\,.$$

Dem zufolge wird:

$$a\,(x \pm \Theta h)^\mu\,[(y \pm \eta h)^\nu - y^\nu] < a\,(x \pm \Theta h)^\mu \cdot \frac{\eta k}{1 - \eta k}\,N,$$

und soll dieser Werth bei allen Werthen von Θ und η kleiner sein als δ, so hat man, wenn mit X der grösste absolute Werth bezeichnet wird, den $(x \pm \Theta h)^\mu$ bei allen Werthen von Θ annimmt,

$$\frac{\eta k}{1 - \eta k} < \frac{\delta}{aXN} \text{ zu bestimmen, d. h. } k < \frac{\delta}{\delta + aXN}.$$

Die gleiche Betrachtung zeigt, dass auch die Differenz:

$$a\,(y \pm \eta k)^\nu\,[(x \pm \Theta h)^\nu - x^\nu] < \delta \text{ ist, wenn } h < \frac{\delta}{\delta + ayM}.$$

Die Betrachtungen an diesem Beispiele dienen zum Beweise des allgemeinen Satzes:

Ist $f(x,\ y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$ und sind φ und ψ stetige Functionen der Variabelen x und y, so ist f eine gleichmässig stetige Function

sowohl von x wie von y, d. h. eine stetige Function beider Variabelen. Denn es lässt sich

$$\varphi(x \pm \Theta h)\,[\psi(y \pm \eta k) - \psi(y)] < \delta$$

machen, lediglich durch Wahl von k unabhängig von Θh, und

$$\psi(y \pm \eta k)\,[\varphi(x \pm \Theta h) - \varphi(x)] < \delta$$

lediglich durch Wahl von h unabhängig von ηk.

2. $z = \frac{1}{xy}$ wird unstetig in allen Punkten der Geraden $x = 0$ und der Geraden $y = 0$. Denn $\frac{1}{xy}$ ist für alle Werthe von x eine unstetige Function von y an der Stelle $y = 0$ und für alle Werthe von y eine unstetige Function von x an der Stelle $x = 0$.

3. $z = \frac{y}{x}$ ist unstetig in allen Punkten der Geraden $x = 0$ bei endlichen Werthen von y und völlig unbestimmt im Punkte $x = 0$, $y = 0$.

4. Definirt man die Function $z = \sin\left(\operatorname{arctang}\frac{y}{x}\right)$*) für $x = 0$ so, dass man sie bei allen Werthen von y gleich Null nimmt (auch für $y = 0$), so ist sie im Punkte $x = 0$, $y = 0$ eine unstetige Function, wiewohl wenn man $x = 0$ setzt, z eine stetige Function von y allein ist, und wenn man $y = 0$ setzt eine stetige Function von x; in beiden Fällen ist z constant gleich Null. Bildet man aber die Differenzen für die Umgebung dieser Stelle, so bleibt

$$\sin\left(\operatorname{arctang}\frac{\pm \eta k}{\pm \Theta h}\right) < \delta$$

weder durch Wahl von k unabhängig von Θh, noch durch Wahl von h unabhängig von ηk. Denn damit nur der Betrag der linken Seite kleiner als $\frac{1}{\sqrt{2}}$ werde, muss bei gegebenem Θh k kleiner gewählt werden als Θh, es ist also nicht unabhängig von h. Setzt man $y = kx$, so ist die Function $\sin(\operatorname{arctg} k)$ stetig, aber an der Stelle $x = 0$ sollte sie Null sein.

5. Bildet man die Function $z = x^\alpha y^{-\beta}$, in welcher α und β positiv sind und und $\beta \leqq \alpha$ ist, und ersetzt man dieselbe für $y = 0$ bei allen Werthen von x durch den Werth $z = 0$, so ist sie eine unstetige Function an der Stelle $x = 0$, $y = 0$, wiewohl sie, wenn man $y = ax$ setzt, eine stetige Function: $z = x^{\alpha-\beta}\,a^{-\beta}$ der Variabelen x wird, also stetig ist auf jeder vom Nullpunkt ausgehenden Richtung. Denn es ist auch hier nicht möglich, einen von ηk unabhängigen endlichen h-Werth ausfindig zu machen, für welchen

$$(\pm \Theta h)^\alpha\,(\pm \eta k)^{-\beta} < \delta$$

bleibt.

*) Thomae: Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale S. 31.

In einem Gebiete, in welchem (einschliesslich der Grenzen) das Kriterium der Stetigkeit ausnahmslos für jeden Punkt gilt, ist $f(x, y)$ eine gleichmässig stetige Function beider Variabelen, d. h. es lässt sich ein Werth für h und einer für k angeben, die, welchen Werth auch x und y haben mögen, hinreichend sind, um die Ungleichung

$$f(x \pm \Theta h, y \pm \eta k) - f(x, y) < \delta \qquad (0 \leq \Theta \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1)$$

zu befriedigen. Denn liessen sich solche Minimalwerthe von h und k nicht angeben, so müssten Stellen im Gebiete vorhanden sein, in deren unmittelbarer Umgebung das Kriterium der Stetigkeit nur dadurch erfüllt werden kann, dass h und k schliesslich unter jeden angebbaren Werth herabsinken. Dass dieses nicht der Fall sein kann, wird folgendermassen erkannt: Angenommen es sei $x_1\, y_1$ solch eine Stelle; man bestimme für einen Punkt $x_1 - \varepsilon$, $y_1 - \varepsilon'$ in beliebiger Nähe derselben die Grössen h und k derart, dass

$$\text{abs}\,[f(x_1 - \varepsilon \pm \Theta h, y_1 - \varepsilon' \pm \eta k) - f(x_1 - \varepsilon, y_1 - \varepsilon') < \delta.$$

Die Annahme besagt nun, dass während ε und ε' nach Null convergiren, auch die Grössen h und k unter jeden angebbaren Werth herabsinken, damit die Ungleichung bestehen bleibe, dergestalt, dass $-\varepsilon + \Theta h$ und $-\varepsilon' + \eta k$ stets kleiner als Null bleiben, so dass die Stelle $x_1\, y_1$ bei diesem Processe nicht erreicht wird.

Andererseits lässt sich aber an der Stelle $x_1\, y_1$ ein endlicher Bereich $\pm \Theta h$, $\pm \eta k$ angeben, für welchen

$$\text{abs}\,[f(x_1 \pm \Theta h, y_1 \pm \eta k) - f(x_1\, y_1)] < \delta.$$

Dieser endliche Bereich umschliesst auch die Punkte $x_1 - \varepsilon$, $y_1 - \varepsilon'$ (denn ε und ε' convergiren nach Null, h und k haben einen festen endlichen Werth) und folglich ist auch für jeden dieser Punkte derselbe angebbare Bereich ausreichend zur Erfüllung der Ungleichung, so dass also die getroffene Annahme im Widerspruche mit der Stetigkeitsbedingung steht.

53. Die ersten Differentialquotienten der Function an einer Stelle, in deren Umgebung sie stetig ist, können auf mannigfache Weise gebildet werden: Lässt man erstlich y ungeändert, während x um Δx wächst oder abnimmt, und bezeichnet man die zugehörige Aenderung von z mit $\Delta_x z$, so ist der Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x \pm \Delta x) - f(x, y)}{\pm \Delta x}.$$

Wir nehmen an, derselbe nähere sich, wenn Δx nach Null convergirt, einem bestimmten Grenzwerthe, sowohl für das + wie für das — Zeichen, beide Grenzwerthe brauchen aber nicht identisch zu sein; man bezeichnet ihn nach Jacobi mit $\frac{\partial z}{\partial x}$ oder $\frac{\partial f}{\partial x}$ und nennt ihn die vor-

wärts, resp. rückwärts genommene partielle Ableitung von z nach x, so ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{Lim} \frac{f(x \pm \Delta x, y) - f(x, y)}{\pm \Delta x} \text{ für } \Delta x = 0.$$

Die partielle Ableitung von z nach y wird nun zweitens in derselben Weise erhalten, indem x ungeändert bleibt:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{Lim} \frac{f(x, y \pm \Delta y) - f(x, y)}{\pm \Delta y} \quad \text{für } \Delta y = 0.$$

Selbstverständlich besteht auch hier der Satz: Wenn die vorwärts genommene partielle Ableitung nach x oder nach y mit der rückwärts genommenen identisch ist, so gilt der Mittelwerthsatz:

$$f(x + h, y) - f(x, y) = h f'(x + \Theta h, y),$$
$$f(x, y + k) - f(x, y) = k f'(x, y + \eta k),$$

Θ und η werden bezüglich von y und x abhängig sein.

Wird aber x um Δx, und y gleichzeitig um Δy geändert, wobei das Verhältniss $\Delta y : \Delta x$ noch ganz beliebig sein kann, jedoch endlich, so entsteht die Zunahme:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Auch hierbei ist die Frage zu beantworten, welchem Grenzwerth nähert sich $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ oder auch $\frac{\Delta z}{\Delta y}$, wenn Δx und Δy in irgend welcher Weise nach Null convergiren, so jedoch, dass ihr Verhältniss stets einen endlichen Grenzwerth $\frac{dy}{dx}$ behält, vorausgesetzt, dass in der Umgebung dieser Stelle bestimmte Werthe der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ existiren. Es ist identisch:

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} +$$
$$+ \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Lässt man in dem ersten Quotienten der rechten Seite erst Δy zu Null werden, so erhält er den Werth $\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, welcher für verschwindendes Δx in $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ übergeht; wird aber umgekehrt erst Δx gleich Null gesetzt, so erhält man $\frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x}$ und dieser Ausdruck wird für Δy ebenfalls den Werth $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ nur dann annehmen, wenn diese Function in Bezug auf y stetig ist. Welcher Werth ergiebt sich nun, wenn Δy und Δx irgendwie gleichzeitig nach Null conver-

giren. Damit der Grenzwerth wiederum unabhängig von der Art der Convergenz gleich $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ werde, muss die Bedingung erfüllt sein, dass sich ein Δx und unabhängig davon ein Δy finden lässt, so dass der absolute Betrag der Differenz:

$$\text{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Theta\Delta x, y+\eta\Delta y)-f(x,y+\eta\Delta y)}{\Theta\Delta x}\right] < \delta$$

wird, wenn δ eine beliebige kleine Grösse bezeichnet, während die echten Brüche Θ und η alle möglichen Werthe erhalten. Diese Ungleichung sagt in Worte gefasst aus: Der Differenzenquotient muss eine gleichmässig stetige Function von Δx und von y sein.

Diese Bedingung ist nothwendig und hinreichend — sie lässt sich durch keine andere ersetzen. Der Differentialquotient geht durch stetigen Uebergang aus dem Differenzenquotienten hervor, und wir können daher leicht schliessen, dass aus dieser Forderung die Stetigkeit der Function $\frac{\partial f}{\partial x}$ in Bezug auf y nothwendig folgt, ohne dass darum diese die obige zu ersetzen geeignet ist. Denn da die Bedingung für alle Werthe von Δy unabhängig vom Werthe Δx erfüllt sein muss, so gilt sie auch für $\Delta x = 0$, d. h.

$$\frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y+\eta\Delta y)}{\partial x} < \delta. \qquad (0 \leqq \eta \leqq 1.)$$

Schreibt man die obige Ungleichung, indem man $\Theta = 1$, $\eta = 0$ setzt, in der Form

$$\text{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} - \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}\right]\frac{\Delta y}{\Delta x} < \delta,$$

so erkennt man, da dieselbe für noch so kleine Werthe von Δx und Δy gilt, deren Verhältniss einen beliebigen endlichen Grenzwerth k besitzen soll, dass auch die Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial y}$ in Bezug auf x in der obigen Bedingung enthalten ist, denn es muss

$$\text{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} - \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right] < \delta k,$$

also für $\Delta y = 0$ auch $\frac{\partial f(x+\Delta x, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} < \delta k$ sein.

Sonach lautet das Resultat

Falls an der Stelle xy, wo f stetig ist, der Differenzenquotient:

$$\frac{f(x+\Delta y, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}$$

eine gleichmässig stetige Function von Δx und y ist, so ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ eine stetige Function der Variabelen y, $\frac{\partial f}{\partial y}$ eine stetige Function der Varia-

belen x, und es wird bei allen Werthen von $dy : dx$ der totale Differentialquotient nach x gleich

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

oder symmetrischer geschrieben, das totale Differential gleich:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy,$$

d. h. gleich der Summe der partiellen Differentiale.

Die Differentialgleichung zeichnet sich von der Differentialquotientengleichung durch Symmetrie aus; sie hat aber, da auf beiden Seiten verschwindende (unendlich kleine) Grössen stehen, nur dadurch einen Sinn, dass sich aus ihr jeder Zeit eine Quotientengleichung bilden lässt.

In den meisten Fällen der Rechnung genügt es, die Bedingung des Satzes vom totalen Differentiale durch die engere zu ersetzen: Ist der vor- und rückwärtsgenommene Differentialquotient $\frac{\partial f}{\partial x}$ in der Umgebung einer Stelle eine stetige Function beider Variabelen x und y und hat $\frac{\partial f}{\partial y}$ einen bestimmten Werth, so ist auch

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy.$$

Denn alsdann kann man in der Gleichung:

$$\frac{f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x,\, y)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x,\, y+\Delta y)}{\Delta x} + \\ + \frac{f(x,\, y+\Delta y) - f(x,\, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

den ersten Quotienten durch den Mittelwerth:

$$\frac{\partial f(x+\Theta\Delta x,\, y+\Delta y)}{\partial x}$$

ersetzen, der für $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ in $\frac{\partial f}{\partial x}$ übergeht.

Beispiele.

1. Die Function $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist eindeutig und stetig auch an der Stelle $x = 0$, $y = 0$, aber ihre ersten Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

haben an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ keine bestimmten Werthe; es findet also hier der Satz vom totalen Differentiale nicht ohne weitere Festsetzungen über die partiellen Ableitungen Anwendung.

2. Ersetzt man in der Function $z = (3x + 3) + y$ alle Werthe $y = 0$ durch die Werthe $6x$, so ist die so gebildete Function in der Umgebung der Stelle $x = 1$, $y = 0$ stetig; aber $\frac{\partial f(1,\, 0)}{\partial x} = 6$, $\frac{\partial f(1,\, y)}{\partial x} = 3$

d. h. der partielle Differentialquotient nach x ist keine stetige Function von y; desgleichen wird $\frac{\partial f(1,0)}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial f(1+\Delta x, 0)}{\partial y} = \mp \infty$; es gilt also für die Function, an der Stelle an welcher sie stetig ist, doch nicht der Satz vom totalen Differentiale.

3. Ein Beispiel, bei welchem f stetig in beiden Variabeln und $\frac{\partial f}{\partial x}$ eine stetige Function von y ist, ohne dass der Satz vom totalen Differentiale gilt, bietet die Function $z = x \sin\left(4 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$ mit der Festsetzung, dass bei allen Werthen von y (auch bei $y = 0$) stets für $x = 0$ auch $z = 0$ sei. Diese Function ist stetig in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$. Es wird nun

$$\frac{\partial f(0, y)}{\partial x} = \operatorname{Lim} \frac{\Delta x \sin\left(4 \operatorname{arctg} \frac{y}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = 0,$$

also eine stetige Function von y. Dagegen ist

$$\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = \operatorname{Lim} \frac{x \sin\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{x}\right)}{\Delta y} = 4,$$

so lange x von 0 verschieden; während $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$ ist. Der Satz vom totalen Differentiale gilt hier nicht.

Die Bedingung, unter welcher der Satz vom totalen Differentiale besteht, ist die Bedingung für die Darstellbarkeit der Function durch eine Fläche. Wie wir von der Function einer Veränderlichen sagen: sie lässt sich an einer Stelle durch eine Curve darstellen, wenn die Verbindungslinien dieses Punktes mit benachbarten nach einer festen Grenzlage convergiren, so sagen wir von einer Function zweier Veränderlichen, sie lässt sich als Fläche an einer Stelle darstellen, wenn jede Ebene, welche durch den betrachteten Punkt und durch irgend zwei andere der Function angehörige Punkte gelegt wird, nach derselben festen Grenzlage convergirt, falls die beiden anderen Punkte an den ursprünglichen in irgend welcher Weise heranrücken. (Es ist eine Besonderheit, wenn eine Fläche an einem Punkte sich verhält wie ein Kegel an seiner Spitze; dabei kann nicht mehr von einer festen Ebene die Rede sein; die ersten partiellen Ableitungen werden unbestimmt.) Es seien die Coordinaten der Punkte bezüglich xyz; $x + \Delta_1 x$, $y + \Delta_1 y$, $z + \Delta_1 z$; $x + \Delta_2 x$, $y + \Delta_2 y$, $z + \Delta_2 z$, wobei:

$$z = f(x, y), \quad z + \Delta_1 z = f(x + \Delta_1 x, y + \Delta_1 y),$$
$$z + \Delta_2 z = f(x + \Delta_2 x, y + \Delta_2 y).$$

Die Gleichung einer Ebene, welche durch diese drei Punkte gelegt wird, lautet, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$\zeta - z = A(\xi - x) + B(\eta - y).$$

$$A = \frac{\Delta_1 z\,\Delta_2 y - \Delta_2 z\,\Delta_1 y}{\Delta_1 x\,\Delta_2 y - \Delta_2 x\,\Delta_1 y} = \frac{\frac{\Delta_1 z}{\Delta_1 x}\,\frac{\Delta_2 y}{\Delta_2 x} - \frac{\Delta_2 z}{\Delta_2 x}\,\frac{\Delta_1 y}{\Delta_1 x}}{\frac{\Delta_2 y}{\Delta_2 x} - \frac{\Delta_1 y}{\Delta_1 x}}$$

$$B = \frac{\Delta_2 z\,\Delta_1 x - \Delta_1 z\,\Delta_2 x}{\Delta_1 x\,\Delta_2 y - \Delta_2 x\,\Delta_1 y} = \frac{\frac{\Delta_2 z}{\Delta_2 x} - \frac{\Delta_1 z}{\Delta_1 x}}{\frac{\Delta_2 y}{\Delta_2 x} - \frac{\Delta_1 y}{\Delta_1 x}}.$$

Convergiren nun $\Delta_1 x$ und $\Delta_1 y$, desgleichen $\Delta_2 x$ und $\Delta_2 y$ nach Null, während die Grenzwerthe ihrer Verhältnisse bezüglich mit $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_2$ bezeichnet werden, so wird, falls der Satz vom totalen Differentiale gilt:

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta_1 x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)_1, \quad \frac{\Delta_2 z}{\Delta_2 x} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{dy}{dx}\right)_2,$$

also: $A = \frac{\partial f}{\partial x}$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}$. Und umgekehrt folgt aus diesen Gleichungen: Wenn A und B bei jedwedem Grenzprocesse diese Werthe erhalten, so besteht der Satz vom totalen Differentiale.

54. Die partiellen Ableitungen höherer Ordnung werden nun weiter nach den Regeln für Functionen mit einer Veränderlichen gebildet. Man bezeichnet mit $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ die Function, welche entsteht, wenn die Ableitung von $\frac{\partial f}{\partial x}$ nach x genommen wird, und kann dieselbe wiederum durch die ursprüngliche Function definiren vermittelst der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \text{Lim.}\ \frac{f(x+2\Delta x, y) - 2f(x+\Delta x, y) + f(x, y)}{\Delta x^2}$$

(für $\Delta x = 0$). Ebenso ist:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \operatorname*{Lim}_{\Delta y = 0} \frac{f(x, y+2\Delta y) - 2f(x, y+\Delta y) + f(x, y)}{\Delta y^2}.$$

Durch weitere Differentiationen folgen die Ableitungen $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ und $\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$. Es lassen sich aber auch sogenannte gemischte Ableitungen bilden: indem man nämlich die Function $\frac{\partial f}{\partial x}$ nach y differentiirt, entsteht eine Function, welche mit $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ bezeichnet werden soll, und ebenso wenn $\frac{\partial f}{\partial y}$ nach x differentiirt wird: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Beide werden durch die ursprüngliche Function definirt vermittelst der Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \operatorname*{Lim}_{\Delta y = 0} \operatorname*{Lim}_{\Delta x = 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \operatorname*{Lim}_{\Delta x = 0} \operatorname*{Lim}_{\Delta y = 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} - \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}{\Delta x}.$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite sind identisch gleich:

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)+f(x, y)}{\Delta x \Delta y} = \psi(\Delta x, \Delta y)$$

und unterscheiden sich nur dadurch von einander, dass im ersten Falle der Grenzwerth gebildet werden soll, indem zuerst Δx dann Δy nach Null convergirt, im zweiten dagegen umgekehrt erst Δy dann Δx gleich Null wird; es fragt sich, ob dabei die Grenzwerthe identisch sein müssen? Ich behaupte: *Diese Identität besteht jedenfalls an einer Stelle, in deren Umgebung* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ $\Big($*oder auch* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *und* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big)$ *stetige Functionen beider Variabelen x und y sind;* womit aber nicht gesagt sein soll, dass dies zugleich die nothwendige Bedingung ist. Unseren Voraussetzungen zufolge können wir nämlich auf die Function

$$\Pi(x, y) = f(x, y+\Delta y) - f(x, y),$$

in welcher zunächst y und Δy als constant, x als variabel betrachtet wird, den Mittelwerthsatz anwenden:

$$\Pi(x+\Delta x, y) - \Pi(x, y) = \frac{\partial \Pi(x+\Theta\Delta x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x$$

oder explicite geschrieben:

$$[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)] - [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]$$
$$= \Delta x \left\{\frac{\partial f(x+\Theta\Delta x, y+\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x+\Theta\Delta x, y)}{\partial x}\right\}.$$

Demnach wird

$$\Psi(\Delta x, \Delta y) = \frac{\frac{\partial f(x+\Theta\Delta x, y+\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x+\Theta\Delta x, y)}{\partial x}}{\Delta y} = \frac{\partial^2 f(x+\Delta\Theta x, y+y\Delta y)}{\partial y \partial x}.$$

Denn für die Function $\frac{\partial f}{\partial x}$ gilt der Voraussetzung zufolge ebenfalls der Mittelwerthsatz. Ist nun $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ in der Umgebung der Stelle $x\, y$ eine stetige Function beider Variabeln, so ergiebt $\frac{\partial^2 f(x+\Theta\Delta x, y+y\Delta y)}{\partial y \partial x}$ den nämlichen Werth, mag zuerst Δx und dann Δy, oder zuerst Δy und dann Δx verschwinden, d. h. auch ψ liefert unabhängig von der Reihenfolge $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ denselben Werth. Es sind also in diesem Falle die Grenzwerthe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ identisch.

Zu bemerken ist nur noch, dass der Werth von $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ oder ψ auch über alle Grenzen hinaus wachsen kann; doch kann dies unter den angenommenen Verhältnissen, wenn nämlich der Mittelwerthsatz bestehen bleiben soll, nur so geschehen, dass ψ in bestimmter Weise unendlich wird, wie man sich dieser Stelle auch nähern mag; die Grenzwerthe bleiben dann einander gleich, $+\infty$ oder $-\infty$.

Man kann nun weiter schliessen, dass unter entsprechenden Verhältnissen auch für partielle Ableitungen höherer Ordnung die Folge der Differentiationen einerlei ist. Denn ist:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

so folgt durch Differentiation z. B. nach x

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}.$$

Setzt man sodann $\frac{\partial f}{\partial x} = p$ und gilt für die Function p der eben bewiesene Satz, ist also z. B. nicht nur $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, sondern auch

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$$

eine stetige Function beider Variabelen, so wird:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}, \text{ d. h. } \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \text{ w. z. b. w.}$$

55. Mit Hülfe der höheren partiellen Ableitungen werden die höheren **totalen** Differentialquotienten in folgender Weise ausgedrückt: In der Function

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

welche von den beiden Variabelen x und y abhängt, lasse man x um Δx, y um Δy wachsen, so wird der Grenzwerth des Differenzenquotienten: $\frac{\Delta \frac{dz}{dx}}{\Delta x}$, der für verschwindendes Δx mit $\frac{d^2 z}{dx^2}$ bezeichnet werden soll, aus der Form zu berechnen sein:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \operatorname{Lim} \frac{\frac{\partial f(x+\Delta x, y+\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\Delta x} +$$

$$+ \frac{dy}{dx} \cdot \operatorname{Lim} \left[\frac{\frac{\partial f(x+\Delta x, y+\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{\Delta x} \right] + \frac{\partial f(xy)}{\partial y} \cdot \operatorname{Lim} \frac{\Delta \frac{dy}{dx}}{\Delta x}.$$

Der erste Grenzwerth der rechten Seite ist nach den vorangegangenen Sätzen die totale Ableitung der Function $\frac{\partial f}{\partial x}$ nach x, also gleich $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{dy}{dx}$, ebenso der zweite die totale Ableitung von $\frac{\partial f}{\partial y}$ gleich $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}$; der dritte Grenzwerth ist unbestimmt, gerade so wie $\frac{dy}{dx}$ selbst, so lange nicht ein Gesetz zwischen der Aenderung der Variabelen x und der Variabelen y angegeben ist; besteht aber solch eine Abhängigkeit, so wird $\operatorname{Lim} \frac{\Delta \frac{dy}{dx}}{\Delta x}$ mit $\frac{d^2 y}{dx^2}$ zu bezeichnen sein; (stehen

z. B. die Zuwüchse, welche x ertheilt werden, in bestimmtem Verhältnisse zu denen von y, so ist $dy : dx = k$, $d^2y : dx^2 = 0$); also wird, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ist,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Es ist zu bemerken, dass dieser Ausdruck nicht gleichartig in Bezug auf die Differentiale von x und y gebaut ist; was eben damit zusammenhängt, dass wir die Variabele x als unabhängige uns dachten, und die höheren Differenzenquotienten in Bezug auf x bildeten (§. 33). Gleichartig wird er, wenn entweder die Grösse $\frac{dy}{dx}$ als eine Constante in Bezug auf x zu betrachten ist, also y dem x proportional sich ändert, denn dann gehören wie erwähnt zu gleichen Werthänderungen von x auch gleiche Aenderungen von y und es wird $\Delta \frac{dy}{dx} = 0$, folglich:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

oder wenn auch die Aenderung von x ebenso wie die von y von einer anderen dritten Grösse abhängig gemacht werden soll.

Dieser Fall ist etwas näher zu betrachten. Sind x sowohl wie y Functionen der unabhängigen Grösse t, deren Aenderung also auch die Werthänderung von x und y bedingt, so werden die Differentiale dx und dy Functionen von t, multiplicirt mit dem Differentiale dt; mithin ist der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ eine Function von t.

Bezeichnet man $dx = \varphi(t)dt$, $dy = \psi(t)dt$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}$; ändert sich t und soll der Differentialquotient bestimmt werden, so wird

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)}{\varphi(t)^2}.$$

Es ist ersichtlich, dass man zufolge der Gleichungen $\frac{dx}{dt} = \varphi(t)$, $\frac{dy}{dt} = \psi(t)$ auch schreiben kann: $\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi'(t)$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \psi'(t)$ oder $d^2x = \varphi'(t)dt^2$, $d^2y = \psi'(t)dt^2$; führt man diese Werthe in die obige Gleichung ein, so nimmt sie Form an:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2\,dt} \quad \text{oder} \quad d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2},$$

d. h. sind in einem Differentialquotienten Zähler und Nenner als Functionen einer unabhängigen Variabelen zu denken, so wird das Differential desselben in Bezug auf diese Veränderliche nach der allgemeinen Quotientenregel gebildet.

Fällt die Variabele t mit x zusammen, so hat man $x = t$, also $\varphi(t) = 1$, $\varphi'(t) = 0$, folglich $d^2x = 0$ und man erhält die Gleichung $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx}$. Fällt die Variabele t mit y zusammen, so ist $y = t$, $\psi(t) = 1$, $\psi'(t) = 0$, $d^2y = 0$ und man erhält die Gleichung $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dx}$. Dasselbe ist der Fall, wenn $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ constant sind, also die Variabelen x und y proportional der unabhängigen Veränderlichen sich ändern. Das zweite und alle höheren Differentiale der unabhängigen Variabelen ist also Null.

Wenn nun in der Gleichung $z = f(x, y)$, x sowohl wie y als abhängige Variabele zu denken sind, deren Aenderung in irgend welcher Weise durch eine dritte Variabele t bestimmt ist, so wird das totale erste Differential von z in Bezug auf diese Variabele:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad \text{oder} \quad dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

und indem man nun beachtet, dass die partiellen Ableitungen sowohl als auch die Differentiale dx und dy von t abhängen, folgt für das zweite Differential:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\text{oder} \quad d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y.$$

Bei dieser letzten Gleichung aber hat man in Erinnerung zu behalten, dass sie eine bestimmte Relation zwischen endlichen Grössen nur dann aussagt, wenn x und y als Functionen einer Grösse t gegeben sind, und beide Seiten der Gleichung mit dt^2 dividirt werden; dass sie dagegen gar keinen Inhalt hat, wenn über die Art der Aenderung von x und y nichts bestimmt ist. Man hat sonach die Regel:

Um das zweite Differential aus $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ in allgemeinster Form zu erhalten, bilde man das totale Differential der Glieder auf der rechten Seite, wobei sowohl das Differential d^2x wie d^2y zu berücksichtigen ist. Soll x als unabhängige Variabele genommen werden, so wird $d^2x = 0$; ist auch y als unabhängige Variabele zu betrachten, so wird auch $d^2y = 0$.

Beispiel:

$$z = x^m y^n, \qquad dz = mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1}dy$$

$$d^2z = m(m-1)x^{m-2}y^n dx^2 + 2mnx^{m-1}y^{n-1}dx\,dy +$$
$$+ n(n-1)x^m y^{n-2}dy^2 + mx^{m-1}y^n d^2x + nx^m y^{n-1}d^2y.$$

In dieser Regel ist zugleich das Bildungsgesetz der weiteren Differentiale enthalten:

$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\, dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\, dx^2 dy + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\, dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\, dy^3 +$$

$$+ 2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx\, d^2 x + \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(d^2 x\, dy + d^2 y\, dx) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy\, d^2 y\right] + \frac{\partial f}{\partial x}\, d^3 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^3 y.$$

Sind aber x und y beide als unabhängige Variabele zu nehmen, so reducirt sich der Ausdruck auf seine vier ersten Glieder. Man sieht, dass als Coefficienten dieser die Binomialzahlen auftreten und dass allgemein bei unabhängigen Variabelen:

$$d^n z = \sum_{k=0}^{k=n} n_k\, \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k} \cdot dx^{n-k} dy^k \text{ sein wird } (n_0 = 1).$$

Bildet man nämlich das totale Differential dieser Gleichung, so folgt:

$$d^{n+1} z = dx \sum_{k=0}^{k=n} n_k \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-k+1}\partial y^k}\, dx^{n-k} dy^k + dy \sum_{k=0}^{k=n} n^k \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-k}\partial y^{k+1}}\, dx^{n-k} dy^k.$$

Mit Ausnahme des ersten Gliedes der ersten Summe und des letzten der zweiten kommt jedes Glied zweimal nur mit verschiedenem Binominalfactor vor, so dass:

$$d^{n+1} z = \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\, dx^{n+1} + (n_1 + n_0)\,\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n dy}\, dx^n dy + \cdots$$

$$\cdots + (n_k + n_{k-1})\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k}\,\partial y^k}\, d\,x^{n+1-k} dy^k + \cdots \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}\, dy^{n+1},$$

weil aber $n_k + n_{k-1} = (n+1)_k$, so ist:

$$d^{n+1} z = \sum_{k=0}^{k=n+1} (n+1)_k \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+k-1}\,\partial y^k}\, dx^{n+1-k} dy^k, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Es ist nicht schwer, diese Untersuchungen auf explicite Functionen mit mehr als zwei unabhängigen Variabelen auszudehnen, nachdem für dieselben der Begriff der Stetigkeit des partiellen und totalen Differentiales in ganz analoger Weise definirt ist*).

56. Die Kenntniss der partiellen Ableitung einer Function mit mehreren unabhängigen Veränderlichen führt, wie Lagrange gezeigt hat, ebenfalls zu einer Berechnung der Function durch eine unendliche Potenzreihe. Um den Werth von $z = f(x + h,\ x + k)$ zu finden, wenn die Werthe der Function und aller ihrer partiellen Ableitungen an einer Stelle xy bekannt sind, bilde man den Ausdruck

1) $$F(t) = f(x + th,\ y + tk) = f(x', y').$$

---

*) Die Sätze über Functionen mit mehreren Variabelen sind zuerst von Euler: Inst. calcul. diff. Pars I. 7 systematisch ausgeführt worden.

Derselbe wird bei beliebigen Werthen von h und k nur dann eine stetige Function von t sein, wenn f innerhalb des durch h und k bestimmten Bereiches eine stetige Function beider Variabelen ist. Lässt sich nun die Function $F(t)$ nach der Mac-Laurin'schen Reihe entwickeln, ist also

$$2)\qquad F(t) = F(0) + \frac{t}{1} F'(0) + \frac{t^2}{2!} F''(0) + \cdots \frac{t^n}{n!} F^n(\Theta t),$$

so folgt für $t = 1$ der Werth:

$$3)\qquad F(1) = F(0) + \frac{t}{1} F'(0) + \cdots \frac{t^n}{n!} F^n(\Theta).$$

Nun ist, vorausgesetzt dass f und seine partiellen Ableitungen stetige Functionen beider Variabelen sind, für jeden Werth von h und k, die totale Ableitung von F nach t:

$$F'(t) = \frac{\partial f(x', y')}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial f(x', y')}{\partial y'} \frac{dy'}{dt}$$

oder weil: $x' = x + ht$, $y' = y + kt$ also

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{dx'}{dt} = h, \quad \frac{dy'}{dt} = k,$$

$$F'(t) = h \frac{\partial f(x', y')}{\partial x} + k \frac{\partial f(x', y')}{\partial y} \quad \text{und} \quad F'(0) = h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x'} + k \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Ferner wird

$$F''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f(x', y')}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f(x', y')}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f(x', y')}{\partial y^2},$$

also:
$$F''(0) = h^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

und so fort allgemein:

$$F^n(t) = \sum_{p=0}^{p=n} n_p\, h^{n-p} k^p \frac{\partial^n f(x', y')}{\partial x^{n-p} \partial y^p}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung 3), so folgt:

$$F(1) = f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left[h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] + \cdots \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{p=n} n_p h^{n-p} k^p \frac{\partial^n f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial x^{n-p} \partial y^p}.$$

Dieser Ausdruck ist der Mittelwerthsatz in seiner allgemeinsten Form für eine Function mit zwei Variabelen und führt zu einer nach Potenzen von h und k fortschreitenden unendlichen Reihe, falls mit beliebig wachsenden Werthen von n das Restglied nach Null convergirt. Das wird insbesondere dann der Fall sein, wenn die partiellen Ableitungen einer Function die Eigenschaft haben, in dem durch h und k angegebenen Gebiete für n gleich unendlich endlich zu

bleiben. Ist diese Eigenschaft nicht erfüllt, so kann das Restglied trotzdem nach Null convergiren, doch wird die Grenzbestimmung alsdann schwierig, so dass andere Kriterien zur Entscheidung nöthig sind.

Zehntes Capitel.

Implicite Functionen. Anwendung der Taylor'schen Reihe für die Berechnung scheinbar unbestimmter Quotienten.

57. Die vorstehenden Untersuchungen sind, wie gezeigt wurde, dazu geeignet, die Differentialquotienten complicirterer Functionen einer unabhängigen Variabelen, wenn x und y von der Grösse t abhängen, zu berechnen; sie gestatten aber auch eine Anwendung auf die impliciten Functionen*).

Bei einer impliciten Function $f(x, y) = 0$, wie sie z. B. durch die allgemeinste Form einer algebraischen Function (§. 25) vorgestellt ist, wird der Functionswerth, welcher bisher z genannt wurde, constant gleich Null. Durch diese Festsetzung wird eine Abhängigkeit zwischen den Grössen x und y herbeigeführt; denn sind für einen bestimmten Werth von x ein oder auch mehrere Werthe von y angebbar, so dass $f = 0$ wird, so wird eine Aenderung des x-Werthes eine ganz bestimmte Aenderung jedes dieser Werthe y bedingen, für welche wiederum die Relation $f(x, y) = 0$ erfüllt bleibt.

Fassen wir einen bestimmten Werth von y ins Auge und suchen wir seine Aenderung im Verhältnisse zu der von x zu messen.

Wann wird y eine stetige Function von x sein? Sobald mit dem Wachsthume $\Delta x = 0$ auch das zugehörige Δy nach Null convergirt; d. h. sobald der Gleichung $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$ bei verschwindendem Werthe von Δx durch ein verschwindendes Δy genügt wird.

Es existiren also in diesem Falle für die Function zweier Variabelen $z = f(x, y)$ in noch so kleiner Umgebung der Stelle x, y noch ausser dieser Stelle selbst Werthe für welche sie verschwindet, und umgekehrt deckt sich das Vorhandensein solcher Werthe in beliebig kleiner Umgebung der Stelle x, y mit dem Begriffe der Stetigkeit für y. Ist z. B. z eine eindeutige und stetige Function beider Variabelen, und kann man zeigen, dass sie in der Umgebung einer Stelle sowohl positive wie negative Werthe erhält, so folgt, dass auch eine stetige Reihe von Werthen vorhanden sein muss, für welche z zu Null wird.

Für den Fall einer stetigen Werthänderung kann man nach dem Grenzwerthe des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ fragen.

---

*) Euler: Inst. calcul. diff. Pars I. 9.

Ist für die Function $z = f(x, y)$ an einer Stelle $z = 0$ ein totales Differential: $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ vorhanden, so erkennt man, dass es eine bestimmte Art des Wachsthumes für x und y giebt, bei welcher $z = 0$ bleibt, nämlich

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0, \text{ oder } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Demnach lässt sich der Werth des Differentialquotienten einer impliciten Function bestimmen, ohne dass man dieselbe erst als explicite darzustellen nöthig hätte, indem man in die Ausdrücke der partiellen Ableitungen: $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ die Werthe, welche x und y an dieser Stelle besitzen, substituirt. Die Gleichung für das zweite Differential d^2z liefert, gleich Null gesetzt, die Berechnung des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ u. s. f.:

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2},$$

$$0 = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 +$$

$$+ 2\frac{dy^2}{dx^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^3 y}{dx^3}$$

u. s. w.

58. Anwendung auf die allgemeinste algebraische Function zweier Variabelen.

Die Function $z = f(x, y) = A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \cdots A_{n-1} y + A_n$, in welcher $A_0, A_1 \ldots A_n$ Polynome beliebigen Grades in x bedeuten, und die ebensowohl nach Potenzen von x geordnet werden kann: $z = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots B_{m-1} x + B_m$, ist eine stetige Function beider Variabelen. Denn die explicite Darstellung führt auf eine endliche Anzahl von Summanden der Form: $a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$; jeder dieser Summanden ist, wie §. 52 gezeigt wurde, eine stetige Function beider Variabelen: eine endliche Summe von stetigen Functionen ist aber selbst eine stetige Function. Man kann diesen Satz leicht allgemein beweisen. Ist:

$$z = f_1(x, y) + f_2(x, y) + \cdots + f_p(x, y)$$

und bildet man den Werth für die Stelle $x \pm \Theta h$, $y \pm \eta k$, so wird die Differenz kleiner bleiben als δ, wenn man h und k bezüglich gleich dem kleinsten der Werthe nimmt, welche sich für die einzelnen Summanden ergeben, damit der Betrag von

$$f_i(x \pm \Theta h, y \pm \eta k) - f_i(x, y) < \frac{\delta}{p}$$

werde. Die algebraische Function besitzt ferner ein totales Differential der Form $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. Denn die partiellen Ableitungen nach x und y sind selbst wieder algebraische, also stetige Functionen beider Variabelen. Demzufolge ist, wenn es eine Stelle giebt, für welche $z = 0$ wird, auch ein Differentialquotient vor- und rückwärts genommen identisch, an dieser Stelle vorhanden, berechenbar aus der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{m B_0 x^{m-1} + (m-1) B_1 x^{m-2} + \cdots B_{m-1}}{n A_0 y^{n-1} + (n-1) A_1 y^{n-2} + \cdots A_{n-1}}.$$

An den Stellen, für welche der Nenner verschwindet, also gleichzeitig $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ist, wird dieser Quotient unendlich. Man hat also zuvörderst das Resultat: Wird in dem algebraischen Ausdruck $f(x, y) = 0$, y als Function von x betrachtet, so besitzt diese Function an jeder Stelle auch einen Differentialquotienten, d. h. mit anderen Worten: sie ist von jeder Stelle aus stetig fortsetzbar. Geometrisch gesprochen ist dies der Satz: Eine algebraische Curve hat an jedem Punkte eine Tangente; sie kann an keiner Stelle abbrechen.

Doch erleidet dieser Satz Modificationen: es können nämlich Stellen vorkommen, an denen Zähler und Nenner des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ gleichzeitig verschwinden; oder gleichzeitig über alle Grenzen wachsen; diese bedürfen einer besonderen Untersuchung.

59. Ueber die Fortsetzbarkeit der Function für endliche Werthe von x und y giebt uns der Mittelwerthsatz in seiner allgemeinsten Form (Taylor'sche Reihe) directen Aufschluss. Wir hatten gefunden: ist $z = f(x, y)$, so ist der Werth von $f(x+h, y+k)$ berechenbar aus der Gleichung

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left[h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right] + \frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{p=n} n_p h^{n-p} k^p \cdot \frac{\partial^n f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial x^{n-p} \partial y^p}.$$

Wir gehen aus von einer Stelle $x_0\, y_0$, an welcher $f = 0$ ist, und suchen in ihrer Nähe (d. h. für beliebig kleine Werthe von h und k) eine andere zu finden, wo $f(x_0 + h, y_0 + k)$ ebenfalls verschwindet. Die Werthe von h und k müssen die Gleichung befriedigen:

$$0 = \left[h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\right] + \frac{1}{2}\left[h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2hk\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 + k^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right] + \cdots$$

$$+ \cdots \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{p=n} n_p\, h^{n-p}\, k^p \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-p} \partial y^p}\right)_0.$$

Die Werthe der partiellen Ableitungen an der Stelle $x_0\, y_0$ sind mit $()_0$ bezeichnet. Da es sich um beliebig kleine Werthe von h und k handelt, so erkennt man: falls nicht $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ gleichzeitig Null werden, so werden die Glieder, welche höhere Potenzen von h und k enthalten, gegenüber den Gliedern erster Dimension beliebig klein; so dass wir also sagen können, die Fortsetzung der impliciten Function ist in der Richtung ihres Differentialquotienten

$$\frac{k}{h} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

angezeigt. Wenn nun aber $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ gleichzeitig Null sind, so fällt das erste Glied unserer Gleichung heraus, und da bei beliebig kleinen Werthen von h und k, welche wir suchen, die 3ten, 4ten Potenzen u. s. w. im Vergleich zur zweiten beliebig klein werden, so ist die Grenze des Verhältnisses von k zu h aus der quadratischen Gleichung:

$$h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2hk\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 + k^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 = 0$$

zu entnehmen. Diese Gleichung in der Form:

$$\left[\frac{k}{h}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0\right]^2 = \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0\right]^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0$$

geschrieben, zeigt, dass für das Verhältniss $\frac{k}{h}$ zwei verschiedene reelle Werthe oder zwei gleiche reelle Werthe, oder auch keine reellen Werthe vorhanden sind, je nachdem

$$\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0\right]^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0$$

grösser, gleich oder kleiner als Null ist. Im letzten Falle ist die Function $f(x, y) = 0$ von der betrachteten Stelle $x_0\, y_0$ aus nach keinerlei Richtung hin durch reelle Werthe von x und y fortsetzbar, während im ersten sich zwei verschiedene Richtungen ergeben. (Die Curve besitzt einen isolirten Punkt oder einen Doppelpunkt mit reellen Aesten, und solche Besonderheiten können auch bei den algebraischen Curven auftreten.) Sind auch $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0$ gleich Null, so wird man zu einer cubischen Gleichung geführt, welche für das Verhältniss von $k : h$ entweder drei reelle verschiedene oder gleiche, oder auch nur einen reellen Werth liefert. Solche Besonderheiten können sich steigern, die weiteren Discussionen erfordern aber die Sätze über die Anzahl und Beschaffenheit der Lösungen von Gleichungen n^{ten} Grades. Diese Bemerkungen enthalten nur die ersten Keime eines Problemes,

das allgemein so zu fassen ist. Gegeben ist die explicite algebraische Function $f(x, y) = 0$. Für $x = x_0$ erhält y den Werth y_0. Es soll y als explicite Function von x durch eine convergente Potenzreihe dargestellt werden, unter der Bedingung, dass stets die Relation $f(x, y) = 0$ erfüllt bleibt, und dass für $x = x_0$, $y = y_0$ wird. Auf die Lösung dieses Problemes können wir aber erst später zurückkommen, denn es erfordert eine bedeutende Erweiterung unserer bisherigen Begriffe. Vor allem muss die Frage beantwortet sein, wie viele Werthe von y zu einem bestimmten Werthe x_0 gehören; dazu ist die Untersuchung complexer Lösungen nothwendig; sodann muss allgemein die Frage nach der Entwickelbarkeit einer irgendwie definirten Function in eine Potenzreihe gelöst sein. (2. Buch Cap. 4, 4. Buch Cap. 3).

60. Wir kehren zur Frage zurück: Wie verhält es sich mit den Differentialquotienten an diesen besonderen Punkten? Ich behaupte, die Werthe von $\frac{k}{h}$, welche aus der besprochenen quadratischen oder cubischen Gleichung zu berechnen sind, geben, wenn sie reell sind, zugleich die verschiedenen Werthe des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ an dieser Stelle an. Dieser Satz ist einleuchtend, denn $\frac{k}{h}$ ist ein Differenzenquotient, dessen Grenzwerth den Differentialquotienten definirt; er kann aber noch in anderer Weise aus der ursprünglichen Definitionsgleichung: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ gefolgert werden.

Wir betrachten zunächst folgenden einfachen, an sich wichtigen Fall (vergl. §. 19c): Wenn in einem Quotienten $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für einen bestimmten Werth von $x = a$ Zähler und Nenner gleichzeitig zu Null werden (φ und ψ mögen beliebige stetige Functionen, nicht nur algebraische sein), so hat (§. 10) dieser Quotient nur insofern einen Sinn, als er sich als Grenze der Werthe an benachbarten Stellen herleiten lässt; also:

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \lim_{h=0} \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}, \text{ oder } \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \lim_{h=0} \frac{\varphi(a-h)}{\psi(a-h)}.$$

Gilt nun für die Functionen φ und ψ der Mittelwerthsatz in seiner ersten Form, so ergiebt sich folgende allgemeine Regel zur Berechnung des Grenzwerthes. Man setze:

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(a+\Theta h), \text{ oder da } \varphi(a) = 0, \varphi(a+h) = h\varphi'(a+\Theta h),$$
$$\psi(a+h) - \psi(a) = h\psi'(a+\eta h), \text{ oder da } \psi(a) = 0, \psi(a+h) = h\psi'(a+\eta h),$$

so ist:

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi'(a+\Theta h)}{\psi'(a+\eta h)}, \text{ also } \lim_{h=0} \frac{\varphi'(a+\Theta h)}{\psi'(a+\eta h)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)},$$

d. h. der Werth des Quotienten $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ an einer Stelle, wo Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden, ist unter der angegebenen Voraussetzung gleich dem Quotienten aus den ersten Ableitungen von φ und ψ an dieser Stelle.

Sind $\varphi'(a)$ und $\psi'(a)$ ebenfalls gleich Null, ist aber der Mittelwerthsatz in seiner erweiterten Form anwendbar, so wird:

$$\varphi(a+h) = \frac{h^2}{2!}\varphi''(a+\Theta h), \quad \psi(a+h) = \frac{h^2}{2!}\psi''(a+\eta h),$$

also:

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{\varphi''(a+\Theta h)}{\psi''(a+\eta h)} = \frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}.$$

Dies Beweisverfahren ist nicht möglich für den besonderen Fall, wo a nicht ein endlicher Werth ist, sondern das gleichzeitige Verschwinden des Zählers und Nenners für $x = \infty$ eintritt. Dieser Fall wird durch die Untersuchungen in §. 62 erledigt werden.

Das gleiche Verfahren gilt nun für einen Quotienten von der Form: $\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$, in welchem, wie bei der impliciten Function, y eine Function von x ist. Dieser Quotient muss ebenso als Grenzwerth aus benachbarten Stellen hergeleitet werden, wenn für $x = a$, $y = b$ Zähler und Nenner verschwinden. Es ist:

$$\frac{\varphi(a, b)}{\psi(a, b)} = \operatorname*{Lim}_{h=0,\, k=0} \frac{\varphi(a+h, b+k)}{\psi(a+h, b+k)},$$

und nach dem Mittelwerthsatz wird:

$$\varphi(a+h, b+k) = h\,\frac{\partial\varphi(a+\Theta h, b+\Theta k)}{\partial a} + k\,\frac{\partial\varphi(a+\Theta h, b+\Theta k)}{\partial b},$$

$$\psi(a+h, b+k) = h\,\frac{\partial\psi(a+\eta h, b+\eta k)}{\partial a} + k\,\frac{\partial\psi(a+\eta h, b+\eta k)}{\partial b}.$$

Demnach wird:

$$\frac{\varphi(a, b)}{\psi(a, b)} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\cdot \operatorname{Lim}\frac{k}{h}}{\frac{\partial\psi}{\partial a} + \frac{\partial\psi}{\partial b}\cdot \operatorname{Lim}\frac{k}{h}}.$$

Wenn wir nun in unserm Falle, in welchem $\varphi = -\frac{\partial f}{\partial x}$, $\psi = +\frac{\partial f}{\partial y}$ ist, unter Annahme der Fortsetzbarkeit der impliciten Function $f(x,y) = 0$, den Werth von $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ nach der nämlichen Regel bestimmen, und dabei zu Folge des obigen Beweises beachten, dass $\operatorname{Lim}\frac{k}{h} = \frac{dy}{dx}$ ist, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}}, \text{ oder } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

in welcher für die partiellen Ableitungen ihre Werthe an der betrachteten Stelle zu nehmen sind; diese Gleichung stimmt mit der vorhin für h und k gefundenen überein und lehrt die Eigenschaft, dass der Quotient $\frac{dy}{dx}$ (falls er reell ist) auch in den singulären Stellen eine stetige Function von x bleibt; denn er lässt sich als Grenzwerth benachbarter Stellen ableiten. Man darf aber diese zweite Rechnungsweise nicht als Existenzbeweis nehmen, denn hier ist nicht nur die Existenz sondern auch die Stetigkeit von $\frac{dy}{dx}$ vorausgesetzt.

Man wird leicht erkennen, wie sich auch diese Berechnung für gesteigerte Singularitäten innehalten lässt, indem man den Werth von $\frac{\varphi(a, b)}{\psi(a, b)}$ entwickelt unter Voraussetzung, dass alle ersten Ableitungen, sodann alle zweiten u. s. w. verschwinden. (Auf den besonderen Fall, dass a und b beide unendlich sind, soll hier nicht eingegangen werden.)

61. Ein Quotient erscheint aber zweitens in einer unbestimmten Form, wenn Zähler und Nenner gleichzeitig bei Annäherung an eine Stelle über jede Grenze hinaus wachsen, oder mit anderen Worten an einer Stelle gleichzeitig unendlich werden. Ist der Quotient eine algebraische Function, so kann das freilich nur eintreten, wenn die Grössen x und y selbst einzeln oder beide unendlich werden; hier erledigt sich der einfachste Fall durch folgenden Satz:

Man ordne die algebraische Function $f(x, y) = 0$, in welcher die Ordnung der Glieder, d. h. die Summe der Exponenten von x und y höchstens gleich n sein soll, dergestalt, dass man die Glieder gleicher Dimensionen zusammenfasst, so wird man sie auf folgende Form bringen können:

$$x^n f_n\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} f_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots x^{n-k} f_{n-k}\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots x f_1\left(\frac{y}{x}\right) + f_0 = 0.$$

Hier bedeutet $f_{n-k}\left(\frac{y}{x}\right)$ ein Polynom $n-k^{\text{ter}}$ Ordnung, gebildet vom Quotienten $\frac{y}{x}$. Denkt man sich für $\frac{y}{x}$ einen bestimmten Werth g substituirt, so bestimmt die Gleichung:

$$x^n f_n(g) + x^{n-1} f_{n-1}(g) + \cdots x f_1(g) + f_0 = 0$$

diejenigen Werthe von x, zu denen je ein y-Werth gehört, so dass $\frac{y}{x} = g$. Fragt man, bei welchen Werthen von g x einen unendlichen Werth bekommt, so kann man, indem man statt x $\frac{1}{z}$ substituirt, diese Frage auf die einfachere reduciren: wann wird dem Ausdrucke

$$f_n(g) + z f_{n-1}(g) + \cdots z^{n-1} f_1(g) + z^n f_0 = 0$$

durch den Werth $z = 0$ genügt? Dann und nur dann, wenn $f_n(g) = 0$

ist; dies ist im allgemeinen ein Polynom n^{ten} Grades in g, nehmen wir an wir hätten eine bestimmte Lösung g gefunden. Nach unserer jetzigen Bezeichnungsweise wird nun:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = n x^{n-1} f_n\left(\frac{y}{x}\right) + (n-1) x^{n-2} f_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots f_1\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-2} y f_n'\left(\frac{y}{x}\right) -$$
$$- x^{n-3} y f'_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) \cdots - \frac{y}{x} f_1'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{n-1} f_n'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2} f'_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots f_1'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dividirt man Zähler und Nenner des Quotienten $-\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ durch x^{n-1} und setzt dann $\frac{y}{x} = g$, $x = \infty$, so werden alle Glieder, welche x im Nenner enthalten, fortfallen, und da $f_n(g) = 0$, so bleibt im Zähler das Glied $g f_n'(g)$, im Nenner das Glied $g f_n'(g)$. Sonach wird, wenn nicht der besondere Fall eintritt, dass $f_n'(g) = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = g = \left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{für } x = \infty.$$

Die algebraische Function besitzt also auch einen bestimmten Werth des Differentialquotienten an den Stellen, wo x unendlich und das Verhältniss $\frac{y}{x}$ einen bestimmten Werth, der auch Null sein kann, annimmt. Führt man den Beweis in analoger Weise für das Verhältniss $\frac{x}{y}$, so findet man die Giltigkeit des Satzes auch für die im vorigen noch nicht berücksichtigten Stellen, an denen y unendlich, x aber endlich ist, so dass das Verhältniss $\frac{y}{x}$ unendlich wird; hier wird $\frac{dx}{dy} = 0$.

62. Ich schliesse diese Betrachtungen mit dem Probleme: Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei beliebige Functionen, welche für $x = a$ beide unendlich werden; es soll der Grenzwerth des Quotienten

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ für } x = \infty$$

ermittelt werden. Setzt man $x = a + \frac{1}{z}$ und betrachtet φ und ψ als Functionen in z, so werden sie unendlich an der Stelle $z = \infty$, d. h. indem z positiv oder negativ über alle Grenzen wächst. Die Aufgabe ist also auf die andere gebracht Lim $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ für $z = +\infty$ oder $-\infty$ zu berechnen, wenn Lim $\varphi(z) = \infty$, Lim $\psi(z) = \infty$. In §. 24d wurde bewiesen:

$$\text{Lim} \frac{f(z)}{z} = \frac{f z + h) - f(z)}{h} \quad \text{für} = z \pm \infty$$

bei jedem Werthe von h, falls überhaupt ein bestimmter Grenzwerth für den Quotienten rechts existirt. Ist nun die Function f von einer Stelle $z = z_1$ an stetig (und nur für $z = \infty$ unendlich), besitzt sie ferner überall einen bestimmten Werth des Differentialquotienten, was bekanntlich als nothwendige aber nicht hinreichende Bedingung erfordert, dass f von einer Stelle ab nur wächst oder nur abnimmt, und ist der Differentialquotient vor- und rückwärts genommen identisch, so folgt:

$$\operatorname{Lim} \frac{f(z)}{z} = \operatorname{Lim} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \operatorname{Lim} f'(z + \Theta h).$$

Lassen nun φ und ψ die Anwendung dieser Formeln zu, so erhält man:

$$\operatorname{Lim} \frac{\varphi(z)}{z} = \operatorname{Lim} \varphi'(z + \Theta h), \quad \operatorname{Lim} \frac{\psi(z)}{z} = \operatorname{Lim} \psi'(z + \Theta' h),$$

also durch Division:

$$\operatorname{Lim} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \operatorname{Lim} \frac{\varphi'(z+\Theta h)}{\psi'(z+\Theta' h)} \quad (\text{für } z = \infty),$$

d. h. *falls bestimmte Werthe der Ableitungen φ' und ψ' vor- und rückwärts genommen identisch, und also auch ihres Quotienten $\varphi' : \psi'$ für $z = \infty$ existiren, so ist der Grenzwerth des Quotienten der Functionen φ und ψ, welche in bestimmter Weise unendlich werden, gleich dem Quotienten aus den Ableitungen*)*.

Beispiel:

1)
$$\left[\frac{l(a+be^x)}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}\right]_{x=\infty} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

Denn es ist:

$$\varphi'(x) = \left[\frac{be^x}{a+be^x}\right]_{x=\infty} = 1, \quad \psi'(x) = \left[\frac{\beta x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}\right]_{x=\infty} = \sqrt{\beta}.$$

2) Setzt man $\varphi(x) = x + \sin x$, $\psi(x) = x$, so ist

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right] = \operatorname{Lim}\left[\frac{x+\sin x}{x}\right]_{\text{für } x=\infty} = 1,$$

aber $\operatorname{Lim}\left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right] = \left[\frac{1+\cos x}{1}\right]$ ist unbestimmt. Es erfüllt die Function $\varphi(x)$, wiewohl sie eine stetig wachsende Function ist, die in bestimmter Weise unendlich wird, nicht die Bedingung, dass $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ oder auch $\varphi'(x)$ für $x=\infty$ einen bestimmten Werth erhalten.

Werden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x = \infty$ beide Null, (siehe §. 60), so schreibe man: $\frac{1}{\varphi(x)} = \varphi_1(x)$, $\frac{1}{\psi(x)} = \psi_1(x)$; die Functionen φ_1 und ψ_1

*) Man kann die Voraussetzungen des Satzes noch verallgemeinern. Rouquet: N. Annal. de mathém. 2. S. T. XVI. Stolz: Math. Annal. Bd. XV.

werden an der Stelle $x = \infty$ beide ∞; nach der letztgefundenen Regel folgt:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x=\infty} = \left[\frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}\right]_{x=\infty} = \operatorname{Lim}\left[\frac{\psi_1'(x+\Theta h)}{\varphi_1'(x+\Theta' h)}\right]_{x=\infty} = \operatorname{Lim}\left[\frac{\psi'(x+\Theta h)}{\varphi'(x+\Theta' h)} \cdot \left\{\frac{\varphi(x+\Theta' h)}{\psi(x+\Theta h)}\right\}^2\right]_{x=\infty}.$$

Mithin besteht die Gleichung:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x=\infty} = \left[\frac{\varphi'(x+\Theta' h)}{\psi'(x+\Theta h)}\right]_{x=\infty}.$$

Durch diese Gleichung wird aber die Aufgabe der Werthbestimmung nicht direct gelöst werden, da auch φ' und ψ' für $x = \infty$ verschwinden müssen (§. 24e), wohl aber kann sie zu einer Vereinfachung der Untersuchung dienen.

$$\left[\frac{l\left(1+\frac{a}{x}\right)}{l\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]_{x=\infty} = \left[\frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}} \cdot -\frac{a}{x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot -\frac{1}{x^2}}\right]_{x=\infty} = a.$$

Zweites Buch.

Die complexen Zahlen und ihre Functionen.

Erstes Capitel.

Die complexe Zahl und die Rechnungsoperationen.

63. Damit die sieben Rechnungsoperationen ohne Ausnahme bei reellen Zahlen ausführbar werden, muss, gleichwie die Subtraction die Division, die Wurzelausziehung die Erweiterung des Zahlbegriffes auf negative, gebrochene, irrationale Zahlen erforderten, ein neuer Zahlbegriff in die Analysis aufgenommen werden, die complexe Zahl.

Für Wurzeln aus positiven Grössen gelten die Sätze:

1. Die Wurzel aus einer Zahl ist gleich dem Producte der Wurzeln aus ihren Factoren.

2. Ist der Wurzelexponent eine zusammengesetzte Zahl mn, so kann die Wurzel reducirt werden, indem man die m^{te} Wurzel aus der n^{ten} Wurzel des Radicanden oder umgekehrt nimmt.

Werden diese Sätze, wie sich später zeigen wird, auch auf Wurzelausdrücke, deren Radicand negativ und deren Exponent eine gerade Zahl ist, übertragen, so erkennt man, dass das Problem der Wurzelausziehung in allen diesen Fällen gelöst ist, sobald die Quadratwurzel aus der negativen Einheit in das Zahlsystem aufgenommen und die Rechnungsoperationen mit derselben definirt sind; denn es wird

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[n]{\sqrt[2]{-1}}\,.$$

$\sqrt{-1}$ wird die imaginäre Einheit genannt, und nach Gauss kurz mit $+i$ bezeichnet. Wie aus $+1$ durch Multiplication, Division und Potenziren die reellen positiven und negativen Zahlen entstehen, so werden aus $+i$ die positiven und negativen imaginären Zahlen erhalten:

$$\pm(i+i) = \pm 2i, \quad \pm(2i+i) = \pm 3i \cdots \pm(ai+i) = \pm(a+1)i,$$
$$i - i = 0\,.\, i = 0.$$

Die allgemeinste imaginäre Zahl ist: $+ai$, worin a eine beliebige auch irrationale reelle Zahl bedeutet*).

*) Die Einführung imaginärer Zahlen wurde, nachdem man erkannt hatte, dass sich nicht alle quadratischen Gleichungen vermittelst reeller Grössen lösen

64. Die im Gegensatze stehenden Bezeichnungen „reell“ und „imaginär“ begünstigen die irrthümliche Vorstellung, welche sogar die consequente Einführung der imaginären Zahlen in die Analysis erschwert hat, dass den Zahlen der ersten Art eine Realität zukommt, welche denen der zweiten mangelt. Betrachtet man die Rechnungsoperationen an sich, ohne Anwendung auf physische Grössen, so bilden alle gebrochenen Zahlen, die irrationalen, die imaginären Zahlen gesetzmässige Erweiterungen des Zahlbegriffes, die mit der ganzen Zahl durch bestimmte Rechnungsoperationen verknüpft sind. In den Anwendungen der Rechnungsoperationen dagegen kommt es lediglich darauf an, welche Zahlen von vornherein bei der analytischen Fassung des Problems eingeführt sind. Sind nach Art der Problemstellung z. B. bei discreten Grössen nur ganze Zahlen zulässig, so wird, falls das Resultat eine gebrochene Zahl ist, damit die Unmöglichkeit der gestellten Aufgabe ausgesprochen; ebenso wird eine negative Zahl als Resultat einer auf physische Grössen sich beziehenden Rechnung nur dann eine auf diese Grössen übertragbare Bedeutung haben, wenn gleich anfangs die Grössen im positiven und negativen Sinne unterschieden waren. Dem analog ergiebt die Rechnung auch bei imaginärem Resultate einen ins Reale übertragbaren Sinn, wenn die realen Grössen, um die es sich handelt, nicht nur durch reelle, sondern auch durch imaginäre Zahlen charakterisirt sind. Das einfachste Beispiel einer Darstellung anschaulicher Grössen durch imaginäre Zahlen ist die geometrische Interpretation, welche weiter unten behandelt werden soll. „Indem die Mathematik darnach strebt, Ausnahmen von Regeln zu beseitigen und verschiedene Sätze aus einem Gesichtspunkte aufzufassen, wird sie häufig genöthigt, Begriffe zu erweitern oder neue Begriffe aufzustellen, was beinahe immer einen Fortschritt in der Wissenschaft bezeichnet. Dahin gehört namentlich die Einführung von imaginären Grössen in der Analysis.“ (v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage Heft 1. Vorwort.)

65. Aus der Definition der imaginären Einheit folgt:

$i^2 = i \cdot i = (\sqrt{-1})^2 = -1$. Demnach verstehen wir unter:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -(i^2) = +1$$

. . . .

---

lassen, unumgänglich, als bei Lösung der cubischen Gleichungen der Fall (casus irreducibilis) eintrat, bei welchem eine reelle Lösung nur vermittelst Quadratwurzeln aus negativen Grössen dargestellt werden kann (Bombelli 1579). Seitdem verschwanden die imaginären Zahlen nicht mehr aus der Analysis; fruchtbare Verwerthung fanden sie vor allen bei Euler. Aber erst die Arbeiten von Gauss und Cauchy haben die Bedeutung der complexen Zahl als allgemeineren Zahlbegriff klar gelegt.

Hieraus folgt durch Umkehr:

$$\frac{1}{i} = -i, \quad \frac{1}{i^2} = -1, \quad \frac{1}{i^3} = i, \quad \frac{1}{i^4} = 1 \ldots.$$

Die Vereinigung reeller und imaginärer Zahlen zu einer Summe liefert die complexe Zahl. Die complexe Zahl $a + ib$ ist eine Summe von a positiven oder negativen reellen und von b positiven oder negativen imaginären Einheiten. Der Begriff der complexen Zahl umfasst also den der reellen (wenn $b = 0$) und den der imaginären (wenn $a = 0$).

Zwei complexe Zahlen: $a + ib$ und $a' + ib'$ addiren heisst diese Zählung der beiden Einheiten fortsetzen, das ist: eine neue Zahl bilden, deren reelle und imaginäre Einheiten gleich der Summe aus den reellen und der Summe aus den imaginären Einheiten der beiden gegebenen Zahlen ist:

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

und allgemein:

$$(a + ib) + (a' + ib') + \ldots (a^{\nu} + ib^{\nu}) = (a + a' \ldots a^{\nu}) + i(b + b' \ldots b^{\nu}).$$

Der Satz von der Vertauschbarkeit der Summanden bleibt dabei erhalten.

Die Subtraction bedeutet auch hier die Umkehr der Addition.

66. Ebenso wie die reellen Zahlen durch Endpunkte von Strecken, welche am einfachsten auf einer Geraden von einem bestimmt gewählten Anfangspunkte an im positiven und negativen Sinne abgetragen werden, sich sämmtlich veranschaulichen lassen, so werden die complexen Zahlen als Punkte einer Fläche, am einfachsten einer Ebene sämmtlich abgebildet*). Denn im rechtwinkligen Cartesischen Coordinatensysteme (§. 15) ist jeder Punkt der Ebene eindeutig durch zwei positive und negative Zahlen x und y bestimmt, von denen die eine x als Abscisse, die andere y als Ordinate in einer durch das Vorzeichen bestimmten Richtung aufgetragen wird. Vereinigt man die reellen Zahlenwerthe x und y zu der complexen Zahl $x + iy$, so ergiebt sich der Satz:

Nach Festlegung eines Coordinatensystems und eines Maasstabes gehört zu jedem Punkte in der Ebene eine complexe Zahl, und umgekehrt bestimmt jede complexe Zahl eindeutig einen Punkt der Ebene.

---

*) Argand, Gergonne's Annalen Bd. V. 1814. Historisches über complexe Zahlen siehe Drobisch, Berichte über die Verhandlungen der K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. II.; Hankel, Theorie der complexen Zahlsysteme S. 71 und 81; Hoüel, Théorie élémentaire des quantités complexes p. 4; in der Darstellung des letzteren tritt die Bedeutung der Arbeiten von Gauss zu sehr zurück. Die älteste Notiz über die geometrische Interpretation in den Novi Comm. Acad. Petrop. 1750.

Die Punkte der Abscissenaxe gehören zu den reellen, die der Ordinatenaxe zu den imaginären Zahlen.

Die Gesammtheit der Punkte in der Ebene veranschaulicht das gesammte continuirliche complexe Zahlengebiet.

67. Diese Darstellung vermittelt zugleich eine neue und sehr zweckmässige Form, die man den complexen Zahlen geben kann. Führt man nämlich an Stelle des Cartesischen Coordinatensystemes ein Polarcoordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt mit dem bisherigen, dessen Axe mit der x-Axe zusammenfällt, so wird jeder Punkt P der Ebene durch seine Entfernung r vom Anfangspunkte und durch den in bestimmtem Drehsinne genommenen Winkel φ, den der Leitstrahl OP mit der x-Axe bildet, eindeutig bestimmt. Die Strecke r wird dabei stets nur in absolutem Sinne genommen, φ durchläuft alle Werthe von 0 bis 2π; geht φ über 2π hinaus, so wiederholen sich frühere Punkte. Nun ist $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, und umgekehrt erhält man zu jedem Werthpaare x und y eindeutig die Werthe:

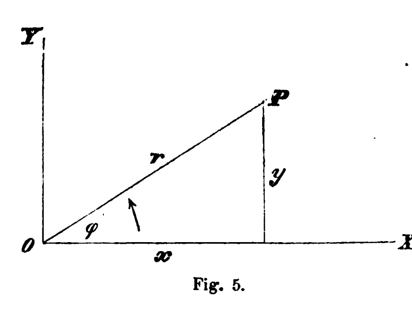


Fig. 5.

$$r = +\sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt ein bis auf Vielfache von 2π bestimmter Werth von φ, der eindeutig bestimmt ist vermittelst der beiden Gleichungen. Seine Berechnung erfolgt mit unseren bisherigen Hülfsmitteln aus der Formel:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \text{also } \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Da aber die Reihe für $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ (§. 48) stets einen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegenen Bogen darstellt, so ist zu setzen:

$$\begin{array}{lll}
\text{für } x > 0, & y > 0 & \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \\
\text{für } x < 0, & y > 0 & \varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \\
\text{für } x < 0, & y < 0 & \varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \\
\text{für } x > 0, & y < 0 & \varphi = 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \text{ oder } \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.
\end{array}$$

Jede complexe Zahl kann also in der Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ oder

kürzer r_φ geschrieben werden*); die Grösse $r = +\sqrt{a^2+b^2}$ heisst (nach Argand 1814) der Modul oder (nach Weierstrass Journal f. M. Bd. 52) der absolute Betrag, die Grösse φ (nach Cauchy) das Argument (auch die Amplitude) der complexen Zahl. Da $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ nicht gleichzeitig verschwinden, so wird eine complexe Zahl nur dann gleich Null, wenn ihr Modul $r = \sqrt{a^2+b^2} = 0$ ist. Dies erfordert, dass $a = 0$ und $b = 0$. Alle complexen Zahlen mit dem gleichen Modul r werden durch Punkte abgebildet, welche gleichweit vom Coordinatenanfangspunkte auf der Peripherie des Kreises mit dem Radius r gelegen sind. Alle Zahlen mit gleichem Argumente gehören zu Punkten auf einer vom Coordinatenanfangspunkte ausgehenden Geraden.

Für die Berechnung von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ wurden die convergenten Reihen gefunden:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + - \cdots R \qquad \operatorname{Lim} R = 0,$$

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + - \cdots R' \qquad \operatorname{Lim} R' = 0.$$

Summirt man dieselben, indem man die zweite mit i multiplicirt, so folgt:

$$\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots R\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots R'\right).$$

Mit Benutzung der Eigenschaften für die Potenzen von i erhält diese Summe die Form:

$$1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \cdots (R + iR').$$

Das Restglied dieser Reihe, eine complexe Zahl, convergirt für alle Werthe von φ nach Null; sonach stellt die convergente Reihe:

$$1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \cdots \text{ in inf.}$$

die complexe Grösse: $\cos\varphi + i\sin\varphi$ mit beliebiger Annäherung dar. Diese Reihe geht aber aus der §. 42 gefundenen Exponentialreihe hervor, wenn in derselben $x = i\varphi$ gesetzt wird; demnach bezeichnen wir sie mit dem Symbol $e^{i\varphi}$ **), und erhalten in dieser Bezeichnung den Satz:

*) Diese Darstellung der complexen Zahl findet sich bereits bei Euler: Introductio I Cap. VIII; als allgemeine Darstellung aller complexen Zahlen liegt sie der ersten Abhandlung von Gauss aus dem Jahre 1799 zu Grunde.

**) Euler: Introductio I Cap. VIII. Durch diese Gleichungen ist der im §. 14 behauptete Zusammenhang zwischen der Exponentialfunction und den goniometrischen erwiesen.

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}, \quad \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}, \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Jede complexe Zahl kann in der Form $re^{i\varphi}$ geschrieben werden, unter $e^{i\varphi}$ die zuletzt definirte unendliche Reihe verstanden.

Es ist zufolge dieser Definition:

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \quad e^{i2\pi} = 1. \quad e^{\pm i2k\pi} = 1.$$

68. Die complexen Zahlen bilden eine in sich geschlossene Gruppe; das heisst, jede Rechnungsoperation liefert angewandt auf complexe Zahlen ohne Ausnahme ein Resultat, welches durch eine complexe Zahl darstellbar ist. Bevor dies gezeigt werden kann, muss definirt werden, was unter den Rechnungsoperationen nunmehr zu verstehen ist; diese werden so zu definiren sein, dass sie die für die reellen Zahlen gegebenen Definitionen umfassen.

69. Summe und Differenz (§. 65):

$$(a+ib) \pm (a'+ib') = (a \pm a') + i(b \pm b')$$

oder

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \pm r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$
$$= (r\cos\varphi \pm r'\cos\varphi') + i(r\sin\varphi \pm r'\sin\varphi').$$

An der zweiten Form beweist man am einfachsten den Satz: der Modul der Summe oder der Differenz zweier complexen Zahlen ist kleiner (höchstens gleich) als die Summe, und grösser (mindestens gleich) als die Differenz der Modul der Summanden. Denn setzt man

$$(r\cos\varphi \pm r'\cos\varphi') + i(r\sin\varphi \pm r'\sin\varphi') = R(\cos\psi + i\sin\psi),$$

so folgt für den Modul der Summe R:

$$R\cos\psi = r\cos\varphi \pm r'\cos\varphi', \quad R\sin\psi = r\sin\varphi \pm r'\sin\varphi',$$

also:

$$R^2 = r^2 + r'^2 \pm 2rr'\cos(\varphi - \varphi');$$

es ist aber

$$-1 \leqq \cos(\varphi - \varphi') \leqq +1.$$

70. Multiplication.

Ist m eine ganze positive Zahl, so soll $(a+ib)\cdot m$ bedeuten, dass $(a+ib)$ $m$mal als Summand gesetzt ist; demnach folgt

$$(a+ib)\cdot m = am + ibm;$$

damit übereinstimmend definiren wir allgemein:

$$(a+ib)(a'+ib') = a'(a+ib) + ib'(a+ib) = aa' + iba' + iab' + i^2bb'$$
$$= (aa' - bb') + i(ba' + ab').$$

Der Satz von der Vertauschbarkeit der Factoren bleibt dabei erhalten. In der zweiten Form erhält man:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \,.\, r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$
$$= rr'(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi'))$$
$$= rr'(\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')) = rr'_{\varphi+\varphi'}.$$

Der Modul des Productes ist gleich dem Product ans den Moduln der Factoren; das Argument des Productes ist gleich der Summe aus den Argumenten.

Das Product ist nur Null, wenn einer der Factoren Null ist.
Allgemein ist:

$$r_\varphi \cdot r'_{\varphi'} \cdots r^\nu{}_{\varphi^\nu} = (r r' \ldots r^\nu)_{\varphi + \varphi' + \ldots \varphi^\nu}.$$

In der dritten Form lautet die Gleichung:

$$r e^{i\varphi} \cdot r' e^{i\varphi'} \cdots r^\nu e^{i\varphi^\nu} = (r r' \ldots r^\nu) \cdot e^{i(\varphi + \varphi' \ldots \varphi^\nu)}.$$

Sie lehrt, dass auch hier der Satz gilt: Potenzen mit der gleichen Basis e und imaginären Exponenten werden multiplicirt, indem man die Exponenten addirt.

71. Die Division wird als Umkehr der Multiplication definirt: $a + ib : a' + ib'$ heisst diejenige Zahl bestimmen, welche mit $a' + ib'$ multiplicirt ein Product gleich $a + ib$ liefert. Da $\frac{a+ib}{a+ib} = 1$, so kann die Berechnung des Quotienten auf die Multiplication zweier complexer Zahlen zurückgeführt werden.

$$\frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{a+ib}{a'+ib'} \cdot \frac{a'-ib'}{a'-ib'} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{a'^2+b'^2} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + i\,\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}.$$

Zwei Zahlen von der Form $a' + ib'$ und $a' - ib'$ heissen conjugirt; ihr Product, gleich dem Quadrat des Modul beider Zahlen, heisst die Norm. (Gauss.)

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')} = \frac{r}{r'} \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' - i\sin\varphi') =$$

$$= \frac{r}{r'}(\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')),$$

oder:

$$r_\varphi : r'_{\varphi'} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\varphi - \varphi'}, \quad r e^{i\varphi} : r' e^{i\varphi'} = \frac{r}{r'} \cdot e^{i(\varphi - \varphi')}.$$

Der Modul des Quotienten ist gleich dem Quotienten aus beiden Moduln, das Argument des Quotienten gleich der Differenz der Argumente.

Ist der Modul des Divisors Null, so wird der Quotient unendlich gross.

72. Die Potenz mit reellem Exponenten.

a) Die Potenz mit positiv ganzem Exponenten n ist als n-malige Multiplication der Basis definirt.

$$(a + ib)^n = a^n + n a^{n-1} ib + n_2 a^{n-2} (ib)^2 + \cdots (ib)^n,$$

oder:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).^{*)}$$

In der dritten Form erhält man: $(r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$.

---

*) Moivre: Miscellanea analytica 1730.

b) Unter der Potenz mit positivem gebrochenem (rationalem) Exponenten $\frac{m}{n}$ (m und n prim zu einander) versteht man die n^{te} Wurzel aus der m^{ten} Potenz der Basis, oder die m^{te} Potenz der n^{ten} Wurzel aus der Basis. Die Uebereinstimmung beider Werthe wird die Rechnung lehren.

Die n^{te} Wurzel einer Zahl bestimmen heisst diejenige Zahl finden, welche auf die n^{te} Potenz erhoben gleich der gegebenen Zahl ist. Ist $\sqrt[n]{a + ib} = u + iv$, so muss $(u + iv)^n = a + ib$ sein.

Die Angabe der Werthe von u und v erfolgt aber bei weitem einfacher in der trigonometrischen Form.

Ist

$$[r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{\frac{1}{n}} = \varrho (\cos \psi + i \sin \psi),$$

so muss:

$$r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \varrho^n . (\cos n\psi + i \sin n\psi)$$

sein. Daraus ergiebt sich:

$$r \cos \varphi = \varrho^n \cos n\psi, \quad r \sin \varphi = \varrho^n \sin n\psi,$$

also:

$$r^2 = \varrho^{2n}, \text{ d. h. } \varrho = + \sqrt[n]{r} \text{ und } \cos \varphi = \cos n\psi, \quad \sin \varphi = \sin n\psi.$$

Die beiden letzten Gleichungen werden nur befriedigt, wenn $n\psi = \varphi$ oder bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π sich von φ unterscheidet:

$$n\psi = \varphi \pm 2k\pi, \text{ also } \psi = \frac{\varphi}{n} \pm \frac{2k\pi}{n}.$$

Indem nun k die Reihe aller positiven oder negativen ganzen Zahlen durchläuft, erhält man unendlich viele Werthe für ψ. Aber alle diejenigen, welche sich nur um Vielfache von 2π unterscheiden, gehören zu der nämlichen Zahl ϱ_ψ. Demnach giebt es nur n solcher Zahlen; dieselben gehören zu den Werthen $k = 0, 1, 2 \ldots n - 1$. Denn erstlich erkennt man, dass unter den verschiedenen Formen für ψ alle Ausdrücke mit negativem Vorzeichen von k durch Addition ganzzahliger Vielfache von 2π zu Formen mit positivem Zeichen gemacht werden können; sodann, dass für $k = (n - 1) + k'$, $\frac{2k\pi}{n} = 2\pi + \frac{2(k'-1)\pi}{n}$ wird.

Jede complexe Zahl besitzt also n von einander verschiedene n^{te} Wurzeln; dieselben sind in der Form enthalten:

$$\sqrt[n]{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \varrho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

oder:

$$\sqrt[n]{r_\varphi} = (\sqrt[n]{r})_{\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad \sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

$$k = (0, 1, 2 \ldots n - 1).$$

Auch jede reelle (positive oder negative) Zahl besitzt n von einander verschiedene Wurzeln; von denselben ist aber bei einer positiven Zahl, für welche $\varphi = 0$, bei ungeradem n nur eine reell: $k = 0$, bei geradem zwei reell: $k = 0$, $k = \frac{n}{2}$; bei einer negativen Zahl, für welche $\varphi = \pi$ ist, wird bei ungeradem n eine reell: $k = \frac{n-1}{2}$, bei geradem n sind alle theils imaginär theils complex.

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n},$$

$$\sqrt[n]{+i} = \cos\frac{(4k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(4k+1)\pi}{2n}, \quad \sqrt[n]{-i} = \cos\frac{(4k+3)\pi}{2n} + i\sin\frac{(4k+3)\pi}{2n},$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2\ldots n-1.)$$

Nach der ersten Definition für einen beliebigen gebrochenen Exponenten wird also:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)} =$$

$$= r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{m\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2\ldots n-1).$$

Nach der zweiten:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\frac{m}{n}} = \left[r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k'\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k'\pi}{n}\right)\right]^m =$$

$$= r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi + 2k'm\pi}{n} + i\sin\frac{m\varphi + 2k'm\pi}{n}\right),$$

$$(k' = 0,\ 1,\ 2\ldots n-1.)$$

Die letzten Ausdrücke rechter Hand sind aber in beiden Gleichungen identisch; denn die Zahlen $0, m, 2m \ldots (n-1)m$ lassen, da m und n relativ prim sind, durch n dividirt, lauter verschiedene Reste, folglich stellt $\frac{2k'm\pi}{n}$ bis auf Vielfache von 2π, wenn auch in anderer Reihenfolge, die Werthe der oberen Zeile dar. Den zu $k = 0$ gehörigen Werth bezeichnet man als den einfachsten unter den Wurzelwerthen.

c) Unter der Potenz mit irrationalem Exponenten versteht man den Grenzwerth der Reihe von Zahlen, welche man erhält, indem man die Potenzen mit den rationalen Zahlen als Exponenten bildet, deren Reihe die irrationale Zahl definirt. Heisst die Reihe der definirenden Zahlen: $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \ldots$, so stellt $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^\mu$ alle diejenigen Zahlen dar, deren Modul der Grenzwerth der Reihe $r^{\frac{m}{n}}, r^{\frac{m'}{n'}}, r^{\frac{m''}{n''}} \ldots$, deren Argumente die Grenzwerthe der Reihe:

$$\frac{m(\varphi+2k\pi)}{n}, \quad \frac{m'(\varphi+2k\pi)}{n'}, \quad \frac{m''(\varphi+2k\pi)}{n''} \cdots$$
$$(k = 1, 2, \ldots n, n+1, \ldots n' \ldots)$$

sind. Zu jedem ganzzahligen Werthe von k gehört ein anderer Grenzwerth des Argumentes, so dass also bei irrationalem Exponenten unendlich viele Zahlen von der Form:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^\mu = r^\mu(\cos\mu(\varphi+2k\pi) + i\sin\mu(\varphi+2k\pi)),$$

oder:

$$(r_\varphi)^\mu = (r^\mu)_{\mu(\varphi+2k\pi)}, \qquad (re^{i\varphi})^\mu = r^\mu \cdot e^{i\mu(\varphi+2k\pi)}$$

alle mit gleichem Modul r^μ vorhanden sind.

d) Eine Potenz mit negativem Exponenten soll wie früher den reciproken Werth der Potenz mit positivem Exponenten bedeuten. Für jedes μ ist:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{-\mu} = \frac{1}{[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^\mu} = \frac{1}{r^\mu(\cos\mu(\varphi+2k\pi)+i\sin\mu(\varphi+2k\pi))}$$
$$= r^{-\mu}\,.\,(\cos\mu(\varphi+2k\pi) - i\sin\mu(\varphi+2k\pi)).$$

Auch dieses Resultat lässt sich mit der Form des Moivre'schen Satzes identificiren, indem man der Gleichung die Form geben kann:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{-\mu} = r^{-\mu}(\cos-\mu(\varphi+2k\pi)+i\sin-\mu(\varphi+2k\pi)).$$

73. Die Potenz mit complexem Exponenten. (Exponentialgrösse.)

Schon in §. 67 wurde das Symbol $e^{i\varphi}$ — Zeichen für eine Potenz mit reeller Basis e und rein imaginärem Exponenten $i\varphi$ — als die Summe der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{i\varphi}{1} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \cdots\cdots\cdots$$

definirt, deren reelle und imaginäre Bestandtheile gesondert betrachtet convergente unendliche Reihen mit den Werthen $\cos\varphi$ und $i\sin\varphi$ bilden. Im Anschlusse daran definiren wir: Unter der Potenz mit der Basis e und dem complexen Exponenten $x+iy$ ist der Werth des Productes aus dem Exponentialausdrucke e^x mit dem Exponentialausdrucke e^{iy} zu verstehen; also in Formeln

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) =$$
$$= \left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots\right)\left(1+\frac{iy}{1}+\frac{iy^2}{2!}+\cdots\right).$$

Es soll im folgenden Capitel gezeigt werden, wie sich dieses Product zweier unendlicher Reihen zu einer einzigen unendlichen Reihe vereinigen lässt. Aus der Definition folgt die Fundamentaleigenschaft der Exponentialgrösse (§. 70):

$$e^{x+iy}\,.\,e^{x'+iy'} = e^x\,.\,e^{iy}\,.\,e^{x'}\,.\,e^{iy'} = e^{x+x'}\,.\,e^{i(y+y')} = e^{(x+x')+i(y+y')},$$

d. h. Potenzen mit reeller Basis e und complexen Exponenten werden multiplicirt, indem man die Exponenten addirt.

Da $e^{\pm i2k\pi} = 1$, so ist $e^{(x+iy)} \cdot e^{\pm i2k\pi} = e^{x+i(y\pm 2k\pi)} = e^{x+iy}$.

Die Exponentialgrösse bleibt ungeändert, wenn der Exponent um ein ganzzahliges Vielfaches von $2i\pi$ vermehrt oder vermindert wird; sie besitzt die Periode $2i\pi$.

Ist n eine reelle Zahl, so wird

$$(e^{x+iy})^n = (e^x \cdot e^{iy})^n = e^{nx} \cdot e^{iny} = e^{(x+iy)n}.$$

Um den allgemeinsten Exponentialausdruck stets auf die Basis e zurückführen zu können, definiren wir zuerst

74. Den Logarithmus.

Unter dem Logarithmus einer complexen Zahl $a + ib$ in Bezug auf die Basis e versteht man diejenige Zahl $x + iy$, welche die Eigenschaft hat, dass:

$e^{x+iy} = a + ib$, man bezeichnet sie: $x + iy = l(a + ib)$.

Um die Zahlen x und y zu berechnen, bestimme man

$$a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ist dann ϱ der Logarithmus der positiven Zahl $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ in Bezug auf die Basis e, so wird:

$$a + ib = e^{\varrho}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Setzt man die reellen und imaginären Bestandtheile einander gleich, so folgt

$$x = \varrho, \qquad y = \varphi \pm 2k\pi,$$

also ist

$$l(a + ib) = l(r) + i(\varphi \pm 2k\pi),$$

oder wenn man die Definition von φ (§. 67) benutzt*):

$$l(a + ib) = l(+\sqrt{a^2 + b^2}) + i\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a} \pm i2k\pi \qquad \text{wenn } a > 0,$$

$$l(a + ib) = l(+\sqrt{a^2 + b^2}) + i\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a} \pm i(2k+1)\pi \quad \text{wenn } a < 0.$$

Jede Zahl besitzt also unendlich viele Logarithmen in Bezug auf die Basis e; dieselben unterscheiden sich um ganzzahlige Vielfache von $2i\pi$. Zu $k = 0$ gehört der einfachste Werth des Logarithmus. Eine reelle positive Zahl a hat einen reellen Werth des Logarithmus, während die reelle negative Zahl a nur complexe Logarithmen besitzt, die sich von denen der positiven Zahl um $i\pi$ unterscheiden.

$$l(+1) = \pm i2k\pi. \quad l(-1) = \pm i(2k + 1)\pi.$$

---

*) Diese Gleichungen begründen den Zusammenhang zwischen dem Logarithmus und den cyclometrischen Functionen.

Aus der Gleichung:

$$e^{x+iy} \cdot e^{x'+iy'} = e^{(x+x')+i(y+y')} = (a+ib) \cdot (a'+ib')$$

folgt:

$$l(a+ib) + l(a'+ib') = l[(a+ib)\,(a'+ib')],$$

(doch besteht diese Gleichung nicht immer zwischen den einfachsten Werthen der Logarithmen.)

75. Potenzen mit complexer Basis und complexem Exponenten. (Allgemeine Exponentialausdrücke.)

Unter dem Ausdrucke $(a+ib)^{a'+ib'}$ versteht man

$$[e^{l(a+ib)}]^{a'+ib'} = e^{(a'+ib')\,.\,l(a+ib)}.$$

Setzt man

$$l(a+ib) = x + i(y \pm 2k\pi),$$

so erhält man:

$$(a+ib)^{a'+ib'} = [e^{x+i(y\pm 2k\pi)}]^{(a'+ib')}$$

und weiter:

$$[e^{x+i(y\pm 2k\pi)}]^{(a'+ib')} = e^{xa'-(y\pm 2k\pi)b'+i(xb'+(y\pm 2k\pi)a)}$$

$$= e^{xa'-(y\pm 2k\pi)b'}\,[\cos(xb'+(y\pm 2k\pi)a') + i\sin(xb'+(y\pm 2k\pi)a')].$$

Der Modul dieser Zahl sowohl wie ihr Argument hat im allgemeinen unendlich viele Werthe, entsprechend allen ganzzahligen Werthen von k; zu $k=0$ gehört der einfachste Werth. Für $b'=0$ umfasst diese Gleichung die frühere Definition einer Potenz mit reellem Exponenten. Werden a und b beide Null, so ist diese Definition hinfällig; weil für den Logarithmus der Werth x unendlich, der Werth y völlig unbestimmt wird. Nach dieser allgemeinsten Definition ist auch für $(e)^{x+iy}$ nur der einfachste Werth gleich $e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i\sin y)$, während der allgemeine Werth lautet:

$$(e)^{x+iy} = e^{x\mp 2k\pi y+i(y\pm 2k\pi x)} = e^{x\mp 2k\pi y}\,(\cos(y\pm 2k\pi x) + i\sin(y\pm 2k\pi x)).$$

Doch pflegt man unter dem Symbol e^{x+iy} stets nur den einfachsten Werth zu bezeichnen. Aus der Umkehr dieser Definition folgt noch die Definition des Logarithmus bei beliebiger Basis:

Der Logarithmus einer Zahl $a+ib$ in Bezug auf die Basis $a'+ib'$ ist diejenige Zahl $u+iv$, welche die Eigenschaft hat, dass

$$(a'+ib')^{u+iv} = a+ib.$$

Setzt man

$$a+ib = e^{\xi+i(\eta\pm 2k\pi)}$$

ferner:

$$a'+ib' = e^{s+i(t\pm 2k'\pi)},$$

so sind u und v aus den Gleichungen zu berechnen:

$$su - (t\pm 2k'\pi)\,v = \xi,$$
$$sv + (t\pm 2k'\pi)\,u = \eta \pm 2k\pi.$$

Aus diesen beiden Gleichungen werden zu jedem Werthe von k und k', u und v eindeutig bestimmt; zu $k = 0$, $k' = 0$ gehören die einfachsten Werthe des Logarithmus

$$u = \frac{s\xi + t\eta}{s^2 + t^2}, \quad v = \frac{s\eta - t\xi}{s^2 + t^2}.$$

Damit ist der Kreis der Rechnungsoperationen geschlossen; ihre Resultate sind immer in complexen Zahlen angebbar; insbesondere sind nun auch die Potenz mit negativer Basis und beliebigem Exponenten, sowie der Logarithmus mit negativer Basis oder negativem Numerus als Zahlbegriffe in die Analysis aufgenommen.

Zweites Capitel.

Complexe Reihen. Complexe Variabele. Functionen einer complexen Variabelen.

76. Unter der Summe einer unendlichen Reihe, deren Glieder complex sind:

$$\Sigma\,(u + iv) = (u_0 + iv_0) + (u_1 + iv_1) + \ldots (u_n + iv_n) \ldots$$

ist die complexe Zahl $U + iV$ zu verstehen, deren reeller Bestandtheil U gleich der Summe der unendlichen Reihe: $u_0 + u_1 + \ldots u_n + \ldots$, deren imaginärer Bestandtheil iV gleich der Summe: $i(v_0 + v_1 + \ldots v_n \ldots)$ ist. Die complexe Reihe hat also nur dann einen bestimmten Werth und heisst convergent, wenn U sowohl wie V bestimmte endliche Werthe haben, also wenn die Reihen:

$$u_0 + u_1 + \ldots u_n \ldots \text{ und } v_0 + v_1 + \ldots v_n$$

convergiren.

Sind 1) $p_0 + p_1 + p_2 \cdots + p_n \ldots$ und 2) $q_0 + q_1 + q_2 \cdots + q_n + \ldots$ zwei convergente unendliche Reihen, deren Glieder complex

$$(p_n = u_n + iv_n, \; q_n = u_n' + iv_n')$$

und deren Summen bezüglich gleich P und Q sind, so ist:

3) $\quad (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) + (p_2 + q_2) + \ldots (p_n + q_n) \ldots$

eine convergente Reihe, deren Summe $P + Q$ ist. Denn setzt man:

$$P_n = p_0 + p_1 + \ldots p_n, \quad Q_n = q_0 + q_1 + \ldots q_n,$$

so werden P_n und Q_n mit wachsenden Werthen von n sich den Grenzen P und Q nähern, folglich hat

$$P_n + Q_n = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) + \ldots (p_n + q_n),$$

das ist die Summe der $n + 1$ ersten Glieder der Reihe 3) mit wachsenden Werthen von n den Grenzwerth $P + Q$.

77. Die complexe Reihe heisst „unbedingt“ convergent, wenn die positiven Glieder der Reihen $u_0 + u_1 + u_2 \ldots$ und $v_0 + v_1 + v_2 \ldots$ und ebenso die negativen gesondert summirt endliche Werthe ergeben, oder, wie man diese Eigenschaft bezeichnet: wenn sowohl die Reihe u als auch die Reihe v unbedingt convergente sind*). (Sind also in jeder Reihe nur Glieder mit einerlei Vorzeichen vorhanden, so deckt sich der Begriff der unbedingten Convergenz mit dem der Convergenz überhaupt; sind aber z. B. die Glieder hinsichtlich des Vorzeichens alternirend, so wird eine besondere Eigenschaft ausgesagt.) (Vergl. §. 44 III.)

Convergirt eine complexe Reihe unbedingt, so convergirt auch die aus den Moduln ihrer Glieder gebildete Reihe:

$$\sqrt{u_0^2 + v_0^2} + \sqrt{u_1^2 + v_1^2} + \sqrt{u_2^2 + v_2^2} + \ldots \sqrt{u_n^2 + v_n^2} + \ldots$$

Bezeichnet man die Glieder $u + iv$ je nach den Vorzeichen von u und v gesondert, so dass

$$1)\quad \Sigma(u + iv) = \Sigma(u^{(1)} + iv^{(1)}) + \Sigma(u^{(2)} - iv^{(2)}) + \Sigma(-u^{(3)} + iv^{(3)}) + \\ + \Sigma(-u^{(4)} - iv^{(4)})$$

ist, so sind zufolge der Annahme unbedingter Convergenz

$$2)\quad \Sigma u^{(1)},\ \Sigma u^{(2)},\ \Sigma u^{(3)},\ \Sigma u^{(4)};\ \Sigma v^{(1)},\ \Sigma v^{(2)},\ \Sigma v^{(3)},\ \Sigma v^{(4)}$$

convergente Reihen, also auch nach dem Additionssatze:

$$3)\quad \Sigma(u^{(1)} + v^{(1)}),\ \Sigma(u^{(2)} + v^{(2)}),\ \Sigma(u^{(3)} + v^{(3)}),\ \Sigma(u^{(4)} + v^{(4)}).$$

Nun ist

$$4)\quad u^{(1)} + v^{(1)} > \sqrt{(u^{(1)})^2 + (v^{(1)})^2},\ u^{(2)} + v^{(2)} > \sqrt{(u^{(2)})^2 + (v^{(2)})^2}, \\ u^{(3)} + v^{(3)} > \sqrt{(u^{(3)})^2 + (v^{(3)})^2},\ u^{(4)} + v^{(4)} > \sqrt{(u^{(4)})^2 + (v^{(4)})^2}.$$

Mithin müssen

$$5)\quad \sum\sqrt{(u^{(1)})^2 + (v^{(1)})^2},\ \sum\sqrt{(u^{(2)})^2 + (v^{(2)})^2},\ \sum\sqrt{(u^{(3)})^2 + (v^{(3)})^2}, \\ \sum\sqrt{(u^{(4)})^2 + (v^{(4)})^2}$$

endliche Werthe ergeben, und folglich ist die Summe dieser vier Reihen gleich $\sum\sqrt{u^2 + v^2}$ ebenfalls eine endliche Grösse.

Der eben bewiesene Satz ist umkehrbar; weil der Modul einer Summe kleiner ist als die Summe der Moduln aus den Summanden, so folgt, dass wenn die Summen 5) endliche Werthe haben, auch die Moduln der Summen

---

*) Der Begriff der unbedingten Convergenz ist von Cauchy eingeführt; von Dirichlet, Abhandlungen der Berliner Academie 1837, erörtert worden.

$$\Sigma(u^{(1)} + iv^{(1)}),\ \Sigma(u^{(2)} - iv^{(2)}),\ \Sigma(-u^{(3)} + iv^{(3)}),\ \Sigma(-u^{(4)} - iv^{(4)})$$

endlich sein müssen; dies erfordert die Convergenz der Summen (2).

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die unbedingte Convergenz einer complexen Reihe ist also die Convergenz der zugehörigen Modulreihe).*

Eine unbedingt convergente Reihe ergiebt den nämlichen endlichen Werth, auch wenn die Reihenfolge der Glieder nach irgend welchem Gesetze verändert wird.

Es sei $U_n + iV_n$ die Summe der Glieder:

$$(u_0 + iv_0) + (u_1 + iv_1) + \cdots (u_n + iv_n)$$

und $\lim\limits_{n=\infty} (U_n + iV_n) = U + iV$; es bedeute ferner:

$$(u_0' + iv_0') + (u_1' + iv_1') + \cdots (u_p' + iv_p')$$

gleich $U_p' + iV_p'$ die Summe der $p + 1$ ersten Glieder einer unendlichen Reihe, die aus der vorigen nur durch eine andere Anordnung der Glieder gebildet ist, so kann man, wie gross auch n gedacht sein mag, p jedesmal so wählen, dass alle die Glieder, welche in $U_n + iV_n$ enthalten sind, auch in $U_p' + iV_p'$ vorkommen. Dieser letztere Ausdruck wird noch andere Glieder enthalten, aber die Indices derselben sind grösser als n. Folglich ist:

$$(U_p' + iV_p') - (U_n + iV_n) = (u_q + iv_q) + (u_r + iv_r) \ldots (u_s + iv_s)$$
$$(q, r, \ldots s > n).$$

Lässt man nun n und also auch p beliebig wachsen, so werden

$$\lim (u_q + u_r + \cdots u_s) \text{ und } \lim (v_q + v_r + \cdots v_s)$$

kleiner werden als eine beliebig kleine Grösse; weil zufolge der Convergenz der Modulreihe lediglich durch Wahl von n:

$$\lim \left(\sqrt{u_q^2 + v_q^2} + \sqrt{u_r^2 + v_r^2} + \cdots \sqrt{u_s^2 + v_s^2}\right)$$
$$q, r \ldots s > n$$

beliebig klein wird; also ist:

$$\lim (U_p + iV_p) = \lim (U_n + iV_n) = U + iV.$$

Mit dem vorstehenden ist bewiesen, dass der Fundamentalsatz der Addition auch auf eine unbedingt convergente Summe von unendlich vielen Summanden Anwendung findet. Eine nicht unbedingt convergirende Reihe aber verändert ihren Werth, wenn die Reihenfolge der Glieder verändert wird; das lehrt das Beispiel der früher angeführten Reihe mit reellen Gliedern (§. 47):

---

*) Cauchy: Cours d'analyse algébrique.

Ist

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \cdots = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right)$$

und bildet man mit verändertem Gesetz der Reihenfolge:

$$S' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \cdots = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{2m}\right),$$

so wird, da man S auch unter der Form betrachten kann:

$$S = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-2} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{4m}\right),$$

$$S' - S = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{1}{4m-2} - \frac{1}{4m}\right) = \frac{1}{2} \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right) = \frac{1}{2} S,$$

folglich ist: $S' = \frac{3}{2} S$.

Offenbar kann eine bedingt convergente reelle Reihe durch geeignete Anordnung der Glieder einen beliebig gegebenen Werth C erhalten. Denn bezeichnet Σa die Vereinigung aller positiven, Σb die Vereinigung aller negativen Glieder, — Reihen, welche über jeden Betrag hinaus wachsen, — so bilde man eine Reihe, welche zuerst aus so vielen Gliedern a besteht, dass ihre Summe grösser wird als C, sodann füge man so viele Glieder b hinzu, dass die Summe kleiner wird als C. Indem man diese Anordnung abwechselnd fortsetzt, wird die Abweichung von C nie mehr betragen, als der Werth des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes. Da die Grössen a und b nach Null convergiren, so hat der Summenwerth der Reihe die Grenze C*).

78. Die Multiplication zweier unendlicher Reihen.

Bilden die Moduln der beiden complexen Reihen:

$$1)\quad p_0 + p_1 + p_2 + \cdots p_n \cdots \quad \text{und} \quad 2)\quad q_0 + q_1 + q_2 \cdots q_n \cdots$$
$$(p_n = u_n + iv_n, \qquad q_n = u'_n + iv'_n)$$

ebenfalls convergente Reihen:

$$3)\quad \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots \varrho_n + \cdots \qquad 4)\quad \varrho_0' + \varrho_1' + \varrho_2' + \cdots \varrho_n' + \cdots$$
$$(\varrho_n = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \qquad \varrho_n' = \sqrt{u_n'^2 + v_n'^2})$$

so ist:

$$5)\quad p_0 q_0 + (p_0 q_1 + p_1 q_0) + (p_0 q_2 + p_1 q_1 + p_2 q_0) + \cdots$$
$$\cdots (p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \cdots p_k q_{n-k} + \cdots p_n q_0) + \cdots$$

---

*) Dirichlet a. a. O.; Riemann, Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Werke S. 221.

eine convergente Reihe, deren Summe $P \cdot Q$ ist. Um dieses Theorem zu beweisen*), bedürfen wir eines Hülfsatzes:

Bedeuten R und R' die Summen der beiden aus lauter positiven Gliedern bestehenden Reihen 3) und 4), so ist:

$$6) \qquad \varrho_0\varrho_0' + (\varrho_0\varrho_1' + \varrho_1\varrho_0') + (\varrho_0\varrho_2' + \varrho_1\varrho_1' + \varrho_2\varrho_0') + \dots$$
$$\dots (\varrho_0\varrho_n' + \varrho_1\varrho'_{n-1} + \dots \varrho_k\varrho'_{n-k} + \dots \varrho_n\varrho_0') + \dots$$

eine convergente Reihe, deren Summe gleich $R \cdot R'$.

Bezeichnet man nämlich die Summe der $n+1$ ersten Glieder der Reihen 4), 5) und 6) bezüglich mit R_n, R_n', S_n, so erkennt man, dass

$$S_n < R_n R_n'.$$

Nennt man m die grösste ganze Zahl, welche in $\frac{n}{2}$ enthalten ist, so wird $S_n > R_m R_m'$. Denn das Product

$$(\varrho_0 + \varrho_1 + \dots \varrho_n)(\varrho_0' + \varrho_1' + \dots \varrho_n')$$

besitzt auch Glieder, welche in S_n nicht auftreten, während die Glieder des Productes: $(\varrho_0 + \varrho_1 + \dots \varrho_m)(\varrho_0' + \varrho_1' + \dots \varrho_m')$ sämmtlich in S_n vorkommen, dort überdies vermehrt um positive Grössen. Aus der für jedes noch so grosse n geltenden Ungleichung

$$R_n R_n' > S_n > R_m R_m'$$

folgt, dass $\text{Lim}\, S_n = \text{Lim}\, R_n R_n' = \text{Lim}\, R_m R_m'$, weil bei beliebig wachsendem n $\text{Lim}\, R_n = \text{Lim}\, R_m$, $\text{Lim}\, R_n' = \text{Lim}\, R_m'$ wird. Bildet man die Differenz

$$R_n \cdot R_n' - S_n = (\varrho_1\varrho_n' + \varrho_2\varrho'_{n-1} + \dots \varrho_n\varrho_1') + (\varrho_2\varrho_n' + \varrho_3\varrho'_{n-1} + \dots \varrho_n\varrho_2')$$
$$(\varrho_3\varrho_n' + \varrho_4\varrho'_{n-1} + \dots \varrho_n\varrho_3') + \dots \varrho_n\varrho_n',$$

so ergiebt sich, weil nach dem eben bewiesenen Theorem

$$\lim_{n=\infty} (R_n R_n' - S_n) = 0,$$

dass auch die rechts stehende Summe die Null zur Grenze hat.

Mit Hülfe dieses Ergebnisses wird der Beweis des aufgestellten Productsatzes folgendermassen geführt.

Heist S_n' die Summe der $n+1$ ersten Glieder der Reihe 5), so wird:

$$S_n - P_n Q_n = (p_1 q_n + p_2 q_{n-1} + \dots p_n q_1) +$$
$$+ (p_2 q_n + p_3 q_{n-1} + \dots p_n q_2) + \dots p_n q_n,$$

und es muss gezeigt werden, dass die Summe der auf der rechten Seite stehenden Producte bei wachsenden Werthen von n die Null zur Grenze hat. Das wird dann und nur dann der Fall sein, wenn der Modul dieses complexen Ausdruckes nach Null convergirt. Da nun

*) Cauchy, Cours d'Analyse algébrique.

der Modul einer Summe von complexen Zahlen kleiner (höchstens gleich) ist als die Summe aus den Moduln der Summanden, so ist das Behauptete erwiesen, weil

$$(\varrho_1 \varrho_n' + \varrho_2 \varrho'_{n-1} + \cdots \varrho_n \varrho_1') + (\varrho_2 \varrho_n' + \varrho_3 \varrho_{n-1} + \cdots \varrho_n \varrho_2') + \cdots \varrho_n \varrho_n'$$

nach Null convergirt.

Wir wenden dieses Theorem auf die Exponentialfunction an, wie sie §. 73 definirt wurde:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{iy}{1} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots\right)$$

Das Product der beiden unendlichen Reihen wird durch eine unendliche Reihe dargestellt:

$$1 + \frac{x+iy}{1} + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1} \cdot \frac{iy}{1} + \frac{(iy)^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{iy}{1} + \frac{x}{1} \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!}\right)$$

$$+ \cdots \left(\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{n-1!} \frac{iy}{1} + \frac{x^{n-2}}{n-2!} \frac{(iy)^2}{2!} + \cdots \frac{x^{n-k}}{n-k!} \frac{(iy)^k}{k!} + \cdots \frac{(iy)^n}{n!}\right) + \cdots,$$

die in der Form zusammengefasst werden kann:

$$1 + \frac{x+iy}{1} + \frac{(x+iy)^2}{2!} + \frac{(x+iy)^3}{3!} + \cdots \frac{(x+iy)^n}{n!} + \cdots.$$

Dies ist die Exponentialreihe mit complexem Argumente, sie stellt den einfachsten Werth der Exponentialfunction e^{x+iy} dar.

79. *Eine Grösse heisst eine complexe Veränderliche oder Variabele, wenn sie verschiedene complexe Zahlenwerthe anzunehmen vermag.*

Während eine Menge von reellen Zahlen stets durch die Punkte einer geradlinigen Strecke abgebildet werden kann, wird ein abgegrenzter Theil von complexen Zahlen im allgemeinen durch ein von irgend einer Curve begrenztes „Gebiet“ von zwei Dimensionen der Ebene veranschaulicht. Ob die Punkte der Grenzcurve selbst zum Gebiete zu rechnen sind oder nicht, muss in jedem einzelnen Falle besonders angegeben werden. Solch ein Gebiet kann sich insbesondere auch auf ein lineares Gebilde (Gebiet einer Dimension): auf die Punkte eines Curvenstückes (einer geradlinigen Strecke) reduciren.

So bilden z. B. alle complexen Zahlen, deren Moduln kleiner als r_1 und grösser als r_2 sind, ein Gebiet, welches geometrisch durch den ebenen Ring, begrenzt durch die zwei concentrischen Kreise mit den Radien r_1 und r_2 um den Coordinatenanfangspunkt, dargestellt wird. Die complexen Zahlen aber, deren Modul gleich r_1 ist, bilden ein lineares Gebilde, nämlich die Kreisperipherie, deren Radius r_1 ist.

Ein Gebiet von zwei Dimensionen heisst zusammenhängend, wenn man von jedem innerhalb des Gebietes gelegenen Punkte zu jedem anderen Punkte des Gebietes gelangen kann, ohne die Grenzcurve zu überschreiten.

Ein Gebiet von einer Dimension heisst zusammenhängend, wenn man von jedem auf dem Gebiete gelegenen Punkte zu jedem andern Punkte des Gebietes gelangen kann, ohne das Gebiet zu verlassen.

Eine Grösse heisst innerhalb eines Gebietes unbeschränkt veränderlich, wenn sie alle diesem Gebiete angehörigen Zahlenwerthe anzunehmen vermag.

Eine complexe Grösse heisst continuirlich oder stetig veränderlich, wenn alle Werthe, welche sie annimmt, stets einem endlichen zusammenhängenden Gebiete angehören.

Insbesondere wird eine Grösse an einer bestimmten Stelle unbeschränkt stetig veränderlich genannt, wenn die Veränderliche alle Werthe annehmen kann, welche einem die Stelle einschliessenden Gebiete von noch so kleiner aber doch endlicher Ausdehnung angehören. Dagegen ist die Grösse an dieser Stelle beschränkt stetig veränderlich, wenn die Werthe, welche sie in der Nähe dieser Stelle annimmt, ein Gebiet bilden, auf dessen Grenzcurve die Stelle liegt, oder auch nur ein Gebiet von einer Dimension. Sie ist unstetig an dieser Stelle, wenn der Punkt für sich isolirt ist, also keinem Gebiete angehört.

Es ist hierbei noch auf einen Umstand zu achten: Sagt man von einer reellen Veränderlichen, sie verändere sich stetig innerhalb eines Intervalls von einem Werthe a zu einem Werthe b, so weiss man damit, welche Zahlenwerthe sie annimmt, oder geometrisch gesprochen, man kennt den Weg, welchen sie durchläuft. Verändert sich eine complexe Grösse stetig von einem complexen Werthe a bis zu einem complexen Werthe b, so ist damit noch gar nicht bekannt, welche Zwischenwerthe sie annimmt. Die Art ihrer Veränderung ist ebenso unermesslich, wie die Verbindung zweier Punkte der Ebene durch einen continuirlichen Zug.

Die stetige Veränderung einer complexen Grösse $z = x + iy$ erfordert, dass sowohl der reelle Bestandtheil x als der Factor des imaginären: y sich stetig ändere. Eine complexe Veränderliche wird unendlich klein, wenn ihr Modul unendlich klein wird, d. h. wenn sowohl x wie y die Null zur Grenze haben. Eine complexe Grösse wird unendlich gross, wenn ihr Modul unendlich gross wird, d. h. wenn entweder x oder y, oder beide zugleich numerisch über jeden Betrag hinaus wachsen.

Den unendlich grossen complexen Zahlenwerthen entsprechen in der Bildebene die unendlich fernen Punkte, und wie eine complexe Zahl $x + iy$ unendlich werden kann, während das Verhältniss $x : y$ alle möglichen Werthe annimmt, so findet sich in der Ebene auf jeder durch den Coordinatenanfangspunkt gelegten Richtung ein unendlich ferner Punkt. Insofern deckt sich der Grenzbegriff der projectiven ebenen Geometrie,

demzufolge jeder Richtung ein unendlich ferner Punkt zugehört, mit dem complexen Zahlensysteme hinsichtlich der unendlichen Werthe.

Andererseits erfordert bei den analytischen Untersuchungen das Auftreten einer unendlichen Grösse stets besondere Betrachtungen; diese sind von dem Verhältniss der Zahlen $x:y$ meistens unabhängig und können durch eine einfache Substitution auf das Verhalten bei einem endlichen Werthe der Variabelen zurückgeführt werden. Denn soll die Variabele z über jede Grenze hinaus wachsen, so entspricht solchen Werthen in der Gleichung: $z = \frac{1}{z'}$ nur ein einziger Werth von z', nämlich der Werth 0, wobei die verschwindenden reellen Zahlen x' und y' in $z' = x' + iy'$ noch jedweden Verhältnisswerth annehmen können. Die unendlichen Werthe von z sind also auf diese Weise in einen Punkt zusammengefasst.

Man kann diesen Zusammenhang geometrisch in zweierlei Weise ausdrücken. Erstlich man sagt direct, die Ebene ist im Unendlichen durch einen Punkt geschlossen. Diese Aussage deckt sich mit keiner wirklichen Vorstellung (ebensowenig wie die Aussage, die Ebene ist im Unendlichen durch eine Gerade begrenzt), weil von Vorstellungen über das Unendliche nicht die Rede sein kann; sie sagt vielmehr nur aus, wie man gewisse Grenzprozesse vollzieht. Man kann sich aber ein anschauliches Bild von diesem Begriffe verschaffen, wenn man von der Ebene auf die Kugel übergeht. Denkt man sich auf den Coordinatenanfangspunkt der Ebene eine Kugel von beliebigem Radius gestellt, und verbindet man den höchsten Punkt dieser Kugel mit den Punkten der Ebene, so trifft jede dieser Geraden die Kugelfläche in einem weiteren Punkte. Diesen Punkt betrachte man als das Bild der complexen Zahl $x + iy$, welche ursprünglich durch den Punkt der Ebene mit den Coordinaten x und y dargestellt war. Alsdann convergiren die Punkte, welche beliebig weit gelegenen Punkten der Ebene entsprechen, auf der Kugel insgesammt nach einem einzigen Punkte, nämlich dem höchsten. Man kann auf diese Weise eine endliche Kugelfläche zur Darstellung des Zahlsystemes verwerthen; doch werden wir im folgenden bei der Ebene bleiben.

Denn es giebt noch eine zweite Möglichkeit, die Auffassung des Unendlichen durch einen Punkt anschaulich zu gestalten.

In der z-Ebene breite man alle die Zahlen aus, deren Modul eine gewisse beliebige Grenze R nicht übersteigt; alle Zahlen aber, deren Modul grösser ist als R, breite man auf einer andern Ebene z' aus, deren Punkte denen der ersten durch die Gleichung $z' = \frac{1}{z}$ zugeordnet werden. Setzt man

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad z' = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

so ist

$$\varrho(\cos\psi + i\sin\psi) = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi), \text{ also } \varrho = \frac{1}{r}, \quad \psi = -\varphi.$$

Allen Punkten der z-Ebene, welche ausserhalb des Kreises $r = R$ liegen, entsprechen Punkte, welche in der z'-Ebene innerhalb des Kreises $\varrho = \frac{1}{R}$ liegen. Kreise um den Anfangspunkt $z = 0$ verwandeln sich in Kreise um den Anfangspunkt $z' = 0$, die aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden; dem Unendlichen in der z-Ebene entspricht nur ein Punkt, nämlich $z' = 0$. Diesen Zusammenhang zwischen zwei Ebenen, die Kreisverwandtschaft*) oder die Transformation durch reciproke Radii vectores genannt, werde ich später bei unendlichen Werthen von z benutzen.

80. Wenn die Werthe einer complexen Veränderlichen $w = u + iv$ durch die Werthe einer complexen Veränderlichen $z = x + iy = r_\varphi$ derart bestimmt sind, dass zu jedem Werthe von z innerhalb eines bestimmten Gebietes ein oder auch mehrere Werthe von w durch eine endliche oder auch unendliche Anzahl von Operationen (Additionen oder Multiplicationen und deren Umkehr) der Grösse z angegeben werden können, so heisst w eine Function der complexen Veränderlichen z.

Auch hier gelten die Unterscheidungen der Functionen in einwerthige und mehrwerthige, je nach der Anzahl der zu einem Werthe von z gehörigen Werthe von w, in algebraische und transscendente, je nach der Form, in welcher die Variabelen auftreten, und in explicite und implicite, je nachdem die Function nach w aufgelöst ist oder nicht.

Der Gesammtverlauf einer einwerthigen (monotropen) Function wird mit Hülfe zweier Ebenen veranschaulicht. Jedem Werthe $x + iy = r_\varphi$ der Grösse z entspricht ein Punkt der Ebene I, dessen rechtwinklige Coordinaten x und y sind, jedem zugehörigen Werthe $u + iv$ ein Punkt der Ebene II, dessen rechtwinklige Coordinaten u und v sind. Gehört zu jedem Werthe von z ein bestimmter mit z stetig sich ändernder Werth von w, so wird jedem Punkte der Ebene I ein Punkt der Ebene II, jeder Linie eine Linie, jedem zusammenhängenden Flächenstücke ein zusammenhängendes Flächenstück entsprechen. Aendert sich dagegen an einzelnen Stellen w nicht stetig, während z stetig verändert wird, so entsprechen einem zusammenhängenden Stücke der Ebene I nicht zusammenhängende Stücke der Ebene II. Die Abhängigkeit der Grösse w von z ist kurz gesagt geometrisch vorgestellt als eine Abbildung der Ebene II auf die Ebene I**).

---

*) Möbius, Abhandl. der sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1855.

**) Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen. Werke S. 5.

Solch eine Abbildung ist z. B. im vorigen Paragraphen vermittelst der Gleichung: $w = \frac{1}{z}$ bereits untersucht worden.

81. Wir denken uns eine explicite Function $w = u + iv = f(z) = f(x + iy) = f(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))$ — die Grössen u und v sind Functionen der reellen Veränderlichen x und y oder r und φ — und fragen nach dem analytischen Kennzeichen der unbeschränkten Stetigkeit solch einer Function in einem Gebiete, für welches sie bestimmte Werthe hat. Nach den bisherigen Erörterungen muss sich um jede Stelle, an welcher w stetig sein soll, ein zusammenhängendes Gebiet von zwei Dimensionen von noch so kleiner jedoch endlicher Ausdehnung finden lassen, dem ein zusammenhängendes Gebiet von w entspricht; d. h. die Grössen u und v müssen sich stetig ändern, wenn die Grössen x und y oder r und φ stetig geändert werden: oder mit anderen Worten u und v müssen stetige Functionen der beiden reellen Veränderlichen x und y oder r und φ sein (§. 52). Bei der Darstellung der Grössen u und v als Functionen von r und φ ist aber noch zu bemerken, dass, soll die Function einwerthig sein, eine Vermehrung des φ um Vielfache von 2π die Werthe dieser Functionen nicht ändern darf.

Bezeichnet man den Zuwachs von z mit $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ und und setzt man:

$$w + \Delta w = (u + \Delta u) + i(v + \Delta v) = f(z + \Delta z),$$

so muss, wie auch Δx und Δy nach Null convergiren mögen,

$$\text{Lim}\,\Delta u = 0 \quad \text{und} \quad \text{Lim}\,\Delta v = 0$$

werden. Diese beiden Bedingungen vereinigen sich zu der einen Aussage:

Die Function $w = f(z)$ ist an einer Stelle z stetig, wenn sich diese Stelle in ein Gebiet einschliessen lässt, so dass für jede Stelle $z + \Delta z$ in diesem Gebiete der Modul der Differenz:

$$\text{mod}\,(\Delta w) = \text{mod}\,[f(z + \Delta z) - f(z)] = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}$$

kleiner wird als eine beliebig kleine vorgegebene Zahl δ.

82. Indem wir uns dazu wenden, bestimmte Beispiele für Functionen einer complexen Variabelen zu bilden, beschränken wir uns vor allem auf die Forderung, dass sich nach einer gegebenen Formel zu den Werthen von z ein oder auch mehrere Werthe von w berechnen lassen. Das allgemeinste Hülfsmittel, das uns nach unseren bisherigen Untersuchungen dafür zu Gebote steht, ist die Potenzreihe, welche die expliciten rationalen oder irrationalen Functionen umfasst.

Unter den Potenzreihen selbst haben wir bereits im reellen Gebiet die Exponentialreihe, und die Umkehr derselben, den Logarithmus, kennen gelernt; auf diese Functionen können wir (§. 67 und §. 74) die goniometrischen und cyclometrischen zurückführen.

Demnach stellen wir uns die Aufgabe: erstlich die expliciten rationalen und irrationalen, zweitens die Exponentialfunction und deren Umkehr, den Logarithmus, drittens allgemein die Eigenschaften der durch Potenzreihen dargestellten Functionen im complexen Gebiet zu studiren. Diese Probleme bilden die Grundlage der allgemeinen Functionentheorie; auf dieselben kommen die folgenden Untersuchungen immer wieder zurück, indem im Fortschritte derselben die Methoden zur vollständigen Lösung allmälig gewonnen werden. Durch sie werden wir schliesslich in den Stand gesetzt, die Entwickelung der impliciten algebraischen Functionen auszuführen.

1. Die Potenz $w = z^m$ mit ganzzahligem positivem Exponenten ist eine einwerthige Function und stetig für die ganze Ebene, weil $u = r^m \cos m\varphi$, $v = r^m \sin m\varphi$ stetige Functionen von r und φ sind, die bei einer Vermehrung des Argumentes φ um Vielfache von 2π sich nicht ändern.

Um das Verhalten der Function bei unendlichen Werthen von z zu untersuchen, setze man $z = \frac{1}{z'}$, so ist $w = \frac{1}{z'^m}$ und dem Unendlichen entspricht die Stelle $z' = 0$. An dieser Stelle wird w unendlich, d. h. der Modul wächst, wie man sich auch der Stelle nähern mag, in bestimmter Weise über alle Grenzen. Der unendliche Punkt ist also für diese Function ein singulärer. Da aber die Function $w = \frac{1}{z'^m}$ die Eigenschaft hat, dass sie mit $z'^m = \left(\frac{1}{z}\right)^m$ multiplicirt an der Stelle $z' = 0$ den endlichen Werth 1 ergiebt, so nennt man diese singuläre Stelle eine ausserwesentliche; indem man allgemein definirt*):

Wird an einer im Endlichen gelegenen Stelle $z = \alpha$ oder im Unendlichen $z = \infty$ eine Function $f(z)$ unendlich, so heisst diese singuläre Stelle eine ausserwesentliche, falls sich eine ganze Zahl m angeben lässt, so dass

$$[(z-\alpha)^m f(z)] \quad \textit{oder} \quad \left(\frac{1}{z}\right)^m f(z)$$

gleich einer endlichen Grösse G wird, wie man auch immer z nach α, bezüglich nach ∞ convergiren lässt; genauer ausgedrückt heisst dies: es muss sich um α ein Gebiet angeben lassen, in welchem sich die obigen Producte von G um weniger als eine beliebig kleine Zahl δ unterscheiden.

Aus dem vorigen folgt: Jede ganze rationale Function vom n^{ten} Grade in z ist einwerthig und stetig für die ganze Ebene und besitzt nur im unendlichen Punkte eine ausserwesentliche Singularität. Denn

---

*) Weierstrass. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. Abhandl. d. Akad. d. Wissensch. Berlin 1876.

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n \qquad (a_n \text{ von 0 verschieden})$$

ist für jedes endliche z eine Summe von lauter stetigen Functionen, und nur für $z = \infty$ wird sie unendlich, ebenso wie

$$f\left(\frac{1}{z'}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z'} + \frac{a_2}{z'^2} + \cdots \frac{a_n}{z'^n}$$

für $z' = 0$; aber

$$z'^n f\left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{1}{z^n} f(z) = a_0 z'^n + a_1 z'^{n-1} + a_2 z'^{n-2} + \cdots a_n$$

wird für $z' = 0$ gleich a_n.

2. Die rationale gebrochene Function

$$\frac{1}{(z-\alpha)^m}$$

ist einwerthig und stetig in der ganzen Ebene, mit Ausnahme des ausserwesentlichen singulären Punktes $z = \alpha$. Der unendliche Punkt ist, wie die Substitution

$$\frac{1}{(z-\alpha)^m} = \left[\frac{z'^m}{(1-\alpha z')^m}\right]_{z'=0}$$

lehrt, kein singulärer.

Die allgemeinste gebrochene rationale Function ist von der Form

$$\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots b_m z^m}.$$

Im dritten Capitel wird gezeigt werden, dass jede rationale Function vom Grade n sich in n lineare Factoren zerlegen lässt. Wird dieses Resultat hier schon vorausgesetzt, also der vorstehende Bruch in der Form

$$\frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2) \ldots (z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2) \ldots (z-\beta_m)}$$

geschrieben (die Grössen α wie β können unter sich zum Theil gleich sein, nur werden die Grössen α von β verschieden gedacht, weil sonst Factoren sich von vornherein wegheben liessen), so erkennt man: die rational gebrochene Function ist einwerthig und stetig in der ganzen endlichen Ebene mit Ausnahme der ausserwesentlichen singulären Punkte $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m$. Das Unendliche ist ebenfalls eine ausserwesentliche singuläre Stelle, falls $n > m$, dagegen eine reguläre, wenn $n < m$. Denn es verhält sich die Function wie:

$$\frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{\left(\frac{1}{z'} - \alpha_1\right)\left(\frac{1}{z'} - \alpha_2\right) \cdots \left(\frac{1}{z'} - \alpha_n\right)}{\left(\frac{1}{z'} - \beta_1\right)\left(\frac{1}{z'} - \beta_2\right) \cdots \left(\frac{1}{z'} - \beta_m\right)} = \frac{a_n}{b_m} \cdot z'^{m-n} \frac{(1-\alpha_1 z')(1-\alpha_2 z') \cdots (1-\alpha_n z')}{(1-\beta_1 z')(1-\beta_2 z') \cdots (1-\beta_m z')}$$

für $z' = 0$.

3. **Die einfachste explicite irrationale algebraische Function**, die Potenz $(z'-a)^m$, werde durch die Substitution $z'-a=z$ auf die Form z^m gebracht; m soll eine **rationale gebrochene Zahl** $\frac{p}{q}$ **sein.** Alle Sätze, welche im folgenden für die Function z^m bewiesen werden, können auf die allgemeinere Form $(z'-a)^m$ leicht übertragen werden, indem man nur zu beachten hat, dass alles, was für den Punkt $z=0$ gilt, sich auf den Punkt $z'=a$ bezieht.

Ist

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so wird

$$w = z^m = r^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p}{q}(\varphi + 2k\pi) + i\sin\frac{p}{q}(\varphi + 2k\pi)\right)$$
$$(k = 0, 1, \ldots q-1).$$

Zufolge dieser Darstellung ist die Function berechenbar. Denn cos und sin sind Potenzreihen. Jeder ganzzahlige Werth von k bestimmt zu jeder Stelle den Werth eines **Zweiges** der Function, die also nicht mehr wie die vorigen eine eindeutige, sondern eine mehrdeutige ist. Im Punkte $z=0$ und $z=\infty$ haben alle Zweige denselben Werth, nämlich

falls $\frac{p}{q} > 0$ in $z=0$ den Werth 0, in $z=\infty$ den Werth ∞,

falls $\frac{p}{q} < 0$ in $z=0$ den Werth ∞, in $z=\infty$ den Werth 0.

Diese beiden Punkte heissen **Verzweigungspunkte** der Function; im ersten Falle ist ausserdem der Punkt $z=\infty$, im zweiten der Punkt $z=0$ ein Unendlichkeitspunkt.

Es fragt sich nun wie man die zu einem Zweige der Function gehörigen Werthe zusammenfassen kann, so dass dann jeder Zweig für sich eine im allgemeinen stetige Function ist.

Man ziehe vom Nullpunkte aus eine beliebige ins Unendliche verlaufende Curve, welche sich selbst nicht schneidet; es ist am einfachsten, eine der Coordinatenlinien zu wählen, z. B. den positiven Theil der Abscissenaxe.

Zu jedem Punkte dieser Geraden gehören q Werthe der Function

$$w = r^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p}{q}(\varphi + 2k\pi) + i\sin\frac{p}{q}(\varphi + 2k\pi)\right)$$
$$(k = 0, 1, \ldots q-1).$$

Indem man für eine vom Nullpunkte beliebig wenig, jedoch um eine endliche Grösse entfernte Stelle einen der Werthe herausgreift, z. B. den zu $k=0$ gehörigen, lege man allen übrigen Punkten der Curve diejenigen Werthe bei, welche aus dem angenommenen durch stetige Aenderung von r und φ hervorgehen, bei denen also k gleichfalls

Null ist. Zu der positiven Abscissenaxe sind auf diese Weise die Werthe $w = r^{\frac{p}{q}}$ gewählt. Man denke sich nun, um zu den übrigen Punkten der Ebene die Functionswerthe eines Zweiges zu construiren, concentrische Kreise um den Coordinatenanfangspunkt mit allen möglichen Werthen von r gezeichnet, und lege, indem man diese Kreise in einerlei Richtung, z. B. von der positiven Abscissenaxe zur positiven Ordinatenaxe durchläuft, den Punkten derselben diejenigen Werthe von w bei, welche sich bei stetiger Aenderung von φ ergeben.

Auf einem Kreise mit dem Radius r entspricht auf diese Weise dem Punkte:

$$\varphi = 0, \quad z = r, \quad w = r^{\frac{p}{q}},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad z = ri, \quad w = r^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p}{q}\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{p}{q}\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\varphi = \pi, \quad z = -r, \quad w = r^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p}{q}\pi + i\sin\frac{p}{q}\pi\right),$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}, \quad z = -ri, \quad w = r^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p}{q}\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{p}{q}\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\varphi = 2\pi, \quad z = r, \quad w = r^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p}{q}2\pi + i\sin\frac{p}{q}2\pi\right).$$

Hiernach ist w eine stetige Function auf dem ganzen Kreise, nur fallen die Endwerthe für $\varphi = 2\pi$ nicht mit den Anfangswerthen für $\varphi = 0$ zusammen. Also auch die Werthe, welche zu Punkten in beliebiger Nähe der positiven Abscissenaxe mit positiven Ordinaten gehören, unterscheiden sich um endliche Grössen von den Werthen, welche die Punkte unterhalb der positiven Abscissenaxe besitzen. Ein auf diese Weise construirter Zweig der Function ist also unstetig längs der positiven Abscissenaxe. Geometrisch pflegt man dies auch so zu bezeichnen: Ein Zweig der Function $z^{\frac{p}{q}}$ ist stetig in der zusammenhängenden Fläche, welche sich ergiebt, wenn die unendliche Ebene vom Null- bis zum Unendlichkeitspunkte zerschnitten wird.

Dass in der That der Zweig an jeder anderen Stelle nicht nur, wie aus der Construction folgt, eindeutig, sondern auch stetig ist, erkennt man leicht. Denn ist $z = \varrho\,(\cos\psi + i\sin\psi)$, ψ um eine endliche Grösse von Null oder 2π verschieden, eine beliebige Stelle, so umschliesst man dieselbe mit einem kleinen Kreise mit dem Radius $\Delta\varrho$; die Punkte auf der Peripherie oder im innern dieses Kreises bekommen die Coordinaten

$$z + \Delta z = z + \varepsilon\,(\cos\Theta + i\sin\Theta) = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$(\varepsilon \leqq \Delta\varrho, \quad 0 \leqq \Theta < 2\pi),$$

so dass

$$r \cos \varphi = \varrho \cos \psi + \varepsilon \cos \Theta, \quad r \sin \varphi = \varrho \sin \psi + \varepsilon \sin \Theta.$$

Hieraus folgt, dass $r = \sqrt{\varrho^2 + \varepsilon^2 + 2\varrho\varepsilon \cos(\psi - \Theta)}$; es kann also durch Wahl von $\Delta\varrho$ die Differenz abs $[r - \varrho]$ kleiner als eine beliebige Zahl δ gemacht werden, woraus dann weiter folgt, dass auch $\varphi = \psi \pm \eta$ gesetzt werden kann, wobei η beliebig klein ist. Ist nun ψ um eine endliche Grösse von Null oder 2π verschieden, so ist $\psi \pm \eta$ stets eine positive zwischen Null und 2π gelegene Zahl, und die Functionswerthe

$$w + \Delta w = [\varrho \pm \delta]^{\frac{p}{q}} \left[\cos \frac{p}{q}(\psi \pm \eta) + i \sin \frac{p}{q}(\psi \pm \eta)\right]$$

unterscheiden sich, wie die bezüglichen Reihen lehren, von:

$$w = \varrho^{\frac{p}{q}} \left[\cos \frac{p}{q}\psi + i \sin \frac{p}{q}\psi\right]$$

beliebig wenig.

Diese von Cauchy begründete Methode, einen Schnitt zu ziehen, der bei Aenderung des Argumentes z nicht überschritten werden darf, damit die Function w eindeutig und stetig bleibt, ist von Riemann vervollkommnet worden durch ein Verfahren, welches gestattet, alle Zweige gleichzeitig ins Auge zu fassen und ohne Einschränkung auf allen Wegen die Function zu einer eindeutigen und stetigen zu machen. Dies gelingt, wenn man bei einer q-deutigen Function auch die Variabele z auf q verschiedenen ebenen Blättern sich bewegen lässt.

Wir wollen zuerst den einfachsten Fall betrachten, indem wir annehmen, dass $q = 2$ ist. Ausser der einen längs der positiven x-Axe zerschnittenen Ebene, welcher wir, ausgehend von den Werthen $w = r^{\frac{p}{q}}$, die Functionswerthe zugeordnet haben, nehmen wir für die Bewegung von z eine zweite Ebene. Den Punkten der positiven Abscissenaxe ordnet man gemäss der allgemeinen Gleichung:

$$w = r^{\frac{p}{q}} \left(\cos \frac{p}{q}(\varphi + 2k\pi) + i \sin \frac{p}{q}(\varphi + 2k\pi)\right)$$

für $q = 2$ die Werthe $w = r^{\frac{p}{2}} (\cos(p\pi) + i \sin(p\pi))$ $(k = 1)$ zu, und verfahre bei der Ausbreitung der übrigen Werthe in der früheren Weise, so werden die Punkte mit beliebig kleinen negativen Ordinatenwerthen Argumente erhalten, die für $\varphi = 2\pi$ stetig in den Werth

$$w = r^{\frac{p}{2}} (\cos 2\pi p + i \sin 2\pi p) = r^{\frac{p}{2}}$$

übergehen, also wiederum von den Anfangswerthen, die für die zweite Ebene gewählt wurden, um eine endliche Grösse verschieden sind, dagegen mit den Anfangswerthen den ersten zusammenfallen. Demnach unterscheide man im ersten Blatte längs der positiven Abscissenaxe zwei Ufer; das eine mit positivem Ordinatenwerthe heisse $I^{(+)}$, das

andere mit negativem $I^{(-)}$; ebenso im zweiten Blatte die beiden Ufer $II^{(+)}$, $II^{(-)}$. Man denke sich die beiden Ebenen über einander gelegt, und verbinde $I^{(+)}$ mit $II^{(-)}$, $I^{(-)}$ mit $II^{(+)}$, so dass sich also die beiden Ebenen oder Blätter längs der ganzen positiven Abscissenaxe durchkreuzen. Es entsteht eine zusammenhängende zweiblättrige Fläche, die Riemann eine Windungsfläche erster Ordnung nennt. Jedem Punkte dieser Fläche entspricht ein bestimmter Functionswerth, jeder stetigen Curve auf der Fläche (mag sie im selben Blatte bleiben, oder ins andere übertreten) entsprechen Functionswerthe, welche sich stetig ändern; jede geschlossene Curve, welche den Verzweigungsschnitt entweder keinmal oder in einer Anzahl, die ein Vielfaches von 2 ist, überschreiten muss, führt zu einem Endwerthe, welcher mit dem Anfangswerthe identisch ist*). Sind mehr als zwei Blätter vorhanden, z. B. $q = 5$, so entsprechen:

$I^{(+)}$ die Werthe $r^{\frac{p}{5}}$,

$II^{(+)}$ „ „ $r^{\frac{p}{5}}\left(\cos\frac{2p\pi}{5} + i\sin\frac{2p\pi}{5}\right)$,

$III^{(+)}$ „ „ $r^{\frac{p}{5}}\left(\cos\frac{4p\pi}{5} + i\sin\frac{4p\pi}{5}\right)$,

$IV^{(+)}$ „ „ $r^{\frac{p}{5}}\left(\cos\frac{6p\pi}{5} + i\sin\frac{6p\pi}{5}\right)$,

$V^{(+)}$ „ „ $r^{\frac{p}{5}}\left(\cos\frac{8p\pi}{5} + i\sin\frac{8p\pi}{5}\right)$,

$I^{(-)}$ die Werthe $r^{\frac{p}{5}}\left(\cos\frac{2p\pi}{5} + i\sin\frac{2p\pi}{5}\right)$,

$II^{(-)}$ „ „ $r^{\frac{p}{5}}\left(\cos\frac{4p\pi}{5} + i\sin\frac{4p\pi}{5}\right)$,

$III^{(-)}$ „ „ $r^{\frac{p}{5}}\left(\cos\frac{6p\pi}{5} + i\sin\frac{6p\pi}{5}\right)$,

$IV^{(-)}$ „ „ $r^{\frac{p}{5}}\left(\cos\frac{8p\pi}{5} + i\sin\frac{8p\pi}{5}\right)$,

$V^{(-)}$ „ „ $r^{\frac{p}{5}}\left(\cos\frac{10p\pi}{5} + i\sin\frac{10p\pi}{5}\right) = r^{\frac{p}{5}}$.

Man hat also $I^{(-)}$ mit $II^{(+)}$, $II^{(-)}$ mit $III^{(+)}$, $III^{(-)}$ mit $IV^{(+)}$, $IV^{(-)}$ mit $V^{(+)}$, endlich $V^{(-)}$ mit $I^{(+)}$ zu verbinden, so dass eine zusammenhängende fünfblättrige Fläche entsteht; jede geschlossene Curve überschreitet den Verzweigungsschnitt in einer Anzahl, die ein Vielfaches von 5 oder auch Null ist.

*) Es leuchtet ein, dass an Stelle der positiven Abscissenaxe jede andere Curve, die sich nicht durchschneidet, als Verzweigungsschnitt gewählt werden kann; die zweiblättrige Fläche, welche entsteht, ist in ihrer Totalität immer dieselbe.

Ist der Exponent m eine reelle irrationale Zahl, so wird die Function unendlich vieldeutig; die Construction eines einzelnen Zweiges erfolgt in derselben Weise wie früher, und es lässt sich auch eine Riemann'sche Fläche bilden, die aber nunmehr aus unendlich vielen Blättern bestehen muss.

4. Die durch ihre Potenzreihe definirte Exponentialfunction e^{x+iy}, welche dasselbe bedeutet wie $e^x(\cos y + i \sin y)$, ist eine einwerthige und stetige Function in der ganzen endlichen Ebene. Der Unendlichkeitspunkt ist aber ein singulärer und zwar ein wesentlicher. Setzt man nämlich $z = \frac{1}{z'}$, also

$$e^z = e^{\frac{1}{z'}} = e^{\frac{1}{x'+iy'}} = e^{\frac{x'-iy'}{x'^2+y'^2}} = e^{\frac{x'}{x'^2+y'^2}}\left(\cos\frac{y'}{x'^2+y'^2} - i\sin\frac{y'}{x'^2+y'^2}\right),$$

so wird für verschwindende Werthe von x' und y', wenn das Verhältniss $\frac{y'}{x'}$ einen beliebigen festen Grenzwerth k hat:

$$\underset{z=\infty}{[e^z]} = e^{\frac{1}{x'}\cdot\frac{1}{1+k^2}}\left[\cos\frac{k}{x'(1+k^2)} - i\sin\frac{k}{x'(1+k^2)}\right]_{x'=0}.$$

Der Modul dieses Ausdruckes convergirt, je nachdem x' positiv oder negativ dem Werthe Null sich nähert, nach $+\infty$ oder Null, während die Functionen cos und sin zwischen den Grenzen -1 und $+1$ oscilliren. Man kann die Werthe x' und y' auch so nach Null convergiren lassen, dass der Modul einem beliebigen endlichen Werthe e^k zustrebt, man setze

$$\text{Lim}\,\frac{x'}{x'^2+y'^2} = k \qquad \text{für } x' = 0,\ y' = 0,$$

also $x' = y'^2 k$; *kurz in der wesentlichen singulären Stelle, die für e^z im Punkte $z = \infty$, oder für $e^{\frac{1}{z}}$ im Punkte $z = 0$ liegt, erhält die Function jedweden complexen Werth unbegrenzt.*

Eine andere Eigenschaft, welche den wesentlich singulären Punkt vom ausserwesentlichen unterscheidet ist die, dass bei letzterem ein ganzzahliges m angebbar ist, für welches $\underset{z=a}{\text{Lim}}\,(z-a)^m f(z) = G$ wird. Bei jenem ist dieses nicht möglich. Denn setzt man

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1}\,\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\,\frac{1}{z^3} + \cdots$$

so wird

$$z^m e^{\frac{1}{z}} = z^m + \frac{1}{1}\,z^{m-1} + \frac{1}{2!}\,z^{m-2} + \cdots \frac{1}{m!} + \frac{1}{m+1}\cdot\frac{1}{z} + \cdots$$

und wie gross man auch immer m wählen mag, es lässt sich kein

endlicher Werth angeben, so dass für $z = 0$ die rechte Seite endlich bleibt.

Noch eine andere Eigenschaft zeigt die Exponentialfunction: sie ist eine periodische Function; die Periode ist $2i\pi$.

$$e^{z+2i\pi} = e^x (\cos(y + 2\pi) + i \sin(y + 2\pi)) = e^z.$$

Theilt man die Ebene in unendliche Parallelstreifen durch Gerade, welche in dem Abstande 2π der Abscissenaxe parallel laufen, so reproducirt sich die Function gleichartig in allen diesen Streifen.

5. Der Logarithmus $u + iv$ der Zahl $x + iy = r_\varphi$ in Bezug auf die Basis e ist nach der Definition (§. 74) eine unendlich vieldeutige Function. Betrachtet man aber den einfachsten Werth

$$u + iv = l(x + iy) = l(r) + i\varphi,$$

so hat man eine einwerthige Function. Nur die Stellen $r = 0$ und $r = \infty$ sind Verzweigungspunkte, an denen der reelle Bestandtheil der Function über alle Grenzen wächst, der imaginäre völlig unbestimmt wird. Denkt man sich also, wie in dem Beispiel der irrationalen Function, einen Verzweigungsschnitt vom Null- zum Unendlichkeitspunkte geführt, so ist ein Zweig der unendlich vieldeutigen Function in dieser zerschnittenen Ebene stetig.

Es ist für eine spätere Anwendung wichtig, die Bedeutung des Verzweigungsschnittes für die verschiedenen Werthe des Logarithmus noch in folgender Weise zu interpretiren. Lässt man die Variabele z eine im Endlichen geschlossene Curve beschreiben, beginnend bei einem Punkte A und wieder in denselben zurückkehrend, welche sich selbst nicht durchschneidet und den Coordinatenanfangspunkt nicht einschliesst, folglich den positiven Theil der Abscissenaxe keinmal oder in einer geraden Anzahl von Punkten trifft, so wird der Werth von $l(z)$ mit stetiger Aenderung von r und φ bei der Rückkehr in den Punkt A ebenso gross wie im Anfange; denn z ist in dasselbe Blatt zurückgekehrt.

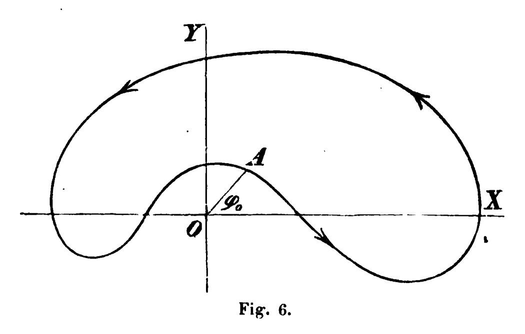


Fig. 6.

In der beistehenden Figur nimmt φ vom Werthe φ_0 ab bis zu einem bestimmten negativen Werthe, wächst alsdann durch Null hindurchgehend bis zu einem Werthe grösser als π und nimmt dann ab bis zum Werthe φ_0. Dem analoges wird auf jeder andern Curve derselben Art eintreten, auch wenn mehrere Schnittpunkte mit der positiven Abscissenaxe paarweise auftreten. Lässt man dagegen das Argument z eine im Endlichen geschlossene, sich

selbst nicht schneidende Curve beschreiben, welche den Coordinatenanfangspunkt $z = 0$ einschliesst, also die positive Abscissenaxe in einer ungeraden Anzahl von Punkten trifft, so wird der Werth von $l(z)$ mit stetiger Aenderung von r und φ bei der Rückkehr in den Punkt A einen Werth erhalten, der von dem Anfangswerthe um $2i\pi$ unterschieden ist. In der beistehenden Figur lasse man z vom Punkte A so laufen, dass die eingeschlossene Fläche zur Linken bleibt, so wächst φ von φ_0 an bis 2π, wird alsdann $> 2\pi$, nimmt ab bis zu einem Werthe zwischen 2π und $\frac{3\pi}{2}$ und wächst schliesslich wiederum über 2π hinausgehend bis zu dem Werthe $\varphi_0 + 2\pi$. Demnach ist der Werth des Logarithmus:

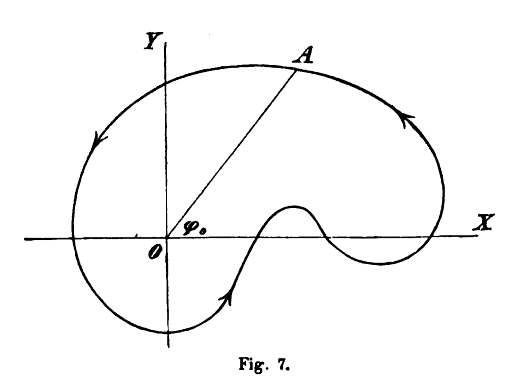


Fig. 7.

$$l(r) + i(\varphi_0 + 2\pi),$$

während er am Anfange $l(r) + i\varphi_0$ betrug.

Man kann diese Betrachtung auf Curven, die den Coordinatenanfangspunkt mehrfach umkreisen und sich dabei selbst durchschneiden, ausdehnen, indem man sich die Regel bildet:

Wenn beim Umlauf in bestimmtem Sinne die positive Abscissenaxe in der Richtung von unten nach oben n-mal überschritten ist, so ist das Argument um $2i\pi n$ gewachsen, denn jede Ueberschreitungsstelle besagt, dass ein Umlauf vollendet ist. Nur dann bedeutet die Bahn zwischen zwei Uebergangsstellen keinen Umlauf, wenn zwischen den beiden das Argument φ eine rückläufige Bewegung besass, so dass an einer geraden oder einer ungeraden Anzahl von Stellen die Curve die positive Abscissenaxe von oben nach unten durchschnitten hat. Sind m solcher Stellen vorhanden, so ist $2i\pi m$ in Abzug zu bringen; das Argument des Logarithmus ändert sich also um $2i\pi(n - m)$, wenn die Anzahl der Ueberschreitungsstellen bezüglich n und m ist.

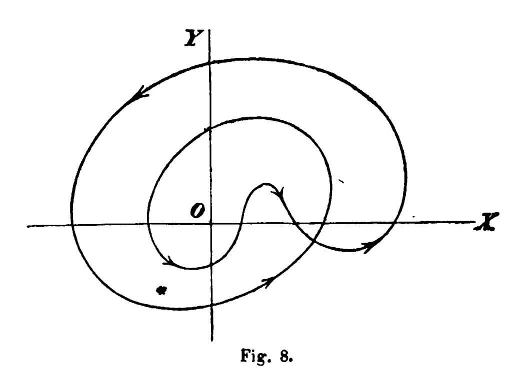


Fig. 8.

83. Die complexe Potenzreihe überhaupt.

Der unendlichen Reihe:

1) $$a_0 + a_1 (z' - \alpha) + a_2 (z' - \alpha)^2 + \cdots a_n (z' - \alpha)^n + \cdots,$$

in welcher die Coefficienten $a_0\, a_1 \ldots a_n \ldots$ und ebenso α bestimmte complexe Zahlen bedeuten, kann durch Substitution des Werthes: $z' - \alpha = z$ stets die Form gegeben werden:

2) $$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n + \cdots$$

Bezeichnet man den Modul von z mit r, den von a_k mit A_k, so convergirt die vorgelegte Reihe unbedingt für jeden Werth von z, für welchen:

3) $$A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \cdots A_n r^n + \cdots$$

convergirt, und umgekehrt folgt aus der unbedingten Convergenz der Reihe 2) die Convergenz der Reihe 3) (§. 77). Geometrisch sagt dieser Zusammenhang aus: Convergirt eine Potenzreihe unbedingt für eine bestimmte Stelle z, so convergirt sie ebenfalls unbedingt für alle anderen Stellen, welche ebensoweit vom Coordinatenanfangspunkte ($z = 0$) gelegen sind.

Sie convergirt dann aber auch unbedingt an allen Stellen, welche im Innern dieses Kreises sich befinden. Denn ist r' ein Werth kleiner als r, so muss:

4) $$A_0 + A_1 r' + A_2 r'^2 + \cdots A_n r'^n + \cdots$$

eine convergente Reihe sein, weil jedes Glied derselben positiv und kleiner ist als das entsprechende Glied der Reihe 3), folglich hat die Summe der Reihe 4) einen bestimmten Werth, dessen Betrag zwischen Null und der Summe 3) gelegen ist. Das Convergenzgebiet der Reihe 2) ist also stets ein Kreis um den Coordinatenanfangspunkt ($z = 0$), das Convergenzgebiet der Reihe 1) ist ein Kreis um den Punkt $z' = \alpha$. Denn der Modul der Differenz bestimmt durch seinen Werth alle Punkte z', welche gleichweit von α gelegen sind.

Unter dem Radius des Convergenzkreises einer Potenzreihe versteht man den grössten Werth von r, bis zu welchem die Reihe 3) convergirt. Zur Berechnung dieses Werthes dient der Satz (§. 44), dass von einer bestimmten Stelle ab:

$$\frac{A_{n+1} \cdot R}{A_n} < 1, \text{ oder } R < \operatorname{Lim} \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

sein muss.

Für $R = \operatorname{Lim} \dfrac{A_n}{A_{n+1}}$ kann die Reihe 3) möglicherweise convergiren und ebenso die Reihe 2); es bedarf also im Einzelfalle einer besonderen Untersuchung, ob in den Punkten des begrenzenden Kreises die Potenz-

reihe giltig ist oder nicht. Ausserhalb dieses Kreises kann aber die Potenzreihe nicht convergiren, auch nicht einmal bedingt, weil alsdann die Moduln der Glieder in der Reihe 2) von einer Stelle ab über jeden Betrag hinaus wachsen. Convergirt eine Potenzreihe für einen Werth von z nur bedingt, so convergirt sie unbedingt für alle Werthe, deren Modul kleiner ist. Denn die bedingte Convergenz, bei welcher die Modulreihe aufhört zu convergiren, erfordert, da die Moduln der Glieder nicht wachsen können, doch noch, dass:

$$R\,\frac{A_{n+1}}{A_n} < 1, \text{ nur wird } R \operatorname{Lim} \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 \qquad (\text{für } n = \infty).$$

Giebt man also dem R einen kleineren Werth, so ist die Eigenschaft der unbedingten Convergenz erfüllt. Demnach kann bedingte Convergenz einer Potenzreihe, wenn überhaupt, nur in Punkten des Convergenzkreises stattfinden*).

Eine unendliche Potenzreihe ist zufolge der Eindeutigkeit jedes ihrer Glieder, so lange sie convergirt, eine einwerthige Function der complexen Variabelen, die an keiner Stelle unendlich wird. *Diese Function ist stetig*, d. h. *sind z und $z + \delta$ (δ complex) Werthe, für welche die Reihe convergirt*, so *wird*

$$\operatorname{Lim}\,[f(z+\delta) - f(z)] = 0, \qquad \text{für } \delta = 0.$$

Zerlegt man die Reihe $f(z)$ in die Glieder

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_{n-1} z^{n-1},$$
$$\psi(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots a_{n+k} z^{n+k} + \cdots,$$

---

*) Beispiele.

1. Die Binomialreihe:

$$1 + mz + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} z^3 + \cdots$$

in welcher m eine reelle Zahl, z complex ist, convergirt unbedingt, so lange mod (z) kleiner als 1 ist; sie divergirt, wenn mod $(z) > 1$.

Ist $m > 0$, so convergirt sie noch auf dem ganzen Convergenzkreise unbedingt.

Ist $m < 0$ aber > -1, so convergirt die Reihe bedingt, ausser in dem Punkte $z = -1$, in welchem sie divergirt.

Ist $m \leq -1$, so divergirt die Reihe in allen Punkten des Convergenzkreises. (Diese Resultate lassen sich aus §. 46 folgern.) Bei der Untersuchung des Falles $-1 < m < 0$ setze man $p_n = 1 + m_1 z + \ldots m_n z^n$, multiplicire beide Seiten der Gleichung mit $1 + z$ und betrachte den Grenzwerth für $n = \infty$.

2. Die logarithmische Reihe:

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \,.$$

convergirt unbedingt für mod $(z) < 1$, divergirt für mod $(z) > 1$. Auf dem Convergenzkreise convergirt sie nur bedingt, mit Ausnahme des Punktes $z = -1$, in welchem sie divergirt.

wobei von der n^{ten} Stelle ab, indem α einen echten Bruch bezeichnet, für das Innere des Convergenzkreises

$$A_{n+1} R < A_n \alpha, \quad A_{n+2} R^2 < A_n \alpha^2 \ldots A_{n+k} R^k < A_n \alpha^k,$$

so wird:

$$\operatorname{mod} \psi(z) < A_n R^n \frac{1}{1-\alpha}.$$

Mithin kann man lediglich durch Wahl einer unteren Grenze für n, $\operatorname{mod} \psi(z)$ sowohl wie $\operatorname{mod} \psi(z \pm \delta)$, also auch den Modul der Differenz: $\psi(z \pm \delta) - \psi(z)$ kleiner machen als eine beliebig kleine Grösse ε. Da nun:

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} [f(z \pm \delta) - f(z)] &= \operatorname{mod} [\varphi(z \pm \delta) - \varphi(z) + \psi(z \pm \delta) - \psi(z)] \\ &< \operatorname{mod} [\varphi(z \pm \delta) - \varphi(z)] + \varepsilon \end{aligned}$$

und $\varphi(z)$ eine rationale ganze Function ist, so wird die rechts stehende Differenz nach Wahl einer unteren Grenze für n durch Bestimmung von δ stets kleiner gemacht werden können, als eine vorgegebene Zahl, d. h.

$$\operatorname{Lim} \operatorname{mod} [f(z + \delta) - f(z)] = 0.$$

Dass dieser Satz auch für einen Punkt des Grenzkreises gilt, falls in demselben die Reihe convergirt, wird wie in §. 44 IV bewiesen, indem man die Variabele z längs eines Radius sich ändern lässt und dabei setzt:

$$\psi(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots a_{n+k} z^{n+k} + \cdots$$

$$\psi(z - \delta) = a_n \left(\frac{z-\delta}{z}\right)^n z^n + a_{n+1} \left(\frac{z-\delta}{z}\right)^{n+1} z^{n+1} + \cdots$$

Der Betrag von $\psi(z - \delta)$ ist kleiner als der Betrag von $\left(\frac{z-\delta}{z}\right)^n M$, unter M den grössten Betrag verstanden in der Reihe der complexen Zahlen:

$$a_n z^n, \quad a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1}, \quad a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} \text{ u. s. w.}$$

Denn wählt man $z - \delta$ auf dem nach z führenden Radius, so ist $\frac{z-\delta}{z} = \varrho$ eine positive reelle Grösse kleiner als 1. Es wird

$$\psi(z - \delta) = \varrho^n a_n z^n + \varrho^{n+1} a_{n+1} z^{n+1} + \varrho^{n+2} a_{n+2} z^{n+2} + \cdots$$

und die Potenzen von ϱ bilden eine abnehmende, nach Null convergirende Reihe.

Der Abel'sche Hülfsatz im §. 44 IV kann aber für complexe Grössen folgendermassen ausgesprochen werden.

Bezeichnet man durch $t_0, t_1 \ldots t_m \ldots$ eine unendliche Reihe von beliebigen complexen Grössen und ist der Betrag der Grösse:

$$p_m = t_0 + t_1 + \cdots t_m$$

bei allen Werthen von m stets kleiner als G, so ist der Betrag von

$$r = \varepsilon_0 t_0 + \varepsilon_1 t_1 + \dots \varepsilon_m t_m < G \,.\, \varepsilon_0,$$

wenn $\varepsilon_0\, \varepsilon_1 \dots$ reelle positive abnehmende Zahlen bezeichnen. Denn es folgt ebenso

$$r = p_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + p_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \dots p_{m-1}(\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + p_m \varepsilon_m,$$

also

$$\text{mod}\, r \leqq (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \,\text{mod}\, p_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \,\text{mod}\, p_1 \dots (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) \,\text{mod}\, p_{m-1} + \\ + \varepsilon_m \,\text{mod}\, p_m.$$

Der numerische Werth der rechten Seite ist kleiner als

$$G(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \dots \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m + \varepsilon_m) = G \,.\, \varepsilon_0.$$

84. Der Differentialquotient einer Function einer complexen Veränderlichen an einer Stelle, an welcher dieselbe stetig ist, wird folgendermassen gebildet. Man ertheile der complexen Variabelen $z = x + iy$ den Zuwachs $\Delta z = \Delta x + i \Delta y = \Delta r e^{\varphi i}$ und betrachte den Differenzenquotienten

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \text{ oder } \frac{f(z + \Delta r e^{\varphi i}) - f(z)}{\Delta r e^{\varphi i}}.$$

Die Grenzwerthe, welchen die reellen und imaginären Bestandtheile dieses Quotienten für $\Delta z = 0$ zustreben, bilden die Ableitung der complexen Function.

Wir werden uns im Folgenden nur mit solchen Functionen beschäftigen, bei welchen mit Ausnahme singulärer Stellen dieser Grenzwerth lediglich eine Function von $z = x + iy$, also völlig unabhängig von dem Werthe φ oder dem Verhältniss $\Delta y : \Delta x$ wird; solche Functionen heissen analytische Functionen. Für analytische Functionen ist also

$$1) \qquad \text{Lim} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z),$$

sie besitzen eine Ableitung, nicht nur wie bei reellen Functionen vor- und rückwärts, sondern nach jeder Richtung hin genommen identisch. Es wird im Folgenden gezeigt werden, dass jede durch eine Potenzreihe dargestellte Function im Convergenzgebiet dieser Reihe analytisch ist, ja dass auch umgekehrt jede in einem Gebiete analytische Function in diesem Gebiete durch Potenzreihen dargestellt werden kann*).

*) Riemann bezeichnete die Functionen unter Voraussetzung ihrer analytischen Eigenschaft schlechtweg als die Functionen einer complexen Variabelen. Cauchy nannte die Functionen, welche in einem Gebiete ausnahmslos analytisch sind, synektisch. Briot und Bouquet nennen solche Functionen holomorphe.

Die Gleichung 1) kann auch geschrieben werden:

2) $$\frac{df(z)}{dz} = f'(z) \text{ oder } df(z) = f'(z) \,.\, dz = f'(z)(dx + i\,dy).$$

Die zweite Form giebt die Gleichung für das totale Differential der complexen Function.

Lässt man die complexe Variabele z nur um den reellen Theil Δx oder um den rein imaginären $i\Delta y$ sich ändern, so erhält man als Grenzwerth des Differenzenquotienten die partiellen Ableitungen nach x und y, für welche aber zufolge der gemachten Voraussetzung ebenfalls die Gleichungen gelten:

3) $$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \text{Lim}\,\frac{f(z+\Delta x) - f'(z)}{\Delta x} = f'(z),$$
$$\frac{\partial f(z)}{i\partial y} = \text{Lim}\,\frac{f(z+i\Delta y) - f(z)}{i\Delta y} = f'(z).$$

Die analytische Function genügt also als Function der beiden Variabelen x und y betrachtet der Gleichung

4) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}, \text{ oder } \frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Fragt man ob diese Gleichungen auch die hinreichenden Bedingungen dafür sind, dass an einer Stelle eine Ableitung nur von z abhängig für jede Richtung existirt, so lautet die Antwort:

Falls in der Umgebung der Stelle bestimmte Werthe der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{1}{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}$ existiren, welche stets einander gleich und ausserdem stetige Functionen der complexen Variabelen $x + iy$ sind, so ist auch

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Denn es wird:

$$\frac{f(x+iy+\Delta x+i\Delta y)-f(x+iy)}{\Delta x+i\Delta y} = \frac{f(x+iy+\Delta x+i\Delta y)-f(x+iy+i\Delta y)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y} +$$
$$+ \frac{f(x+iy+i\Delta y)-f(x+iy)}{i\Delta y}\cdot\frac{i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Man kann nun Δy so klein wählen, dass

$$\frac{f(x+iy+i\Delta y)-f(x+iy)}{i\Delta y} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial f(x+iy)}{\partial y} \pm \delta,$$

wobei δ einen Werth bezeichnet, dessen Betrag beliebig klein wird.

Ferner kann man den Werth von Δx so wählen, dass

$$\frac{f(x+iy+\Delta x+i\Delta y)-f(x+iy+i\Delta y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x+iy+\Theta\Delta x+i\Delta y)}{\partial x} =$$
$$= \frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} \pm \delta = \frac{1}{i}\,\frac{\partial f(x+iy)}{\partial y} \pm \delta$$

wird. Demnach folgt: es lassen sich Werthe von Δx und Δy angeben, so dass für diese, sowie für alle kleineren der obige Differenzenquotient von dem Werthe $\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$ sich höchstens um die Grösse

$$\frac{\delta \Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\delta i \Delta y}{\Delta x + i \Delta y}$$

unterscheidet, wobei der Modul von δ beliebig klein wird. Da der Betrag der Quotienten, mit denen δ multiplicirt ist, nicht über alle Grenzen wachsen kann, so ist das Behauptete erwiesen.

Zerlegt man die complexe Function in ihre reellen und imaginären Bestandtheile $u + iv$, so werden dieselben Functionen der beiden reellen Veränderlichen x und y. Da aber die Bedingungsgleichungen 4) erfüllt werden sollen, so ist sie eine besondere Art der Functionen zweier Veränderlichen: die Functionen u und v können nicht von einander unabhängig sein. In der That folgt aus

$$f(z) = u + iv, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

und nach Gleichung 4)

$$5) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0.$$

Diese Gleichung zerlegt sich, indem man das Reelle und Imaginäre sondert, in:

$$6) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Die beiden Bestandtheile einer analytischen Function sind also im allgemeinen stetige Functionen mit bestimmten Ableitungen. Für diese Ableitungen gilt der Satz vom totalen Differentiale. Denn schreibt man

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{du + idv}{dx + idy} = \frac{\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}}{1 + i\frac{dy}{dx}},$$

so erhält man, da $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$, die Gleichung:

$$\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(1 + i\frac{dy}{dx}\right),$$

aus welcher hervorgeht, dass der totale Differentialquotient von u und v:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \text{(Gleichung 6)}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Die Gleichungen 6) sind auch, vorausgesetzt, dass für die Functionen u und v der Satz vom totalen Differentiale gilt, die hinreichende Bedingung dafür, dass die Verbindung $u + iv$ durch Rechnungs-

operationen an der einen Veränderlichen $z = x + iy$ dargestellt werden kann. Ersetzt man nämlich in der Verbindung $u + iv$ die Variabele x durch den Werth $z - iy$, so muss dieselbe von der Variabelen y ganz unabhängig, d. h. der partielle Differentialquotient nach y muss Null werden. (§. 26, 1.)

Bezeichnet man das Resultat der Substitution von $x = z - iy$ in $u + iv$ durch $(u) + i(v)$, so wird

$$\frac{\partial (u)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot - i + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial (v)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot - i + \frac{\partial v}{\partial y},$$

wenn in den rechts stehenden Ableitungen für x, $z - iy$ substituirt wird. Demnach ist:

$$\frac{\partial (u)}{\partial y} + i \frac{\partial (v)}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Zufolge der Bedingungsgleichungen 6) verschwinden die Ausdrücke in den Klammern; dieselben sind also hinreichend.

85. Diese Eigenschaft der Functionen einer complexen Veränderlichen, dass ihre erste Ableitung $f'(z)$ unabhängig wird von dem Verhältniss $\frac{dy}{dx}$, ist für die geometrische Abbildung der die Functionswerthe $w = f(z)$ darstellenden Ebene II auf die Ebene I von Bedeutung. Betrachtet man in der Ebene I ein Dreieck $P P' P''$, dessen Ecken zu den Werthen z, $z + \Delta z$, $z + \Delta' z$ gehören, so entsprechen diesen drei Punkten in der Ebene II drei Punkte $Q Q' Q''$, deren Werthe mit w, $w + \Delta w$, $w + \Delta' w$ bezeichnet seien. Verlegt man die Coordinatensysteme in jeder Ebene so, dass die Punkte P und Q die Anfangspunkte der Systeme werden, und setzt:

$$\Delta z = \Delta r \,.\, e^{i\varphi}, \quad \Delta z' = \Delta r' \,.\, e^{i\varphi'}, \quad \Delta w = \Delta \varrho \,.\, e^{i\psi}, \quad \Delta w' = \Delta \varrho' \,.\, e^{i\psi'},$$

so sind die eingeführten Grössen in jeder Ebene die Polarcoordinaten der beiden anderen Eckpunkte in Bezug auf den Anfangspunkt.

Die Quotienten $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta \varrho}{\Delta r} \,.\, e^{i(\psi - \varphi)}$ und $\frac{\Delta w'}{\Delta z'} = \frac{\Delta \varrho'}{\Delta r'} e^{i(\psi' - \varphi')}$ haben denselben Grenzwerth; es ist also, falls dieser Werth nicht gerade Null oder ∞ ist,

$$\text{Lim} \frac{\Delta \varrho}{\Delta r} = \text{Lim} \frac{\Delta \varrho'}{\Delta r'}, \quad \psi - \varphi = \psi' - \varphi',$$

d. h. werden die Seiten des Dreieckes $P P' P''$ und also auch die Seiten des Dreieckes $Q Q' Q''$ unendlich klein, so sind die Winkel $P P' P''$ und $Q Q' Q''$ gleich und die sie einschliessenden Seiten einander proportional. Es findet also zwischen zwei einander entsprechenden unendlich kleinen Theilen und folglich allgemein zwischen den kleinsten Theilen der Ebenen I und II Aehnlichkeit statt. Zweien Curven, die sich in der Ebene I schneiden, entsprechen in der Ebene II zwei

Curven, die sich unter demselben Winkel schneiden*). Dasselbe gilt für die Abbildung von z und w auf zwei Kugelflächen.

86. Anwendungen.

1. Die Potenz $w = z^n$ (n positive ganze Zahl) besitzt die Ableitung:

$$\frac{dw}{dz} = \text{Lim}\,\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{n} = \text{Lim}\,\frac{(z+\Delta r e^{i\varphi})^n - z^n}{\Delta r e^{i\varphi}} = n z^{n-1}.$$

Denn betrachtet man w als Function von x oder y, so ist

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial (x+iy)^n}{\partial x} = n(x+iy)^{n-1},\quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial (x+iy)^n}{\partial y} = in(x+iy)^{n-1}.$$

Hieraus folgt, die ganze rationale Function:

$$w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n$$

besitzt die Ableitung:

$$\frac{dw}{dz} = a_1 + 2a_2 z + \cdots n a_n z^{n-1}.$$

2. Die gebrochene rationale Function besitzt eine endliche erste Ableitung mit Ausnahme der singulären Punkte, in denen der Nenner verschwindet.

3. Die explicite irrationale Function $w = (z-a)^m$, welche in der Ebene, zerschnitten längs einer von a ausgehenden Curve, eindeutig und stetig ist, besitzt eine Ableitung. Dieselbe bestimmt man, um die Vieldeutigkeit hervortreten zu lassen, folgendermassen:

Wird $z - a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gesetzt, also

$$w = r^m[\cos m(\varphi + 2k\pi) + i\sin m(\varphi + 2k\pi)]$$

und irgend ein Werth von k festgehalten, so ist:

$$\begin{aligned} dz &= dr(\cos\varphi + i\sin\varphi) + r(-\sin\varphi + i\cos\varphi)d\varphi \\ &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(dr + ird\varphi), \\ dw &= mr^{m-1}dr[\cos m(\varphi+2k\pi) + i\sin m(\varphi+2k\pi)] + \\ &+ mr^m[-\sin m(\varphi+2k\pi) + i\cos m(\varphi+2k\pi)]d\varphi \\ &= [\cos m(\varphi+2k\pi) + i\sin m(\varphi+2k\pi)]\,mr^{m-1}(dr + ird\varphi), \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= m\,r^{m-1}\,\frac{[\cos m(\varphi+2k\pi) + i\sin m(\varphi+2k\pi)]}{\cos\varphi + i\sin\varphi} \\ &= m\,r^{m-1}(\cos[(m-1)\varphi + 2k\pi)] + i\sin[(m-1)\varphi + 2km\pi]. \end{aligned}$$

---

*) Diese Eigenschaft der Function einer complexen Variabelen hat Gauss erkannt bei der Lösung der für die Kartenprojection wichtigen Aufgabe: „Die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird". (Als Beantwortung der von der königl. Societät der Wissenschaften in Kopenhagen für 1822 aufgegebenen Preisfrage. Gauss Werke Bd. IV. S. 189.)

Da $\cos(2km\pi) = \cos 2k(m-1)\pi$, $\sin(2km\pi) = \sin 2k(m-1)\pi$, so erhält der Ausdruck die Form:

$$\frac{dw}{dz} = mr^{m-1}[\cos(m-1)(\varphi+2k\pi)+i\sin(m-1)(\varphi+2k\pi)] = m(z-a)^{m-1}.$$

Der Werth von k, welcher ursprünglich gewählt worden ist, bleibt auch bei der Ableitung erhalten, die eben so vieldeutig ist, wie die ursprüngliche Function.

4. Für die Exponentialfunction:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

wird:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^x(\cos y + i\sin y),\quad \frac{\partial w}{\partial y} = e^x(-\sin y + i\cos y),$$

also

$$\frac{dw}{dz} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z.$$

5. Der Logarithmus der Zahl $z = x + iy$ in Bezug auf die Basis e hat den Werth:

$$w = l(x+iy) = l(+\sqrt{x^2+y^2}) + i\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \pm i2k\pi \qquad \text{wenn } x > 0,$$

$$w = l(x+iy) = l(+\sqrt{x^2+y^2}) + i\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \pm i(2k+1)\pi \quad \text{wenn } x < 0.$$

Für einen Zweig der Function, welcher in der längs der positiven x-Axe zerschnittenen Ebene stetig ist, wird:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{ix}{x^2+y^2} = \frac{i}{x+iy},$$

also

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}.$$

5. Die complexe Potenzreihe:

1) $$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots a_n z^n + \dots.$$

Es sei $z + h$ ein complexer Werth, welcher in dem Convergenzkreise der Reihe 1) liegt, so wird

2) $$f(z+h) = a_0 + a_1(z+h) + a_2(z+h)^2 + \dots a_n(z+h)^n + \dots.$$

Ordnet man diese unbedingt convergirende unendliche Reihe nach Potenzen von h, so werden die Coefficienten dieser Potenzen unendliche Reihen, von denen nachgewiesen werden soll, dass sie die successiven Ableitungen der Function $f(z)$ darstellen. Zu dem Zwecke bezeichne man vorläufig die Reihe:

3) $$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots n a_n z^{n-1} + \dots \text{ mit } f_1(z).$$

Diese Reihe convergirt unbedingt innerhalb des nämlichen Kreises, für welchen die Reihe 1) convergent ist; denn ihr Convergenzradius R wird aus der Gleichung bestimmt:

$$R \operatorname{Lim} \frac{n+1}{n} \frac{A_{n+1}}{A_n} < 1 \text{ oder } R < \operatorname{Lim} \frac{A_n}{A_{n+}}, \text{ weil } \operatorname{Lim} \frac{n+1}{n} = 1$$
$$n = \infty.$$

Ebenso erhält man durch fortgesetzte Differentiation der einzelnen Glieder die Reihen:

$$4) \qquad 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 z + \ldots n \cdot (n-1) a_n z^{n-2} \ldots = f_2(z)$$
$$3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 z + \ldots n(n-1)(n-2) a_n z^{n-3} = f_3(z)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die alle für das Innere desselben Convergenzkreises Gültigkeit haben. Mit Einführung dieser Bezeichnung gewinnt man für die Reihe 2) geordnet nach Potenzen von h den Werth:

$$5) \qquad f(z+h) = f(z) + \frac{h}{1} f_1(z) + \frac{h^2}{2!} f_2(z) + \cdots \frac{h^n}{n!} f_n(z) + \cdots$$

Das Convergenzgebiet dieser neuen Reihe, in welcher $\operatorname{Lim} \frac{h^n}{n!} f_n(z)$ sicher Null ist, weil die Summe der Moduln von $\frac{h^n}{n!} f_n(z)$ kleiner ist als die Summe der Moduln der unbedingt convergirenden Potenzreihe:

$$a_n(z+h)^n + a_{n+1}(z+h)^{n+1} + a_{n+2}(z+h)^{n+2} \ldots,$$

ist ein Kreis um den Punkt $h = 0$, also um den Punkt z. Der Radius H dieses Kreises ist sicherlich nicht kleiner als der Werth: $R - \operatorname{mod}(z)$; denn alle Punkte in diesem Kreise, der den ursprünglichen von Innen berührt, liegen im Innern desselben und für sie ist 2) eine unbedingt convergente Reihe, also auch die durch andere Anordnung der Glieder abgeleitete Reihe 5).

Man muss sich noch direct davon überzeugen, dass diese Schlussweise von der unbedingt convergirenden Reihe 2) aus gestattet ist, was in Zweifel gezogen werden kann, weil bei der neuen Anordnung der Glieder jeder Coefficient die Summirung einer unendlichen Reihe erfordert. Man prüfe also, ob die Differenz der $n+1$ ersten Glieder der Reihen 2) und 5) durch Wahl von n beliebig klein wird, immer unter der Voraussetzung, dass die erste Reihe unbedingt convergirt. Ich setze:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_n z^n + \varrho_n$$
$$f_1(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots n a_n z^{n-1} + \varrho_n'$$
$$f_2(z) = 2a_2 + 3.2 a_3 z + \ldots n(n-1) a_n z^{n-2} + \varrho_n''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(z) = n! a_n + \varrho_n^{(n)},$$

so wird die Differenz der $n+1$ ersten Glieder gleich:

$$\varrho_n + \frac{h}{1} \varrho_n' + \frac{h^2}{2!} \varrho_n'' + \cdots \frac{h^n}{n!} \varrho_n^{(n)}.$$

Da nun die Reihe 2) unbedingt convergirt, so ist:

$$R_{n,k} = a_{n+1}(z+h)^{n+1} + a_{n+2}(z+h)^{n+2} + \dots a_{n+k}(z+h)^{n+k}$$

so lange $z+h$ im Convergenzgebiet der Reihe 1) liegt, für jeden Werth von k lediglich durch Wahl von n kleiner als δ, selbst wenn man für jedes Glied seinen absoluten Werth setzt; durch ein vorgegebenes δ wird die Grösse n bestimmt. Die Grösse k kann nun aber stets so gross gewählt werden, dass der Betrag von

$$R_{n,k} - \left(\varrho_n + \frac{h}{1}\varrho_n' + \frac{h^2}{2!}\varrho_n'' + \dots \frac{h^n}{n!}\varrho_n^{(n)}\right)$$

kleiner wird als jede noch so kleine Grösse. Denn jede der Reihen ϱ ist unbedingt convergent; in jeder lässt sich also eine Stelle k finden, von der ab der Rest der Reihe unter einer bestimmten Grösse bleibt. Heisse diese Grösse δ', so ist

$$\operatorname{mod}\left[R_{n,k} - \left(\varrho_n + \frac{h}{1}\varrho_n' + \dots \frac{h^n}{n!}\varrho_n^{(n)}\right)\right] < \delta + \delta'.\, e^{\operatorname{mod}(h)},$$

also ist auch $\operatorname{mod}\left[\varrho_n + \frac{h}{1}\varrho_n' + \dots \frac{h^n}{n!}\varrho_n^{(n)}\right] < 2\delta + \delta'.\, e^{\operatorname{mod}(h)}$.

Dadurch ist bewiesen, dass die Differenz lediglich durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann, woraus die Identität der Reihen 2) und 5) hervorgeht.

Jeder Punkt im Innern des Kreises 1) *kann mithin zum Mittelpunkte einer Reihenentwickelung genommen werden für einen Bereich, der mindestens so gross ist, dass er den ursprünglichen Grenzkreis von innen berührt.*

Aus der Reihe 5) folgt nun:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f_1(z) + \frac{h}{2!}f_2(z) + \dots \frac{h^{n-1}}{n!}f_n(z) + \dots,$$

also:

$$\operatorname{Lim} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f_1(z),$$

d. h. *die erste Ableitung der Function* $f(z)$ *ist durch die Reihe* 3) *dargestellt:*

$$f'(z) = f_1(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots n a_n z^{n-1} + \dots.$$

Oder die complexe Potenzreihe wird differentiirt, indem man die Reihe aus den Differentialquotienten der einzelnen Glieder bildet. Diese Reihe convergirt innerhalb des nämlichen Convergenzkreises wie die ursprüngliche.

Durch Differentiation der Reihe für $f'(z)$ folgt weiter:

$$f''(z) = f_2(z), \qquad f'''(z) = f_3(z) \qquad \text{u. s. f.}$$

Sonach ist die Reihe 5):

$$f(z+h) = f(z) + \frac{h}{1}f'(z) + \frac{h^2}{2!}f''(z) + \dots \frac{h^n}{n!}f^n(z) + \dots.$$

mit der Taylor'schen Entwickelung für die durch eine Potenzreihe gegebene Function einer complexen Variabelen identisch.

Aus den Gleichungen 2) und 5) ergiebt sich die Bedeutung der Coefficienten in der Reihenentwickelung; es ist:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f''(0), \quad a_2 = \frac{1}{2!} f'(0), \quad a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0) \ \ldots \ a_n = \frac{1}{n!} f^n(0).$$

Man erkennt hieraus, dass die Darstellung einer eindeutigen Function $f(z)$ durch eine Potenzreihe nach z, falls sie überhaupt möglich ist, auch nur auf eine einzige Weise möglich sein kann. Denn die Coefficienten dieser Reihe müssen den Werthen der Function und ihrer Ableitungen an der Stelle $z = 0$ gleich sein.

In der That, wären zwei innerhalb des nämlichen Gebietes convergente Entwickelungen gefunden:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_n z^n + \ldots$$
$$f(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots b_n z^n + \ldots,$$

so wäre

$$0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)z + (a_2 - b_2)z^2 + \ldots (a_n - b_n)z^n + \ldots$$

und da sämmtliche Ableitungen der Constanten Null bei allen Werthen von z ebenfalls Null sind, so muss auch

$$a_0 - b_0 = 0, \quad a_1 - b_1 = 0, \quad a_2 - b_2 = 0, \quad \ldots a_n - b_n = 0$$

sein.

Drittes Capitel.

Ueber die Verschwindungswerthe einer Potenzreihe, insbesondere der ganzen rationalen algebraischen Function.

87. Der im vorigen Paragraphen für die Potenzreihen zuletzt bewiesene Satz dient zur Beantwortung der Frage: *wie viel Punkte im Innern eines Convergenzkreises sich befinden, für welche die Function $f(z)$ verschwindet?*

Die Function verschwindet in einem Punkte z_0, sobald derselbe, zum Mittelpunkte gewählt, eine Reihenentwickelung liefert, in der das erste Glied $f(z_0)$ Null wird. Verschwinden auch andere, auf diesen folgende Glieder, so dass die Reihenentwickelung mit dem Gliede $\frac{h^n}{n!} f^n(z_0)$ beginnt, so heisst der Punkt ein Verschwindungspunkt von der Ordnung n; er soll wie n Verschwindungspunkte gezählt werden; es bleibt alsdann der Quotient $\frac{f(z_0 + h)}{h^n}$ an der Stelle $h = 0$ endlich.

Zuerst ist zu beweisen: Die Function $f(z)$ kann nicht an unendlich vielen Punkten im Innern eines Convergenzkreises von endlicher

Ausdehnung Null werden, ohne dass sie identisch, d. h. überall im Kreise Null ist, so dass alle Coefficienten der Potenzreihe verschwinden. Sind nämlich unendlich viele Punkte vorhanden, so giebt es auch einen Bereich von beliebig kleiner Ausdehnung, welcher unendlich viele der Verschwindungspunkte enthält. Denn wird das ganze Gebiet in n Theile getheilt (n beliebig gross, aber endlich), so müssen mindestens in einem dieser Theile noch immer unendlich viele Verschwindungspunkte liegen.

Es sei z ein Punkt in solchem Bereiche; der Ausdruck

$$1)\qquad f(z+h)=f(z)+\frac{h}{1}f'(z)+\frac{h^2}{2!}f''(z)+\ldots$$

muss zu Null werden für einen h-Werth, dessen Modul beliebig klein ist. Da die Coefficienten von h, h^2 ... endliche Grössen sind, so wird der Betrag der mit h multiplicirten Glieder beliebig klein; es muss demnach, soll der Ausdruck verschwinden, auch der Betrag von $f(z)$ kleiner sein als jede endliche Grösse, d. h. da $f(z)$ ein bestimmter Werth ist, muss

$$f(z)=0$$

sein. Man betrachte nun das Product:

$$h\left[f'(z)+\frac{h}{2!}f''(z)+\frac{h^2}{3!}f'''(z)+\ldots\right];$$

es giebt einen beliebig kleinen aber endlichen h-Werth, für welchen dasselbe Null wird; also der in der Klammer stehende Factor verschwindet. Daraus folgt wie vorhin:

$$f'(z)=0.$$

Desgleichen ergiebt sich aus dem Producte

$$h^2\left[\frac{1}{2!}f''(z)+\frac{h}{3!}f'''(z)+\ldots\right]$$

das Verschwinden von $f''(z)$, und so fort: $f''(z)\ldots=f^n(z)\ldots=0$. $f(z+h)$ verschwindet demnach mit allen seinen Ableitungen für alle Werthe von $z+h$, die im Innern des Convergenzkreises der Reihe 1) liegen. In diesem Kreise liefert ein Punkt z', für welchen $\mathrm{mod}\, z' < \mathrm{mod}\, z$ ist, zum Mittelpunkte gewählt, eine Reihenentwickelung, deren Radius $H'=R-\mathrm{mod}\,(z')>H$ ist. Diese Reihenentwickelung enthält lauter verschwindende Coefficienten, d. h. die Function ist auch in diesem grösseren Kreise überall gleich Null. Indem man einen Punkt z'' im Innern dieses Kreises zum Mittelpunkte macht, gewinnt man einen neuen Kreis, und dieses Verfahren lässt sich fortsetzen, bis man zu einem Kreise gelangt, der den Nullpunkt einschliesst. Da für diesen Punkt die Function mit allen ihren Ableitungen Null ist, so gilt das gleiche für alle Punkte des ursprünglichen Convergenzkreises der Reihe:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots a_n z^n + \dots$$

d. h. es ist

$$f(0) = a_0 = 0,\ f'(0) = a_1 = 0,\ f''(0) = 2!\,a_2 = 0 \dots f^n(0) = n!\,a_n = 0.$$

Der Satz liefert eine Verallgemeinerung des am Schlusse des vorigen Capitels über die eindeutige Darstellung einer Function durch eine Potenzreihe bewiesenen Theorems. Denn aus ihm folgt:

Haben zwei Potenzreihen auch nur in unendlich vielen Punkten eines Gebietes denselben Werth, so sind sie in dem ganzen gemeinsamen Theile ihrer Convergenzgebiete identisch. Denn heissen die beiden Reihen:

$a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \dots$ und $b_0 + b_1(z-\beta) + b_2(z-\beta)^2 + \dots$ so lässt sich die Differenz dieser beiden Reihen für einen Punkt γ, der im Innern des den Convergenzkreisen gemeinsamen Gebietes liegt, in eine Potenzreihe $c_0 + c_1(z-\gamma) + c_2(z-\gamma)^2 + \dots$ entwickeln. Dieselbe verschwindet in unendlich vielen Punkten, und sonach ist sie innerhalb ihres ganzen Convergenzkreises Null. Man kann aber von dieser Potenzreihe aus, indem man einen neuen Punkt im Innern des Convergenzkreises zum Mittelpunkte einer Reihenentwickelung wählt, die ebenfalls verschwinden muss, und dieses Verfahren fortsetzt, zu jedem anderen Punkte, der in endlicher aber beliebig kleiner Entfernung von den Grenzen liegt, gelangen.

88. Es sei ein Convergenzgebiet mit dem Radius R zu untersuchen; da in jedem endlichen Theile der Ebene nur eine endliche Anzahl von Verschwindungspunkten vorhanden ist, so können wir annehmen, dass auf dem begrenzenden Kreise keiner dieser Punkte gelegen ist. Die im Innern befindlichen Verschwindungspunkte heissen:

$$z_1,\ z_2 \dots z_\nu, \quad \text{ihre Ordnungszahlen } \lambda_1,\ \lambda_2 \dots \lambda_\nu.$$

Man bilde das Product:

$$\Pi(z) = (z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2} \dots (z-z_\nu)^{\lambda_\nu}.$$

$f(z)$ ist durch $\Pi(z)$ theilbar, derart dass der Quotient eine Potenzreihe ist, convergent für das ursprüngliche Gebiet, die an keiner Stelle im Gebiet Null wird. Um dies einzusehen, beachte man, dass nach der oben angegebenen Entwickelung, indem man $h = z - z_1$ setzt:

$$f(z) = f(z_1 + z - z_1) = f(z_1) + \frac{z-z_1}{1} f'(z_1) + \frac{(z-z_1)^2}{2!} f''(z_1) + \dots$$

wird; da z_1 ein Verschwindungspunkt von der Ordnung λ_1 ist, so sind

$$f(z_1) = f'(z_1) = f''(z_1) \dots = f^{\lambda_1 - 1}(z_1) = 0,$$

also ist

$$\frac{f(z)}{(z-z)^{\lambda_1}} = \frac{1}{\lambda_1!} f^{\lambda_1}(z_1) + \frac{z-z_1}{(\lambda_1+1)!} f^{\lambda_1+1}(z_1) + \dots$$

Diese nach Potenzen von $z - z_1$ fortschreitende unbedingt convergente

Reihe kann wieder nach Potenzen von z geordnet werden und erhält den ursprünglichen Convergenzkreis. Denn der Convergenzkreis dieser Reihe muss wiederum den für die Entwickelung nach Potenzen von $(z - z_1)^{\lambda_1}$ geltenden umschliessen. Die neue Reihe, welche sich ergiebt, verschwindet im Punkte z_2 von der Ordnung λ_2; sie ist also durch $(z - z_2)^{\lambda_2}$ theilbar; auf diese Weise erhält man schliesslich

$$\frac{f(z)}{\Pi(z)} = \varphi(z) \quad \text{oder} \quad f(z) = \Pi(z) \cdot \varphi(z)$$

wo $\varphi(z)$ eine Potenzreihe ist, die an keiner Stelle im Gebiete Null wird.

Die bisher bewiesenen Sätze gelten insbesondere für die ganze rationale algebraische Function:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n.$$

Das Convergenzgebiet dieser Function, in welcher $a_0 \ldots a_n$ bestimmte endliche complexe Werthe bedeuten, ist die ganze Ebene, d. h. zu jedem endlichen Werthe von z gehört ein bestimmter endlicher Werth von $f(z)$; diese Function kann nicht für unendlich viele Werthe von z verschwinden, ohne dass sie identisch verschwindet; und weiter sind $z_1, z_2 \ldots z_\nu$ Verschwindungspunkte, so ist $f(z)$ durch $\Pi(z)$ theilbar, derart, dass der Quotient selbst wieder eine ganze rationale algebraische Function ist; hier wird, wenn $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_\nu = n$ ist, $\varphi(z)$ constant gleich a_n. Eine ganze rationale algebraische Function von der Ordnung n kann also sicherlich nicht mehr als n Verschwindungspunkte in der ganzen Ebene haben.

89. Bildet man den Logarithmus von $f(z)$, so wird

$$lf(z) = l\Pi(z) + l\varphi(z) = \lambda_1 l(z - z_1) + \lambda_2 l(z - z_2) + \ldots$$
$$+ \ldots \lambda_\nu l(z - z_\nu) + l\varphi(z).$$

Für jeden der auf der rechten Seite stehenden Logarithmen nehme man einen der unendlich vielen Werthe, die er besitzt, und lasse z die Peripherie des begrenzenden Kreises von irgend einem Punkte A an so durchlaufen, dass das Innere des Kreises zur Linken bleibt. Da das Argument $z - z_1$ im Innern des Kreises nur einmal verschwindet, nämlich an der Stelle $z = z_1$, so wird der Logarithmus, wenn er in den Punkt A zurückkehrt, einen Werth erhalten, der von dem Anfangswerthe um $2i\pi$ unterschieden ist, §. 82, 5; dasselbe wird mit $l(z - z_2) \ldots l(z - z_\nu)$ der Fall sein; der log $\varphi(z)$ dagegen erhält bei seiner Rückkehr in den Punkt A denselben Werth, den er im Anfange besass, weil $\varphi(z)$ in keinem Punkte im Innern des Kreises verschwindet, vielmehr für jeden Punkt $\varphi(z)$ einen bestimmten endlichen sich stetig ändernden Werth hat, so dass kein Verzweigungspunkt des Logarithmus eingeschlossen ist. Demnach erkennt man: *Liegen im Convergenzkreise ν Verschwindungspunkte, so ändert sich der Werth von $lf(z)$, wenn z alle Punkte auf der Peripherie durchläuft, um $2i\pi\nu$;*

und umgekehrt: *ist $2\pi i\nu$ die Aenderung des Logarithmus beim Durchlaufen des Convergenzkreises, so ist ν die Anzahl der Verschwindungspunkte im Innern dieses Kreises.*

90. Wendet man diesen Satz auf die algebraische Function an, so lässt sich der Radius eines Kreises, für dessen Punkte die Werthe von z gebildet werden sollen, so gross nehmen, dass der Betrag des Gliedes $a_n z^n$ alle übrigen bei weitem übertrifft, mithin der Betrag von:

$$\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_{n-1} z^{n-1}}{a_n \cdot z^n}$$

kleiner wird als eine beliebig kleine Grösse δ; um dieses zu erreichen, hat man nur mod z grösser als eins zu nehmen und so zu bestimmen, dass auch

$$\operatorname{mod} z > \frac{A_0 + A_1 + \ldots A_{n-1}}{A_n} \cdot \frac{1}{\delta},$$

wobei die A Moduln der Coefficienten a bezeichnen; sodann setze man:

$$lf(z) = l(a_n z^n) + l\left(1 + \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_{n-1} z^{n-1}}{a_n z^n}\right) = l(a_n z^n) + l(1+\varepsilon),$$

unter ε die complexe Grösse verstanden, deren Modul kleiner ist als δ.

Der $l(1+\varepsilon)$, gebildet von einer bestimmten Stelle auf dem begrenzenden Kreise, weicht überall von dem $l(1) = \pm 2ki\pi$ beliebig wenig ab; beginnt man mit einem Werthe des Logarithmus, z. B. mit dem einfachsten, so wird bei Aenderung des Werthes ε der zugehörige Logarithmus, da er sich stetig ändern soll, stets nur beliebig wenig von dem einfachsten Werthe von $l(1)$ nämlich Null differiren; ist z in den Anfangspunkt zurückgekehrt, so ist der Werth von $l(1+\varepsilon)$ nicht um ein Vielfaches von $2\pi i$ gewachsen.

$l(a_n z^n) = nl(a_n z)$ ändert beim Umlauf um den Kreis sein Argument um $2\pi i \,.\, n$, da der Punkt $z = 0$ in diesem Kreise eingeschlossen liegt. Sonach erleidet $lf(z)$ die Aenderung $2\pi i n$, d. h. *in dem Convergenzkreise mit beliebig grossem Radius sind stets n Werthe vorhanden, für welche die rationale Function*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_n z^n$$

Null wird; die Verschwindungspunkte können zum Theil zusammenfallen, stets aber ist die Gesammtsumme der Ordnungen des Verschwindens gleich n. Dieser Satz, welcher auch in die Worte gefasst werden kann: *Jede Gleichung n^{ten} Grades:*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_n z^n = 0$$

hat n complexe Wurzeln, heisst der Fundamentalsatz der Al-

gebra*). Sind die Coefficienten $a_0, a_1 \dots a_n$ alle reell, und besitzt die Gleichung eine complexe Wurzel $z = \alpha + i\beta$, so besitzt sie auch die conjugirte complexe Wurzel $z = \alpha - i\beta$; denn es ist allgemein

$$f(\alpha + i\beta) = U + iV, \qquad f(\alpha - i\beta) = U - iV.$$

Ist $\alpha + i\beta$ eine Wurzel, so wird U sowohl wie V gleich Null.

Die implicite algebraische Function §. 25:

$$A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \dots A_n y^n = 0,$$

in welcher $A_0 \dots A_n$ ganze Polynome in x bedeuten, ist sonach, wenn die complexen Lösungen mit berücksichtigt werden, eine n-deutige Function, d. h. zu jedem Werthe von x, durch welchen die Coefficienten $A_0 \dots A_n$ bestimmte Werthe erhalten, gehören n gleiche oder verschiedene Werthe von y, nämlich die n Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades.

Die Berechnung der n Wurzelwerthe, d. h. die Darstellung derselben als Function der Coefficienten, bildet den Gegenstand der Gleichungstheorie. So lange $n \leqq 4$ ist, lassen sich die Wurzeln mit Hülfe der expliciten algebraischen Rechnungsoperationen, der sechs ersten Species, in geschlossener Form als Functionen der Coefficienten entwickeln; ist $n > 4$, so liefert die Auflösung der allgemeinen Gleichung neue Functionen, deren Eigenschaften im folgenden Capitel untersucht werden sollen. In allen Fällen aber ist es, wenn die Coefficienten einer Gleichung in der Form bestimmter numerischer Zahlen gegeben sind, möglich, jede Wurzel mit beliebiger Annäherung numerisch auszudrücken, d. h. nach der Methode der Einschliessung in Grenzen zwei unendliche Folgen von rationalen Zahlen zu bilden, von denen die eine den rellen, die andere den Factor des imaginären Bestandtheiles einer Wurzel zum Grenzwerthe hat.

---

*) Der Satz ist zuerst bewiesen worden von Gauss in seiner Doctordissertation 1799 mit einer Ergänzung vom Jahre 1849; zwei andere Beweise hat Gauss im Jahre 1815 und 1816 veröffentlicht (siehe Gauss' Werke Bd. 3). Der im Texte ausgeführte Beweis mit seiner Anwendbarkeit auf Potenzreihen rührt im wesentlichen von Cauchy her (Journal de l'École polytechnique, Cahier 25. 1837); derselbe hatte früher in seiner Analyse algébr. chap. X 1821 einen elementaren Beweis für die Existenz der n Wurzeln einer Gleichung gegeben, der dem Principe nach mit dem von Argand (Gergonne Ann. Bd. V, 1815) geführten übereinstimmt.

Viertes Capitel.

Die implicite algebraische Function*).

91. Die allgemeinste Form, durch welche eine Variabele w als algebraische Function der Veränderlichen z definirt wird, ist ein Polynom, welches aus ganzzahligen Potenzen von z und w besteht:

1) $$f(w^n, z^m) = w^n\varphi_0(z) + w^{n-1}\varphi_1(z) + \dots w\varphi_{n-1}(z) + \varphi_n(z) = 0,$$

wobei die Factoren $\varphi(z)$ ganze Polynome mit complexen Coefficienten von beliebigem Grade in z sind. Der höchste Grad, welcher vorkommt, heisse m. Die Form ist von der n^{ten} Ordnung in w, indem wir annehmen, dass in dem Polynome $\varphi_0(z)$ nicht alle Coefficienten Null sind; vielmehr möge φ_0 vom k^{ten} Grade ($k = 0$ bedeute eine Constante) in z sein. Es darf vorausgesetzt werden, dass die Form 1) nicht reducibel, d. h. nicht in Producte algebraischer Ausdrücke von niederer Ordnung zerlegbar ist; denn in diesem Falle liesse sich jeder einzelne Factor gleich Null gesetzt untersuchen.

Die ganzen und die gebrochenen rationalen Functionen sind in dieser Form enthalten, für dieselben wird $n = 1$; desgleichen die früher behandelte explicite irrationale Function:

$$w = (z - a)^{\frac{p}{q}}, \text{ welche in der Form 1) lautet: } w^q - (z - a)^p = 0.$$

Jedem Werthe von z entsprechen zufolge der Gleichung 1), wie in dem vorigen Capitel bewiesen wurde, n bestimmt verschiedene oder gleiche Werthe von w (Wurzeln der Gleichung 1). Dieselben seien mit $w_1, w_2 \dots w_n$ bezeichnet; sie werden sich je nach dem Werthe von z ändern. Die Gleichung 1) liefert also n Functionen von z, oder mit anderen Worten: sie bestimmt eine n-deutige Function von z. Die folgenden Untersuchungen haben darzuthun, wie sich diese n Zweige der Function von einander trennen lassen, und in wie weit dieselben stetige Functionen mit bestimmten Ableitungen sind**).

92. Wird die Function w an einer bestimmten Stelle betrachtet, also zu einem bestimmten Werthe $z = z_0$ einer der möglichen Werthe w berechnet, so fragt es sich, wie bei einer Aenderung des z-Werthes dieser zugehörige Werth von w verändert wird. Die Stelle z_0, welche zum Ausgangspunkte gewählt ist, kann immer im Endlichen angenommen werden; denn wenn es sich darum handelt, die Aenderung von

---

*) In diesem Capitel werden die Sätze der Algebra über die Resultante und Discriminante als bekannt vorausgesetzt.

**) Cauchy: Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tome II. Puiseux: Journal de Mathématiques T. XV et XVI (in deutscher Uebersetzung v. Fischer, Halle 1861). Briot et Bouquet: Théorie des fonctions elliptiques. Paris 1875.

w von einem unendlichen Werthe z an zu untersuchen, so setze man $z = \frac{1}{z' - a}$, führe durch diese Substitution den Ausdruck 1) in eine Relation zwischen w und z' über, und untersuche die Werthe, welche w an der Stelle $z' = a$ annimmt.

Es muss zuerst festgestellt werden, welche Art von singulären Stellen auftreten können. Eine Gleichung n^{ten} Grades ergiebt stets n Wurzeln. Dieselben können nur darin Besonderheiten aufweisen, dass sie (da die Coefficienten der Gleichung 1) variabel sind) unendlich gross, oder dass mehrere einander gleich werden. Dies sind die beiden Arten von Singularitäten. Indem wir sie näher untersuchen, wollen wir nachweisen, dass die Anzahl der Stellen eine endliche ist.

1. Man setze $w = \frac{1}{w'}$ und bestimme die Stellen, an denen $w' = 0$ wird, so hat man statt der Gleichung 1):

$$\varphi_0(z) + w' \varphi_1(z) + \ldots w'^{n-1} \varphi_{n-1}(z) + w'^n \varphi_n(z) = 0.$$

Soll w' nach dem Werthe Null convergiren, so muss $\varphi_0(z) = 0$ werden. Dieses Polynom vom Grade k bestimmt k getrennte oder zusammenfallende, im Endlichen gelegene Punkte, bei denen ein Werth von w über jeden Betrag hinaus wächst. Ich bezeichne sie im folgenden mit $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$; sie sind, wenn keine weiteren Bedingungen hinzukommen, *ausserwesentliche singuläre Punkte*; denn aus der Gleichung

$$w \varphi_0(z) = -\varphi_1(z) - \frac{1}{w} \varphi_2(z) - \ldots \frac{1}{w^{n-2}} \varphi_{n-1}(z) - \frac{1}{w^{n-1}} \varphi_n(z)$$

folgt, dass, wenn für $z = \alpha$, w unendlich wird, doch das Product $w \varphi_0(z) = -\varphi_1(z)$ endlich bleibt.

In solch einem singulären Punkte werden ausser dem einen unendlichen Werthe noch $n - 1$ andere, im allgemeinen endliche Werthe von w vorhanden sein, die aus der Gleichung

$$w^{n-1} \varphi_1(\alpha) + w^{n-2} \varphi_2(\alpha) + \ldots w \varphi_{n-1}(\alpha) + \varphi_n(\alpha) = 0$$

hervorgehen. Nur falls auch $\varphi_1(\alpha) = 0$ ist, wird noch ein zweiter Werth von w unendlich; falls auch $\varphi_2(\alpha) = 0$ ist, ein dritter u. s. f. Solch ein Punkt α kann den Charakter des ausserwesentlichen singulären verlieren, weil er zugleich ein kritischer Punkt wird. *Die kritischen Punkte bilden die zweite Art der Singularität.*

2. Wenn ein algebraischer Ausdruck $f(w)$ von der Ordnung n an einer bestimmten Stelle w_1 im Endlichen untersucht werden soll, so bringe man ihn (§. 87) auf die Form:

$$f(w) = f(w_1) + (w - w_1) f'(w_1) + \frac{(w - w_1)^2}{2!} f''(w_1) + \cdots \frac{(w - w_1)^n}{n!} f^n(w_1).$$

Verschwindet f für $w = w_1$ einfach, so ist $f(w_1) = 0$, während der Werth der ersten Ableitung $f'(w_1)$ an dieser Stelle von Null verschieden

ist. Ist aber $w = w_1$ eine λ-fache Wurzel, so verschwinden auch sämmtliche Ableitungen bis zur $\lambda - 1^{\text{ten}}$ inclusive:

$$f(w) = 0, \quad f'(w_1) = 0, \ldots f^{\lambda-1}(w_1) = 0.$$

Wenn also bei der Gleichung 1): $f(w^n, z^m) = 0$ eine Doppelwurzel oder eine vielfache $w = w_1$ auftritt, so kann das nur bei denjenigen Werthen von z geschehen, für welche zugleich die Ableitung

$$\frac{\partial f(w^n, z^m)}{\partial w}$$

Null wird. Aus diesem Satze wird in der Algebra die Bedingung abgeleitet, welche zwischen den Coefficienten einer Gleichung, die eine Doppelwurzel besitzt, besteht: Indem man die Resultante der Gleichung und ihrer Ableitung bildet (durch fortgesetzte Division oder nach Euler durch Determinantenbildung aus den Coefficienten eines Systems von Gleichungen), erhält man die Discriminante als eine ganze rationale Function der Coefficienten. In der Gleichung $f(w^n, z^m) = 0$ sind aber die Coefficienten selbst ganze Polynome in z, und sonach findet man, indem man die Discriminante gleich Null setzt, eine endliche Zahl von Punkten (ich bezeichne sie im folgenden mit β), welche allein kritische Punkte der Function w sein können, d. h. Punkte, an denen zwei oder mehrere Werthe von w zusammenfallen.

Ausser den Punkten von α und β bleibt also nur noch der unendlich ferne Punkt, welcher vermittelst der Substitution $z = \frac{1}{z' - a}$ zu untersuchen ist, und entweder ein regulärer Punkt, oder ein singulärer der ersten oder zweiten Art sein kann.

93. Nunmehr kann der Nachweis erbracht werden, dass jeder Zweig der algebraischen Function im allgemeinen stetig verläuft. Man umgrenze in der z-Ebene sämmtliche kritische Punkte durch Kreise von beliebig kleinem Radius, desgleichen die ausserwesentlichen singulären Punkte. An der Stelle $z = z_0$, die selbst kein kritischer Punkt, oder ein ausserwesentlich singulärer sein soll, betrachte man einen der n möglichen Werthe von w, z. B. den Werth w_1. (Die Stelle $z = z_0$ kann auch ein singulärer Punkt für einige der übrigen Werthe von w sein; nur nicht für den Werth w_1, d. h. dieser muss hier eine einfache und endliche Wurzel der Gleichung sein.) Verändert man nun z continuirlich, indem man den repräsentirenden Punkt eine beliebige Curve, welche keine der eben genannten Grenzcurven überschreitet, vom Punkte z_0 bis zu einem andern Punkte Z durchlaufen lässt, so verändert sich, wie gezeigt werden soll, auch w_1 continuirlich.

Bezeichnet man einen auf der Curve gelegenen, der Stelle z_0 benachbarten Punkt durch $z_0 + \Delta z$ und den zugehörigen Functionswerth mit

$w_1 + \Delta w$, *so muss, wenn diese Continuität stattfindet, zu jeder noch so kleinen Zahl* δ *ein Werth* h *angegeben werden können, mit der Eigenschaft, dass* mod $\Delta w < \delta$, *so lange* mod $\Delta z \leqq h$.

In der Gleichung:

$$w^n \varphi_0(z) + w^{n-1}\varphi_1(z) + \ldots w\varphi_{n-1}(z) + \varphi_n(z) = 0$$

setze man $z = z_0 + \Delta z$, $w = w_1 + \Delta w$, und denke sich dieselbe nach Potenzen von Δw geordnet:

$$f(z_0 + \Delta z,\ w_1 + \Delta w) = Z_0 + \Delta w Z_1 + \Delta w^2 Z_2 + \ldots \Delta w^n Z_n.$$

Die Coefficienten $Z_0 \ldots Z_n$ sind Functionen von Δz und den Constanten z_0 und w_1. Für $\Delta z = 0$ wird eine Wurzel der Gleichung $\Delta w = 0$, also muss Z_0 verschwinden, während die übrigen endlichen Wurzeln von Δw, vermehrt um w_1, die $n - 1$ übrigen Werthe darstellen, welche die algebraische Function an der Stelle z_0 besitzt. Da an dieser Stelle w_1 keine vielfache Wurzel ist, so ist Z_1 für $\Delta z = 0$ sicherlich von Null verschieden. Der Modul von Δz werde nun so klein gewählt, dass für alle Werthe innerhalb des um z_0 mit dieser Grösse beschriebenen Kreises mod Z_0 nicht grösser wird als eine bestimmte beliebig kleine Zahl A; der Modul von Z_1 wird dabei unter einen gewissen Betrag B nicht herabsinken. Diese Forderung ist erfüllbar; durch den geforderten Werth A wird eine obere Grenze von Δz bestimmt; denn in dem Polynome Z_0 kommt kein von Δz freies Glied vor, während ein solches in Z_1 enthalten ist.

Betrachtet man nun die Form

$$f(z_0 + \Delta z,\ w_0 + \Delta w) = Z_1 \Delta w \left[\frac{Z_0}{Z_1}\frac{1}{\Delta w} + 1 + \frac{Z_2}{Z_1}\Delta w + \cdots \frac{Z_n}{Z_1}\Delta w^{n-1}\right]$$
$$= Z_1 \Delta w\,[1 + P]$$

und setzt man mod $\Delta w = \delta$, so wird, wenn B den kleinsten Betrag von Z_1 bezeichnet,

$$\text{mod}\, P = \text{mod}\left[\frac{Z_0}{Z_1}\frac{1}{\Delta w} + \frac{Z_2}{Z_1}\Delta w + \cdots \frac{Z_n}{Z_1}\Delta w^{n-1}\right]$$
$$< \frac{1}{B}\left[\frac{A}{\delta} + \delta\,\text{mod}\, Z_2 + \cdots \delta^{n-1}\,\text{mod}\, Z_n\right],$$

also, wenn C den grössten der Moduln von $Z_2 \cdots Z_n$ innerhalb der angenommenen Grenze für Δz bezeichet,

$$\text{mod}\, P < \frac{1}{B}\left[\frac{A}{\delta} + C(\delta + \cdots \delta^{n-1})\right] < \frac{1}{B}\left[\frac{A}{\delta} + \frac{C\delta}{1-\delta}\right].$$

Durch Wahl von δ kann man $\frac{1}{B}\frac{C\delta}{1-\delta}$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ machen (ε willkürlich klein). Desgleichen kann man den Werth von A und dadurch die obere Grenze für Δz so bestimmen, dass, wie klein auch immer δ ist, $\frac{A}{B}\frac{1}{\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$ wird; dazu muss $A < \varepsilon\frac{\delta B}{2}$ gewählt werden; und die

dazu gehörige Grenze für Δz nenne ich h. Nun ist zu zeigen, dass innerhalb des Kreises mit dem Radius δ eine und auch nur eine Wurzel der Gleichung

$$f(z_0 + \Delta z,\ w_1 + \Delta w) = Z_1 \Delta w (1 + P)$$

liegt; bei jedem Werthe von Δz, dessen Modul $\leqq h$ ist. Das geschieht vermittelst des Satzes:

$$\log [f(z_0 + \Delta z,\ w_1 + \Delta w] = \log Z_1 + \log \Delta w + \log (1 + P).$$

Führt man Δw auf dem Kreise um w_1 mit dem Radius δ, so bleibt Z_1 eine Constante, $\log \Delta w$ vermehrt sich, da der Nullpunkt eingeschlossen ist, um $2i\pi$; $\log (1 + P)$ aber ändert, da der mod P kleiner als die beliebig kleine Zahl ε für alle Punkte auf dem Kreise bleibt, beim Umlauf seinen imaginären Bestandtheil nicht; und folglich liegt in dem Kreise eine Wurzel Δw, deren Modul, wie zu beweisen war, kleiner als δ.

Sonach folgt, dass auf einem bestimmten Wege, der von z_0 nach Z führt, ohne die Grenze eines kritischen Punktes zu überschreiten, jeder Werth der algebraischen Function w_1 sich eindeutig und continuirlich verändert.

94. *Die algebraische Function ist bei dieser Veränderung auch eine analytische Function*, d. h. sie besitzt an jeder regulären Stelle z einen bestimmten Differentialquotienten, der unabhängig ist vom Differentiale $dz = dx + i\,dy$. Es bezeichne z und w, $z + \Delta z$ und $w + \Delta w$ ein Paar zusammengehörige Werthe; convergirt Δz nach Null, so wird auch $\Delta w = 0$, es handelt sich darum, das Verhältniss $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ zu bestimmen.

Es sei mod $\Delta z \leqq h$, so wird mod $\Delta w < \delta$. Aus der Gleichung

$$f(z + \Delta z,\ w + \Delta w) = 0,$$

die nach Potenzen von Δz und Δw entwickelt lautet:

$$f(z, w) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta w\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\Delta z^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w}\Delta z \Delta w + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\Delta w^2\right) + \cdots = 0,$$

(sie schliesst mit Gliedern von der Dimension Δz^m und Δw^n ab), folgt, da das erste Glied verschwindet, wenn mit Δz dividirt wird:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) + \frac{1}{2}\Delta z\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w}\cdot\frac{\Delta w}{\Delta z} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)^2\right) \\ + \frac{1}{3!}\Delta z^2 (\qquad) + \cdots = 0.$$

Der Quotient $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ ist zufolge dieser Gleichung eine n-werthige algebraische Function, die für $\Delta z = 0$ einen und nur einen endlichen Werth hat, nämlich:

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{\Delta z=0} = -\frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial w},$$

weil der Voraussetzung zufolge die Stelle z kein kritischer Punkt, und also $\frac{\partial f}{\partial w}$ von Null verschieden ist. Es ist aber soeben bewiesen worden, dass eine einfache Wurzel einer algebraischen Function sich in der Umgebung jeder Stelle continuirlich ändert; demnach ist

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{\Delta z=0} = \frac{dw}{dz} = -\frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial w},$$

ein Werth, welcher continuirlich aus dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ hervorgeht, also der gesuchte Differentialquotient (Ableitung). Mithin ist hier für die implicite algebraische Function bei jedwedem complexen Werthe dieselbe Differentiationsregel gefunden, die für reelle Argumente bereits früher aufgestellt wurde. (Dass in dieser Darstellung der Differentialquotient auch vermittelst des Werthes w ausgedrückt ist, beeinträchtigt den Satz, dass er lediglich durch den Werth von z bestimmt ist, nicht, weil w eindeutig von z abhängt.)

95. Es war nothwendig, stets von einem bestimmten Wege zu sprechen, den das Argument z von z_0 bis Z durchlaufen soll, und dabei die Aenderung eines Zweiges w_1 zu betrachten. Nun entsteht die Frage, ob der Werth von w_1 im Punkte Z immer derselbe sein wird, wie auch der Weg gewählt sein mag. Denn im Punkte Z besitzt ja die algebraische Function n verschiedene Werthe; es ist also denkbar, dass bei verschiedenen Wegen auch w_1 in diese n verschiedenen Werthe übergeht.

Begrenzen zwei verschiedene von z_0 nach Z führende Wege eine endliche Fläche, in deren Innern (einschliesslich der Begrenzungscurven) kein kritischer Punkt gelegen ist, so sind die Werthe, welche w im Endpunkte Z erhält, identisch. Befinden sich dagegen solche Punkte im Innern, so können die Werthe verschiedene sein.

Wenn kein kritischer Punkt im Innern der Fläche liegt, so hat der absolute Betrag der Differenz zwischen den verschiedenen Werthen von w, welche zu einem z-Werthe gehören, eine angebbare endliche Grösse D als Minimum. Um den Punkt z_0 kann man einen Kreis mit dem Radius h schlagen, so dass für alle Punkte im Innern dieses Kreises von den zugehörigen Werthen einer und nur einer von dem Werthe w_1 um eine Grösse abweicht, deren Modul kleiner als $\frac{D}{2}$, während die übrigen zu einer Stelle gehörigen Werthe um mehr als $\frac{D}{2}$ von w_1 abweichen sollen; denn w_1 ist, wie bewiesen wurde, längs jeder stetigen Curve eine eindeutige und stetige Function, und es kann an jeder Stelle in

diesem Kreise nur ein Werth um weniger als $\frac{D}{2}$ von w_1 abweichen, weil zwei solcher Werthe sich um weniger als D von einander unterscheiden würden. Dieser Kreis durchschneide die Curve I zuerst im Punkte z', der zugehörige Werth heisse $w_1 + \Delta w = w'$. Um den Punkt z' lässt sich ein Kreis mit dem Radius h' von der gleichen Eigenschaft finden; er durchschneide die Curve I im Punkte z''; es ist $w'' = w' + \Delta w$ $\left(\text{mod}\, \Delta w < \frac{D}{2}\right)$. So fortfahrend gelangt man nach einer endlichen Anzahl von Processen zu einem Punkte z^{ν} mit dem Werthe w^{ν} und von diesem zum Punkte Z mit dem Werthe

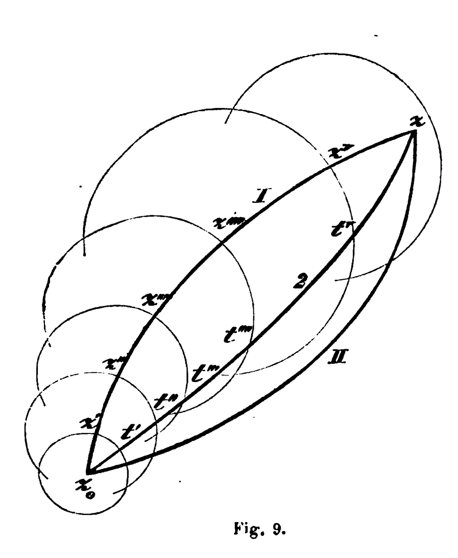


Fig. 9.

$$W = w^{\nu} + \Delta w \left(\text{mod}\, \Delta w < \frac{D}{2}\right).$$

Zieht man nun zwischen I und II eine Curve (2) von z_0 bis Z, und nennt auf dieser Curve die Durchschnittspunkte der ν Kreise $t', t'' \ldots t^{\nu}$, so soll das Stück $z_0 t'$ innerhalb des Kreises um z_0, $t' t''$ innerhalb des Kreises um z', $\ldots t^{\nu} z$ innerhalb des Kreises um z^{ν} fallen. Alsdann gehört zu t' ein und nur ein Werth $w = v'$, welcher von w_1 um eine Grösse abweicht, deren Modul kleiner ist als $\frac{D}{2}$. Man muss nun einsehen: bewegt sich z auf der Curve (2) vom Punkte z_0 zu t', so geht w stetig vom Werthe w_1 gerade in diesen Werth v' (und in keinen der anderen) über. An jeder Stelle, die z durchläuft, ist immer nur ein Werth vorhanden, der von w_1 um weniger als $\frac{D}{2}$ abweicht. Soll nun bei continuirlicher Aenderung w einen Werth erreichen, dessen Unterschied von w_1 grösser wird als $\frac{D}{2}$, so müsste an einer Stelle dieser Unterschied gleich $\frac{D}{2}$ werden; solch eine Stelle giebt es aber für die Punkte im Kreise nicht. Der Betrag der Differenz zwischen v' und w' beträgt (da t' in dem um z' beschriebenen Kreise liegt) weniger als $\frac{D}{2}$. Ebenso gehört zu t'' ein Werth v'', welcher, da t'' sich auf der Peripherie des um z' beschriebenen Kreises befindet, von dem Werthe w' um weniger als $\frac{D}{2}$ abweicht. Dieser Werth wird beim Durchlaufen der Curve (2) von t' nach t'' erhalten; denn würde w

einen andern Endwerth annehmen, so würde sich derselbe von w' um mehr als $\frac{D}{2}$ unterscheiden. Auf dem Wege $t'\,t''$ müsste also ein Punkt liegen, bei welchem der Unterschied gleich $\frac{D}{2}$ wird; was wiederum ausgeschlossen ist, weil t' und t'' innerhalb und auf dem Kreise um z' sich befinden. Da t'' in dem um z'' beschriebenen Kreise liegt, so ist

$$\mathrm{mod}\,[v'' - w''] < \frac{D}{2}\cdot$$

In gleicher Weise wird erkannt, dass $\mathrm{mod}\,[v^{\nu} - w^{\nu}] < \frac{D}{2}$ und von diesen Punkten gelangt man zu den Werthen W und V. Hier bestehen die Ungleichungen:

$$\mathrm{mod}\,[W - w_{\nu}] < \frac{D}{2}, \quad \mathrm{mod}\,[V - w_{\nu}] < \frac{D}{2}\cdot$$

Daraus folgt, dass $\mathrm{mod}\,[W - V] < D$.

Da nun die n verschiedenen Werthe von w an der Stelle Z der Voraussetzung zu Folge sich von einander unterscheiden, dergestalt, dass der Betrag der Differenz mindestens D beträgt, so können W und V nicht zwei verschiedene Wurzelwerthe bedeuten, vielmehr muss $V = W$ sein. Die Curve I und die Curve (2) führen also zu demselben Endwerthe. Von der Curve (2) kann man zu einer Curve (3) übergehen, welche näher bei II liegt, und so fortfahrend muss man schliesslich zur Curve II gelangen können. Denn alle Radien h sind von endlicher angebbarer Grösse, und es ist also nicht möglich, dass ein progressus in infinitum vorkommt. Das könnte nur dann eintreten, wenn sich die eingeschalteten Curven einem kritischen Punkte von w immer mehr nähern, in dessen unmittelbarer Umgebung kein Kreis bestimmt werden kann, in welchem von den zugehörigen Wurzeln immer nur eine von w_1 um weniger als $\frac{D}{2}$, welche Grösse hierbei nach Null convergirt, unterschieden ist. Liegt in dem eingeschlossenen Gebiet ein ausserwesentlicher singulärer Punkt, der nicht zugleich kritischer Punkt ist, so bleibt der Satz bestehen. Denn wiewohl die algebraische Function in demselben unendlich wird, so behält sie doch den Charakter einer rationalen Function und bleibt eindeutig. Umschliesst man nämlich den Punkt mit einem Kreise von beliebig kleinem Radius, so wird, während z diesen Kreis durchläuft, die eine Wurzel, deren Betrag bei Annäherung an die kritische Stelle über alle Grenzen wächst, eine continuirliche Werthreihe durchlaufen, die in den Anfangswerth zurückkehrt. Denn in diesem Falle ist in der Gleichung $f(z^m w^n) = 0$ an der Stelle $z = \alpha$ $\varphi_0(\alpha) = 0$, während $\varphi_1(\alpha)$ von Null verschieden ist. Setzt man also $z = \alpha + \Delta\alpha$ und betrachtet die Gleichung:

$$w^n A_0 + w^{n-1} A_1 + \cdots A_n = 0. \qquad (A_k = \varphi_k(\alpha + \Delta\alpha)),$$

so kann durch Wahl von $\Delta\alpha$, A_0 kleiner gemacht werden als eine beliebig kleine Zahl A, während mod $[A_1]$ sicherlich grösser bleibt als eine endliche Zahl B. Folglich gilt gemäss dem Beweise §. 93 von der Gleichung $A_0 + w' A_1 + w'^2 A_2 \ldots w'^n A_n = 0$, dass sie bei jedem Werthe von $\Delta\alpha$ eine und nur eine Wurzel besitzt, für welche mod w' $=$ mod $\frac{1}{w} < \delta$; oder mod $w > \frac{1}{\delta}$ wird, d. h. durchläuft z den beliebig kleinen Kreis, so kann der Endwerth von w mit keiner andern Wurzel als der anfänglichen übereinstimmen.

Aus dem Satze folgt weiter: *Lässt man das Argument z eine im Endlichen geschlossene Curve durchlaufen, von einem Punkte z_0 beginnend, welche keinen kritischen Punkt einschliesst, so erhält w_1 in z_0 denselben Endwerth, den es am Anfang besass.*

96. Es ist mit Hülfe dieser Sätze noch nicht möglich, sich ein Bild von einem Zweige der Function zu entwerfen. Denn wenn man in einem Punkte z_0 den Werth w_1 berechnet hat, so kann man zu jedem andern Punkte noch auf sehr verschiedenen Wegen gelangen, von denen je zwei einen kritischen Punkt einschliessen, und man kann daher in jedem Punkte noch immer je nach dem Wege verschiedene Werthe erhalten.

Die vollkommen eindeutige Darstellung, welche bei der expliciten irrationalen Function erzielt wurde, gelingt nach der von Riemann angegebenen Methode auch hier, wenn zur Repräsentation von z nicht eine einzige Ebene, sondern n gewählt und längs Verzweigungsschnitten an einander geheftet werden. Dazu müssen die Eigenschaften der kritischen Punkte näher untersucht werden.

Der Punkt $z = 0$ sei ein regulärer Punkt für alle Werthe der Function w; d. h. zu demselben mögen n einfache und endliche Wurzeln der Gleichung $f(z^m, w^n) = 0$ gehören. Man denke sich n verschiedene Ebenen über einander gelagert; jeder derselben ordne man im Punkte $z = 0$ einen der Werthe $w_1^0 \ldots w^0_n$ zu, demnach sei jede Ebene mit einem Index $1, 2 \ldots n$ bezeichnet. Ferner markire man in jeder Ebene alle diejenigen Punkte β, welche überhaupt kritische Punkte für irgendwelche Werthe von w sind, und führe von diesen Punkten Curven, welche sich selbst und einander nicht durchschneiden, zum Unendlichkeitspunkte; in allen n Ebenen sollen dabei die von einem Punkte β_k ausgehenden Curven identisch sein.

Jedem Punkte der Ebene I ordne man nun denjenigen Werth von w zu, welcher aus w_1^0 durch stetige Aenderung hervorgeht, wenn das Argument z auf einem Wege geführt wird, der keine von den Punkten β ausgehende Curve überschreitet. Auf diese Weise gehört zu jedem Punkte ein ganz bestimmter Werth von w, und dies System von Werthen w ist im allgemeinen ein stetiges. Nur zu beiden Seiten einer Curve

β ist es möglich, dass die Werthe von w um eine endliche Grösse differiren. Wir wollen die beiden Seiten durch die Benennung links und rechts unterscheiden, indem wir die Richtung vom Punkte β zum Unendlichkeitspunkte dabei festhalten. Ob nun eine endliche Differenz vorhanden ist oder nicht, entscheidet man folgendermassen. Man umschliesse den Punkt β mit einem beliebig kleinen Kreise, und lasse das Argument z denselben durchlaufen, indem man bei dem Durchschnittspunkte mit der Curve β links beginnt und wieder in denselben zurückkehrt. Ist bei diesem Umlauf w_1 in seinen Anfangswerth zurückgekehrt, und nicht in einen andern der $n-1$ noch möglichen Werthe übergegangen, so gehen auch zu beiden Seiten längs der ganzen Curve β die Werthe von w in einander über; β ist dann kein Verzweigungspunkt im Blatte 1; die von β ausgehende Curve kann hier getilgt werden. Aendert sich aber der Werth von w bei diesem Umlaufe, so hat man auf der linken Seite von β Werthe, die mit w_1 bezeichnet werden sollen, auf der rechten anderen Werthe, die w_2 heissen mögen. Man denke sich das Blatt längs dieser Curve durchschnitten. Dasselbe führe man bei allen Punkten β aus, die Verzweigungspunkte im Blatte 1 sind, so ist nach dieser Zuordnung w eine stetige Function in Bezug auf alle stetigen Wege im Blatte 1, die keinen Schnitt überschreiten.

Wenn nun auf der rechten Seite einer Curve β im Blatte 1 Werthe w_2 von w_1 verschieden vorhanden sind, so muss unter den übrigen Blättern, bei welchen dem Coordinatenanfangspunkte die Werthe $w_2^0 \ldots w_n^0$ bezüglich zugeordnet wurden, eines und nur eines vorhanden sein mit der Eigenschaft, dass den Punkten auf der linken Seite der Curve β sämmtliche Werthe w_2 entsprechen. Denn der Weg, auf welchem man (im ersten Blatte) von w_1^0 nach w_1 gelangt war, muss auch umgekehrt w_2 in einen der Werthe, den w an der Stelle $z=0$ besitzt, zurückführen. In dem bezüglichen Blatte (es heisse 2, der Anfangswerth w_2^0) gehören also zur linken Seite der Curve β die Werthe w_2; der rechten Seite dagegen können nun nicht dieselben Werthe w_2 entsprechen (denn es war ja angenommen, dass der Weg, welcher zu einem Punkte der rechten Seite führt, w_1^0 in w_2 überführt; also ist es nicht möglich, wenn man denselben Weg umgekehrt durchläuft, von w_2 nach w_2^0 zu kommen). Im zweiten Blatte befinden sich folglich auf der rechten Seite der Curve β entweder die Werthe w_1 oder neue Werthe w_3. Im ersten Falle hefte man die linke Seite des ersten Blattes mit der rechten des zweiten und die rechte des ersten mit der linken Seite des zweiten längs der ganzen Curve β zusammen, so hat man um den Verzweigungspunkt β eine Windungsfläche erster Ordnung construirt. Die Blätter 1 und 2 bilden einen Cyclus; bei einmaligem Umlauf des Verzweigungspunktes gelangt man vom ersten ins zweite Blatt, bei nochmaligem vom zweiten ins

erste. Derselbe Punkt β kann auch für die übrigen Blätter eine Windung erster Ordnung bestimmen.

Aber in dem Falle, dass Blatt 2 neue Werthe w_3 trägt, muss dasjenige dritte Blatt bestimmt werden, welches auf der linken Seite der Curve β die Werthe w_3 liefert. Entweder hat dies Blatt dann auf der rechten Seite die Werthe w_1, so bilden die drei Blätter:

1) mit den Werthen w_1 links, w_2 rechts,
2) mit den Werthen w_2 links, w_3 rechts,
3) mit den Werthen w_3 links, w_1 rechts

einen Cyclus, und liefern eine Windungsfläche zweiter Ordnung; durchläuft man einen Kreis um den Punkt β, so dass derselbe zur linken bleibt, so gelangt man aus dem Blatte 1 nach 2, bei nochmaligem Umlaufe von 2 nach 3, und beim dritten von 3 nach 1; durchläuft man den Kreis in umgekehrter Richtung, so kommt man aus dem 1. ins 3., aus dem 3. ins 2., aus dem 2. ins 1. Blatt. Oder zum dritten Blatt gehören rechts neue Werthe w_4; dann giebt es ein viertes Blatt, welches entweder den Cyclus abschliesst, oder zu neuen Werthen w_5 und damit zu einer Vergrösserung des Cyclus führt.

Sonach gehören zu jedem Verzweigungsschnitte β gewisse Cyclen von Werthen; und die Zusammenheftung der verschiedenen zum Cyclus gehörigen Blätter längs allen Schnitten führt zu einer n-blättrigen Riemann'schen Fläche; zu jeder beliebigen Curve, die man auf dieser Fläche zieht, mag sie Verzweigungsschnitte überschreiten oder nicht, ist die algebraische Function w durchaus eindeutig und stetig. (Sie kann nur in den ausserwesentlichen singulären Punkten α unendlich werden.)

97. Es ist nur noch eine Bemerkung zu machen über die Werthe von w im Unendlichkeitspunkte. Bei der Werthvertheilung, wie sie für jedes Blatt getroffen ist, wird der Unendlichkeitspunkt selbst ein vieldeutiger Punkt, d. h. zu beiden Seiten der Curve β, die ein Verzweigungsschnitt im Blatte 1 ist, bekommt die Function w für $z = \infty$ die beiden Werthe, welche z. B. w_1 und w_2 für diesen Werth des Argumentes annehmen. In noch so kleiner endlicher Entfernung des Unendlichkeitspunktes (wenn wir uns statt einer Ebene die Kugelfläche denken) oder numerisch ausgedrückt bei noch so grossem Werthe von z herrscht jedoch volle Eindeutigkeit.

Der Charakter des Unendlichkeitspunktes, als regulärer oder Verzweigungspunkt mit bestimmten Cyclen (in Bezug auf die verschiedenen Werthe von w), wird erkannt, wenn man von einem Blatte 1 ausgehend einen nur den Unendlichkeitspunkt (und keinen andern Verzweigungspunkt) umschliessenden Kreis construirt, und die Werthänderung von w auf diesem Kreise beachtet. Unter einem, nur den Unendlichkeitspunkt umschliessenden Kreis hat man sich (wie aus der Transformation durch

reciproke Radii vectores ersichtlich wird) einen Kreis um den Coordinatenanfangspunkt zu denken, dessen Radius beliebig gross sein kann, aber jedenfalls so gross sein muss, dass alle im Endlichen befindlichen Verzweigungspunkte im Innern liegen. Wird dieser Kreis so durchlaufen, dass die endliche Fläche zur rechten bleibt, so bedeutet dies ein Umlaufen des Unendlichkeitspunktes, der zur linken eingeschlossen ist. Demnach besteht die Beziehung:

Wenn das Umkreisen sämmtlicher im Endlichen gelegener Verzweigungspunkte einen Werth w_1 nicht ändert, so ist auch der Unendlichkeitspunkt kein Verzweigungspunkt für w_1; und umgekehrt.

Wenn dagegen das Umkreisen sämmtlicher im Endlichen gelegener Verzweigungspunkte in einer bestimmten Richtung einen Cyclus herbeiführt, w_1 in w_2, w_2 in w_3, ... w_{p-1} in w_p, endlich w_p in w_1 überführt, so ist der Unendlichkeitspunkt ein Verzweigungspunkt für die p Blätter. Das Umlaufen des Verzweigungspunktes in der vorgezeichneten Richtung (bei der Abbildung durch reciproke Radii vectores verwandelt sie sich in die entgegengesetzte) führt den nämlichen Cyclus herbei.

98. Die allgemeine Theorie soll an folgenden Beispielen ausgeführt werden.

1) $$w^2 - b(z - \beta_1)(z - \beta_2) = 0.$$

Die Grössen b, β_1, β_2 haben beliebige complexe Werthe; β_1 und β_2 seien verschieden. Ausserwesentliche singuläre Punkte giebt es, wie aus der Substitution $\frac{1}{w}$ hervorgeht, im Endlichen nicht. Die kritischen Punkte lassen sich hier vermittelst der expliciten Form

$$w = [b(z - \beta_1)(z - \beta_2)]^{\frac{1}{2}}$$

leicht bestimmen. Denn an den Stellen, an welchen die beiden Werthe einer Quadratwurzel einander gleich sind, muss die Function unter der Wurzel verschwinden, also sind sie: $z = \beta_1$, $z = \beta_2$.

Bei dem Umlauf um solch eine Stelle findet Vertauschung der Werthe statt. Denn betrachtet man einen benachbarten Punkt $z = \beta_1 + re^{i\varphi}$ (r beliebig klein), so ist das zugehörige Werthpaar von

$$w = [bre^{i\varphi}(\beta_1 - \beta_2 + re^{i\varphi})]^{\frac{1}{2}};$$

die Argumente der beiden Werthe unterscheiden sich um π. Wählt man einen Werth und lässt φ alle Werthe von Null bis 2π durchlaufen, so tritt $e^{2i\pi}$ an Stelle von e^0. Im letzten Factor wird das Argument nicht um 2π wachsen, da dasselbe stets von dem Argument der constanten Zahl $\beta_1 - \beta_2$ beliebig wenig abweicht. Sonach erleidet die Wurzel die Aenderung um den Factor $e^{i\pi}$, d. h. die Werthe vertauschen sich. Dasselbe gilt für die Stelle β_2. Beide sind sonach

Verzweigungspunkte. Längs Schnitten, welche von denselben ausgehen, hängen die beiden Blätter zusammen.

Nennt man Blatt 1) dasjenige, welches im Coordinatenanfangspunkte O den Werth hat:

$$w_1^0 = [b\beta_1\,\beta_2]^{\frac{1}{2}} = (B\,\mathsf{B}_1\,\mathsf{B}_2)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\alpha+\psi_1+\psi_2}{2} + i\sin\frac{\alpha+\psi_1+\psi_2}{2}\right]$$

$$b = B(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad \beta_1 = \mathsf{B}_1(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1),$$
$$\beta_2 = \mathsf{B}_2(\cos\psi_2 + i\sin\psi_2),$$

Blatt 2) dasjenige, für welches

$$w_2^0 = (B\,\mathsf{B}_1\,\mathsf{B}_2)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\alpha+\psi_1+\psi_2+2\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha+\psi_1+\psi_2+2\pi}{2}\right],$$

so kann man entscheiden, welcher Werth von w zu jeder Stelle in jedem Blatte gehört, nachdem über den Verzweigungsschnitt eine Festsetzung getroffen. Wird dieser von β_1 aus parallel der positiven Abscissenaxe gezogen, so soll entschieden werden, welche Werthe zum Blatte 1) längs der Geraden $O\beta_1$ gehören.

Ein Punkt auf dieser Geraden heisse $z = r(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1)$; zu demselben gehört:

$$w = [B(\cos\alpha + i\sin\alpha)(r - \mathsf{B}_1)(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1)(r(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1) -$$
$$- \mathsf{B}_2(\cos\psi_2 + i\sin\psi_2)]^{\frac{1}{2}},$$

oder indem man:

$$r(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1) - \mathsf{B}_2(\cos\psi_2 + i\sin\psi_2) = \mathsf{P}(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$
$$(\Phi < 2\pi)$$

setzt, für $r < \mathsf{B}_1$

$$w_2 = (B(\mathsf{B}_1 - r)\,\mathsf{P})^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\alpha+\psi_1+\Phi+\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha+\psi_1+\Phi+\pi}{2}\right],$$

$$w_1 = (B(\mathsf{B}_1 - r)\,\mathsf{P})^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\alpha+\psi_1+\Phi+3\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha+\psi_1+\Phi+\pi}{2}\right].$$

Convergirt nun r nach Null, so wird P gleich B_2, $\Phi = \psi_2 + \pi$; man sieht also, dass der erste Werth in w_2^0, der zweite in w_1^0 übergeht. Letzterer liegt im ersten Blatte.

Betrachtet man aber die Punkte, für welche $r > \mathsf{B}_1$, so umschliesse man β_1 mit einem Kreise von beliebig kleinem Radius ϱ und durchlaufe denselben vom Punkte unterhalb β_1 bis zu einem oberhalb β_1 gelegenen Punkte auf $O\beta_1$, derart, dass der Verzweigungsschnitt nicht überschritten wird. Setzt man

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) - \mathsf{B}_1(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1) = \varrho(\cos\chi + i\sin\chi),$$

so ändert sich χ, wie ein Blick auf die Figur lehrt, in welcher $\varrho\cos\chi$ und $\varrho\sin\chi$ bei allen Werthen von r und ϱ geometrisch construirt

werden können, wenn es mit dem Werthe $\chi = \psi_1 + 3\pi$ beginnt, bis zu dem Werthe $\chi = \psi_1 + 2\pi$, so dass nun auf einer Stelle der Geraden $0\beta_1$ der Werth im ersten Blatte lautet: $(\Phi < 2\pi)$

$$w_1 = [B(r - B_1)P]^{\frac{1}{2}} \left[\cos\frac{\alpha + \psi_1 + \Phi + 2\pi}{2} + i \sin\frac{\alpha + \psi_1 + \Phi + 2\pi}{2}\right].$$

Umschliesst man die beiden Verzweigungspunkte β_1 und β_2 mit einer Curve, und durchläuft dieselbe so, dass die endliche Fläche zur rechten bleibt, so gelangt man von einem Punkte des ersten Blattes beim Ueberschreiten eines Verzweigungsschnittes ins zweite, beim Ueberschreiten des andern aber wieder ins erste, so dass also w in den ursprünglichen Functionswerth zurückkehrt.

Folglich ist auch der unendlich ferne Punkt kein Verzweigungspunkt. Dasselbe erkennt man durch die Substitution $z = \frac{1}{z'}$, wodurch 1) übergeht in

$$w^2 z'^2 - (1 - \beta_1 z')(1 - \beta_2 z') = 0.$$

In der Function $w = \frac{[(1 - \beta_1 z')(1 - \beta_2 z')]^{\frac{1}{2}}}{z'}$ ist der Punkt $z' = 0$ kein Verzweigungspunkt, wohl aber die Punkte $z' = \frac{1}{\beta_1}$, $z = \frac{1}{\beta_2}$.

2) $$w^3 - 3zw + z^3 = 0.$$

Um die kritischen Punkte zu bestimmen, berechnet man

$$\frac{\partial f}{\partial w} = 3(w^2 - z) = 0$$

und substituirt hieraus in die Gleichung 2) $w^2 = z$; so folgt zu ihrer Bestimmung die Gleichung $z^3(z^3 - 4) = 0$.

Im Punkte $z = 0$ sind drei Wurzeln der Gleichung Null. Um zu entscheiden, ob dieser Punkt ein Verzweigungspunkt der drei Blätter ist oder nicht, setze man $z = re^{i\varphi}$ (r beliebig klein); so wird

$$w^3 - 3re^{i\varphi}w + r^3 e^{3i\varphi} = 0.$$

Da die algebraische Function stetig ist, so muss bei beliebig kleinen Werthen von r auch der Modul der Werthe w beliebig klein werden; das Verhältniss $\frac{w}{r}$ kann dabei sowohl einem endlichen Werthe, als auch den Werthen Null oder ∞ zustreben (unbestimmt kann die Wurzel einer Gleichung nie werden). Aus der Gleichung

$$\left(\frac{w}{r}\right)^3 - \frac{3}{r}\left(\frac{w}{r}\right)e^{i\varphi} + e^{3i\varphi} = 0$$

geht hervor, dass das Verhältniss $\frac{w}{r}$ nicht endlich sein kann; denn das mittlere Glied wächst für $r = 0$ über jeden Betrag. Nimmt man

an, dass $\frac{w}{r}$ Null wird, so verschwindet das erste Glied im Vergleich zum zweiten und dritten und es wird

$$\text{Lim}\left(-\frac{3}{r}\frac{w}{r}e^{i\varphi}\right) = -e^{3i\varphi}, \text{ also Lim } w = \frac{1}{3}r^2 e^{2i\varphi} = w_1{}^0.$$

Diese Gleichung besagt, dass in der Nähe des Nullpunktes eine Wurzel der Gleichung von $\frac{1}{3}r^2 e^{2i\varphi} = \frac{1}{3}z^2$ beliebig wenig unterschieden ist. Diese Wurzel ist in der Umgebung der Stelle eindeutig.

Nimmt man an, dass $\frac{w}{r}$ einem unendlich grossen Werthe zustrebt, so kann das nur so geschehen, dass

$$\text{Lim}\left(\frac{w}{r}\right)^3 - \frac{3}{r}\,\text{Lim}\,\frac{w}{r}e^{i\varphi} + e^{3i\varphi} = 0,$$

also, wie aus der Division mit $\frac{w}{r}$ hervorgeht,

$$\text{Lim}\left(\frac{w}{r}\right)^2 - \frac{3}{r}e^{i\varphi} = 0$$

wird.

Daraus folgt, dass

$$\text{Lim } w = \sqrt{3}\, r^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{i\varphi}{2}} = w_2{}^0,$$

oder

$$\text{Lim } w = \sqrt{3}\, r^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{i\varphi + i\pi}{2}} = w_3{}^0$$

ist. Zwei Wurzeln der Gleichung weichen von diesen Werthen beliebig wenig ab, und für diese beiden ist der Nullpunkt ein Verzweigungspunkt. Ich denke mir den Verzweigungsschnitt längs der negativen Ordinatenaxe gewählt. Die übrigen Verzweigungspunkte sind durch die Gleichung $z^3 - 4 = 0$ bestimmt, welche drei Werthe liefert:

$$\beta_1 = \sqrt[3]{4},\quad \beta_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{4}\; e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

$$\beta_3 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\; e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$

Um festzustellen, in welcher Weise eine Vertauschung der Wurzeln um die Punkte β stattfindet, gehe man von einem Punkte z aus, der auf der Abscissenaxe in der beliebig kleinen Entfernung r vom Coordinatenanfangspunkte liegt; die zugehörigen Wurzeln sind reell und mit beliebiger Annäherung

$$w_1{}^0 = \frac{1}{3}r^2,\qquad w_2{}^0 = \sqrt{3}\, r^{\frac{1}{2}},\qquad w_3{}^0 = -\sqrt{3}\, r^{\frac{1}{2}}.$$

Zwei sind positiv, eine negativ. Bewegt sich z auf der Abscissenaxe bis in die Nähe des Punktes β_1, so bleiben die drei Wurzeln der Gleichung reell (denn weil complexe Wurzeln nur paarweise conjugirt

auftreten, so kann, da der reelle und imaginäre Bestandtheil sich stetig ändern, solch ein Uebergang nur in Punkten stattfinden, in denen die reellen Bestandtheile gleich, die imaginären Null sind, also in Verzweigungspunkten). Im Punkte β_1 haben die beiden gleichen Wurzeln den Werth $w = +\sqrt{z} = +2^{\frac{1}{3}}$; es vertauschen sich die beiden positiven Werthe; er ist ein Verzweigungspunkt für die Blätter 1 und 2; der Schnitt werde so gewählt, dass er nicht die Strecken $O\beta_2$, $O\beta_3$ durchschneidet. Man betrachte nun einen Punkt, der in beliebiger Nähe des Anfangspunktes auf der Geraden $O\beta_2$ liegt; für denselben ist, indem man auf dem Kreise mit dem Radius r die negative Ordinatenaxe nicht überschreitet,

$$w_1{}^0 = \frac{1}{3} r^2 e^{\frac{4i\pi}{3}}, \quad w_2{}^0 = \sqrt{3}\, r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{3}} = -\sqrt{3}\, r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{4i\pi}{3}}, \quad w_3{}^0 = \sqrt{3}\, r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$

Ein Punkt auf $O\beta_2$ hat die Coordinaten $z = \varrho\, e^{\frac{2i\pi}{3}}$, für den Punkt β_2 hat die Doppelwurzel den Werth $= 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

Setzt man nun in die Gleichung $z = \varrho\, e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $w = w' e^{\frac{4i\pi}{3}}$, so erhält sie die Form:

$$w'^3 - 3\varrho w' + \varrho'^3 = 0,$$

aus welcher hervorgeht, dass sich auf $O\beta_2$ w' ebenso verhält, wie w längs des Radius $O\beta_1$, es vertauschen sich also die beiden positiven mit $e^{\frac{4i\pi}{3}}$ multiplicirten Werthe, d. h. w_1 und w_3, β_2 ist also Verzweigungspunkt für das erste und dritte Blatt; der Schnitt werde so gelegt, dass er nicht die Strecken $O\beta_1$, $O\beta_3$ durchschneidet.

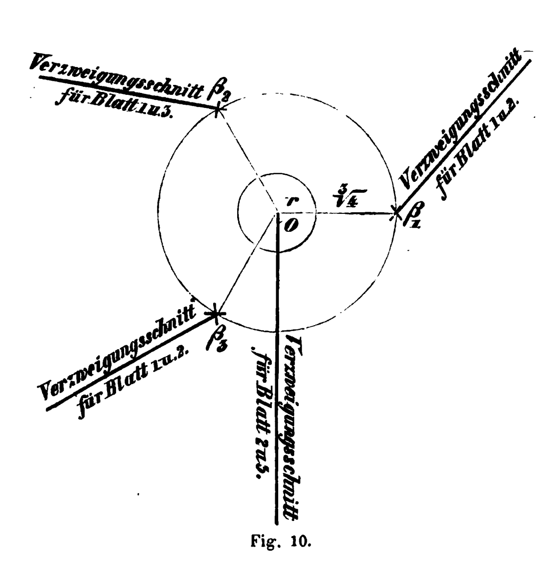


Fig. 10.

Endlich erhält man auf dem Radius $O\beta_3$:

$$w_1{}^0 = \frac{1}{3} r^2 e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

$$w_2{}^0 = \sqrt{3}\, r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

$$w_3{}^0 = \sqrt{3}\, r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{5i\pi}{3}} = -\sqrt{3}\, r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

und in derselben Weise wird festgestellt, dass β_3 ein Verzweigungspunkt für w_1 und w_2 ist.

Demnach ist das System der Verzweigungsschnitte festgestellt. Ein Umlaufen sämmtlicher Verzweigungspunkte führt jeden Werth in den anfänglichen zurück; folglich ist auch der Unendlichkeitspunkt nur ein ausserwesentlicher singulärer.

99. Es soll nicht darauf eingegangen werden, wie sich das System der Verzweigungsschnitte vereinfachen lässt; Untersuchungen, welche für die Theorie der algebraischen Integrale und deren Perioden wichtig sind; wohl aber muss die Frage aufgeworfen werden, nach welcher allgemeinen Methode die verschiedenen Werthe von w, welche bei continuirlicher Veränderung von z selbst continuirlich auf einander folgen, berechnet werden können. Denn die bisherigen Untersuchungen haben nur die Bestimmtheit dieser Aufgabe dargethan, und an den einfachen Beispielen, die sich auf den 2ten und 3ten Grad in w beschränkten, sind nur gewisse Hülfsmittel für die Behandlung der Werthe an den Verzweigungsstellen zur Anwendung gekommen. Das allgemeine Problem der Berechnung der algebraischen Function bleibt also noch zu lösen (siehe viertes Buch), und wird vermittelst der Taylor'schen Reihe für complexe Functionen seine Erledigung finden.

Bei dieser Gelegenheit wird auch die Bestimmung der höheren Ableitungen einer algebraischen Function gelehrt werden.

Drittes Buch.

Die Integrale von Functionen reeller Variabelen.

Erstes Capitel.

Das bestimmte und unbestimmte Integral.

100. Bevor das Grundproblem der Integralrechnung betrachtet wird, ist es nothwendig, ein Theorem kennen zu lernen, welches die in §. 21 und §. 37 bewiesenen Sätze vervollständigt.

Im §. 37 wurde aus dem Mittelwerthsatze gefolgert: Ist der vor- und rückwärts genommene Differentialquotient in einem Intervalle allenthalben gleich Null, so ist die Function in diesem Intervalle stetig und zwar constant. Dieser Satz kann nicht so ausgesprochen werden: Ist der vorwärts genommene Differentialquotient in einem Intervalle an jeder einzelnen Stelle gleich Null, so ist die Function constant. Dies lehrt das in §. 17 erwähnte Beispiel: denn die unstetige Function $y = G(x)$, in welcher $G(x)$ die grösste ganze in x enthaltene Zahl bedeuten soll, ist an den Stellen $x = 1, 2, 3 \ldots$ unstetig; und doch muss man behaupten, dass an jeder einzelnen Stelle der vorwärts genommene Differentialquotient Null ist. Denn mag z. B. x noch so nahe am Puncte 1 liegen: $x = 1 - \varepsilon$, so kann man doch ein Intervall $\Delta x < \varepsilon$ angeben, so dass $x + \Delta x < 1$ wird, also $\frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x} = 0$ ist.

Man kann aber mit Hülfe des Mittelwerthsatzes einsehen, *dass eine stetige Function, deren vorwärts genommener Differentialquotient allenthalben in einem Intervalle verschwindet, constant ist,* und zugleich den Satz des §. 21 in der Fassung beweisen:

Wenn in einem Intervalle, in welchem $f(x)$ stetig ist, auch der vorwärts genommene Differentialquotient eine stetige Function von x ist, so existirt überall in diesem Intervalle ein bestimmter Werth des rückwärts genommenen Differentialquotienten, der mit dem ersten identisch ist.

Während also dort die gleichmässige Stetigkeit des Differenzenquotienten in Bezug auf x und Δx die Voraussetzung bildete für die Identität der beiden Differentialquotienten und für ihre Stetigkeit, soll hier aus der Stetigkeit des einen die Identität gefolgert werden; auch

wird sich ergeben, dass die gleichmässige Stetigkeit des Differenzenquotienten daraus hervorgeht.

Die ausgesprochenen Sätze lassen sich durch folgende Ueberlegungen beweisen:

1. Wenn eine stetige Function in einem Intervalle durchweg einen positiven vorwärts genommenen Differentialquotienten besitzt, so wachsen die Werthe der Function in diesem Intervalle, und der Anfangswerth ist kleiner als der Endwerth.

An jeder Stelle, wo eine stetige Function einen vorwärts genommenen, von Null verschiedenen Differentialquotienten besitzt, lässt sich ein Intervall Δx vorwärts genommen angeben, in welchem die Differenz $f(x + \Theta \Delta x) - f(x)$ ihr Zeichen nicht wechselt, §. 20. Würde nun die Function an einer Stelle abnehmen und nicht wachsen, so müsste $f(x + \Theta \Delta x) - f(x)$ und also auch der Differentialquotient negativ sein. Auch ist der Fall nicht denkbar, dass, während x nach einer bestimmten Stelle x' im Intervalle convergirt, Δx unter jede angebbare Grenze herabsinkt. Denn bildet man die Differenz $f(x' - \varepsilon + \Delta x) - f(x' - \varepsilon)$ und lässt ε nach Null convergiren, so würde, falls auch Δx nach Null convergirt, diese Differenz zu Folge der Stetigkeit von f den Werth Null annehmen, und da an der Stelle x' ein positiver Differentialquotient existirt, so lässt sich jedenfalls ein Intervall h angeben, so dass $f(x' + h) - f(x')$ positiv bleibt. Es ist also auch $f(x' + h) - f(x' - \varepsilon)$ positiv, wie klein auch immer ε gewählt ist.

2. Wenn eine stetige Function an den Endpunkten eines Intervalles denselben Werth annimmt, und überall im Intervalle eine bestimmte vorwärts genommene Ableitung besitzt, die im ganzen Intervalle stetig ist, so muss es eine Stelle geben, an welcher die Ableitung verschwindet.

Da die Function an den Endpunkten denselben Werth erreicht, so muss sie, falls sie nicht durchweg constant bleibt, einen Wechsel der continuirlichen Zu- und Abnahme erfahren, d. h. Stellen besitzen, an denen der Differentialquotient positiv, und Stellen, an denen er negativ ist. Da dieser aber stetig ist, so muss zwischen solchen eine Stelle vorhanden sein, an denen er Null wird.

3. Für jede nebst ihrem vorwärts genommenen Differentialquotienten stetige Function besteht in einem Intervall von x_0 bis X die Gleichung

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f_1(x_0 + \Theta(X - x_0)) \qquad (0 < \Theta < 1),$$

unter f_1 ist die vorwärts genommene Ableitung zu verstehen. Denn bezeichnet man den Werth von

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} \text{ mit } K,$$

so ist $$\varphi(x) = (f(x) - Kx) - (f(x_0) - Kx_0)$$
eine stetige Function von x, welche an den Endpunkten des Intervalles x_0 und X denselben Werth, nämlich Null annimmt, und deren Differentialquotient ebenso wie der von f stetig ist; es gibt daher eine Stelle $x_0 + \Theta(X - x_0)$, an welcher
$$\varphi_1(x_0 + \Theta(X - x_0)) = f_1(x_0 + \Theta(X - x)) - K = 0$$
wird.

Die Gleichung
$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f_1(x_0 + \Theta(X - x_0)) \text{ oder } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f_1(x + \Theta h)$$
gilt, wenn x und $x + h$ irgend welche Stellen im Intervalle bezeichnen, für jeden Werth von h. Ist ein beliebig kleiner Werth von h vorgegeben, so kann man x so wählen, dass $x + h$ eine beliebige Stelle x_1 im Intervalle darstellt. Mithin hat man das Resultat: Für noch so kleine Werthe von h ist an jeder Stelle x_1 im Intervalle die Gleichung
$$\frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} = f_1(x_1 - \Theta h)$$
erfüllbar. Lässt man h nach Null convergiren, während der Werth von x_1 festgehalten wird, so geht die rechte Seite stetig in den Werth $f_1(x_1)$ über, also ist, was zu beweisen war, der rückwärts genommene Differentialquotient mit f_1 an jeder Stelle identisch.

Demnach gilt der Mittelwerthsatz für eine stetige Function, deren vorwärts genommener Differentialquotient ebenfalls stetig ist; und hieraus folgt: *Eine stetige Function, deren vorwärts genommener Differentialquotient in einem Intervalle Null ist, ist in diesem Intervalle constant.*

Ich will der Vollständigkeit halber noch die gleichmässige Convergenz des Differenzenquotienten nachweisen. Es soll bewiesen werden, dass zufolge der Stetigkeit von f und f_1 für jeden Werth von x eine obere Grenze für h und Δx angebbar ist, so dass für alle kleineren Werthe
$$\left[\frac{f(x+h+\Delta x) - f(x+h)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$
kleiner bleibt als eine beliebig kleine Zahl δ.

Der erste Quotient lässt sich auf die Form bringen $f_1(x+h+\Theta\Delta x)$, der zweite ist gleich $f_1(x+\Theta'\Delta x)$. Die Differenz $f_1(x + h + \Theta\Delta x) - f_1(x + \Theta'\Delta x)$ kann, da f_1 stetig ist, lediglich durch Wahl von h und Δx kleiner gemacht werden als δ.

Daraus folgt, dass, wenn die Function $f(x)$ und ihre Ableitung $f_1(x)$ für ein ganzes Intervall von a bis b definirt sind, eine obere Grenze für Δx angegeben werden kann, die für jedes zwischen a und b gelegene Intervall hinreichend ist, um bei gegebenem Werthe von δ die Ungleichung

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f_1(x) < \delta$$

zu erfüllen. Denn würde, während x nach einem Werthe x' convergirt, auch Δx unter jede angebbare Grenze herabsinken, so liesse sich auch die Ungleichung

$$f_1(x+\Theta\Delta x) - f_1(x) < \delta$$

in beliebiger Nähe dieser Stelle durch keinen angebbaren Werth von Δx erfüllen, was der Stetigkeit von f_1 widerstreitet.

101. Das Grundproblem der Integralrechnung besteht in der Umkehr des Problemes der Differentiation; es lautet: *Gegeben ist im Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ eine beliebige aber eindeutige Function $f(x)$; es soll eine stetige Function $F(x)$ ermittelt werden, welche die Eigenschaft hat, dass ihre Ableitung für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$ mit $f(x)$ identisch ist.*

Ueber die Function $f(x)$ machen wir zunächst folgende beschränkende Voraussetzungen: Erstlich $f(x)$ sei im Intervalle durchweg endlich; zweitens $f(x)$ sei im Intervalle durchweg stetig, oder es erleide an beliebig vielen, jedoch immer nur vereinzelten Stellen endliche Sprünge.

Ist $f(x)$ eine stetige Function, so ist die gesuchte Function $F(x)$, vorausgesetzt, dass sie überhaupt existirt, so beschaffen, dass ihre vorwärts und rückwärts genommenen Ableitungen allenthalben im Intervalle übereinstimmen. Ist aber $f(x)$ an einzelnen Stellen unstetig, derart, dass an einer solchen Stelle die als bestimmt vorausgesetzten Werthe $\operatorname{Lim} f(x+\delta)$ und $\operatorname{Lim} f(x-\delta)$ für $\delta = 0$ verschieden sind, so soll die Function $F(x)$ die Eigenschaft haben, dass hier ihr vorwärts genommener Differentialquotient gleich $f(x+0)$, ihr rückwärts genommener gleich $f(x-0)$ ist; unter diesen kürzeren Bezeichnungen sind die oben genannten Grenzwerthe zu verstehen.

Zunächst ist die Frage zu beantworten, ob unter diesen Bedingungen und bei diesen Festsetzungen das Problem ein bestimmtes ist, oder nicht; d. h. ob sich nicht mehrere von einander verschiedene stetige Functionen finden lassen, deren Ableitungen im Intervalle von a bis b übereinstimmen. Es sei ausser der Function $F(x)$ noch eine zweite Function $\Phi(x)$ ermittelt, deren Ableitungen im Intervalle a bis b ebenfalls gleich $f(x)$ sind; so ist $\Phi(x) - F(x)$ eine stetige Function deren vor- und rückwärts genommene Ableitungen in demselben Intervalle durchweg Null sind. Eine solche Function kann, wie im vorigen Paragraphen bewiesen wurde, nur eine Constante sein. Mithin ist

$$\Phi(x) = F(x) + \text{Const.},$$

d. h. *alle stetigen Functionen, welche in einem Intervalle dieselben be-*

stimmten Werthe der vor- resp. rückwärts genommenen Ableitung besitzen, unterscheiden sich von einander nur um eine additive Constante mit beliebigem Werthe.

Man kann dieses Resultat auch folgendermassen aussprechen: Es giebt nicht mehr als eine stetige Function, welche an der Stelle $x=a$ einen bestimmten (beliebig gewählten) Werth hat, und deren Ableitungen im Intervalle a bis b mit $f(x)$ übereinstimmen. Denn die additive Constante wird durch Festsetzung eines Werthes der Function an der Stelle $x=a$ eindeutig fixirt.

102. Die Function $F(x)$ soll unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ durchweg stetig ist, bestimmt werden.

Zwischen einer stetigen Function $F(x)$ und ihrer vorwärts genommenen Ableitung besteht die Gleichung:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x)+\delta,$$

wobei δ eine stetige Function von Δx bezeichnet, die mit Δx nach Null convergirt; der Werth von δ ist für jedes endliche Δx unbekannt, so lange die Werthe von F unbekannt sind. Wir nehmen an, das Intervall von a bis zu irgend einem Werthe $x \leqq b$ sei von endlicher Länge, und theilen dasselbe in n Theile durch die Punkte x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$; die Längen der Theilintervalle: x_1-a, x_2-x_1, $\ldots$ $x_{n-1}-x_{n-2}$, $x-x_{n-1}$ seien mit d_1, $d_2 \ldots d_{n-1}$, d_n bezeichnet; an der Stelle a sei $F(a)=$ Const. beliebig gewählt, so muss die gesuchte Function $F(x)$ die Gleichungen erfüllen:

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} F(x_1)-F(a) &= d_1 f(a)+d_1\delta_1 \\ F(x_2)-F(x_1) &= d_2 f(x_1)+d_2\delta_2 \\ F(x_3)-F(x_2) &= d_3 f(x_2)+d_3\delta_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(x_{n-1})-F(x_{n-2}) &= d_{n-1} f(x_{n-2})+d_{n-1}\delta_{n-1} \\ F(x)-F(x_{n-1}) &= d_n f(x_{n-1})+d_n\delta_n. \end{aligned}$$

Aus der Addition aller dieser Gleichungen folgt dann:

$$\text{II.}\ F(x)-F(a)=[d_1 f(a)+d_2 f(x_1)+d_3 f(x_2)\ldots d_{n-1} f(x_{n-2})+d_n f(x_{n-1})]+\Delta,$$

wobei die Unbekannte Δ gleich ist:

$$\Delta=d_1\delta_1+d_2\delta_2+d_3\delta_3+\ldots d_{n-1}\delta_{n-1}+d_n\delta_n.$$

Denkt man sich unter allen Werthen δ_1, $\delta_2 \ldots \delta_n$ denjenigen, dessen absoluter Betrag am grössten ist, mit δ bezeichnet, so ist der absolute Werth von Δ sicher kleiner als der absolute Werth des Productes:

$$\delta[d_1+d_2 \ldots +d_n]=\delta(x-a).$$

Dieser Werth wird für eine stetige Function $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ sein soll, kleiner werden als jede noch so kleine Grösse, wenn die Theilintervalle d sämmtlich unter einen gewissen Betrag herabsinken. Soll also die Gleichung II. zur Berechnung des Werthes $F(x)$ dienen, so muss erstlich der in der Klammer stehende Ausdruck der rechten Seite bei beliebiger Vermehrung der Theilintervalle nach einem bestimmten von x und der Constanten a abhängigen Werthe convergiren, und dieser Werth muss zweitens eine stetige Function von x mit der Ableitung $f(x)$ sein.

103. Um zu zeigen, dass die erste Forderung in der That erfüllt wird, verfahren wir folgendermassen. Die Summe:

$$S = d_1 f(a) + d_2 f(x_1) + d_3 f(x_2) + \dots d_{n-1} f(x_{n-2}) + d_n f(x_{n-1})$$

werde dadurch abgeändert, dass jedes der Intervalle $d_1, d_2 \dots d_n$ aufs neue in Unterabtheilungen zerlegt wird; die entsprechende Summe, gebildet ebenso wie S aus den Producten je eines der neuen Theilintervalle mit dem Werthe von f an der Anfangsstelle solch eines Intervalles, werde mit S' bezeichnet; die Anzahl der neuen Intervalle sei n'; darauf soll wiederum jedes dieser Intervalle in eine beliebige Anzahl von Unterabtheilungen zerlegt werden, der darauf bezügliche Werth der Productsumme heisse S'', die Anzahl der Intervalle n''; auf diese Weise fortfahrend erhält man eine Reihe von beliebig wachsenden Zahlen:

$$n, n', n'' \dots n^{(k)} \dots$$

und eine Reihe von zugehörigen Summen:

$$S, S', S'' \dots S^{(k)} \dots .$$

Diese Reihe soll einen bestimmten Grenzwerth repräsentiren, d. h. es muss sich zu jeder noch so kleinen Zahl δ ein Werth $n^{(k)}$ finden lassen, so dass die Beträge der Differenzen zwischen $S^{(k)}$ und allen folgenden Werthen: $S^{(k+\nu)}$ kleiner bleiben als δ.

Ich bemerke zunächst, dass eine Summe von der Form S stets durch einen Ausdruck von der Form:

$$\text{III.} \qquad S = (x-a) f(a + \Theta(x-a)) \qquad 0 \leqq \Theta \leqq 1,$$

dargestellt werden kann; denn wird der grösste Werth unter den Coefficienten $f(a) \dots f(x_{n-1})$ mit G, der kleinste Werth (beide mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen) mit K bezeichnet, so ist:

$$K(x-a) < S < G(x-a)$$

oder S gleich dem Producte von $x-a$ mit einem zwischen K und G gelegenen Werthe. Weil nun $f(x)$ eine stetige Function von x ist, nimmt sie jeden zwischen dem kleinsten Werthe K und dem grössten G gelegenen Werth mindestens einmal an, sie überspringt keinen, es

muss daher eine Stelle vorhanden sein, an welcher f gerade den Werth hat, welcher für die Gleichung III. erforderlich ist.

Wird nun jedes der Intervalle von a bis x_1, von x_1 bis x_2 u. s. f. in kleinere Intervalle getheilt, so treten an Stelle der Producte $d_1 f(a)$, $d_2 f(x_1)$ ... neue Summen; nämlich wenn die Theilpunkte im k^{ten} Intervalle: von x_{k-1} bis x_k mit $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$ ... $x_{\nu-1}^{(k)}$ bezeichnet werden, an Stelle von $d_k f(x_{k-1})$ die Summe:

$$\sum^{(k)} = (x_1^{(k)} - x_{k-1}) f(x_{k-1}) + (x_2^{(k)} - x_1^{(k)}) f(x_1^{(k)}) + \dots (x_k - x_{\nu-1}^{(k)}) f(x_{\nu-1}^{(k)}).$$

Die rechts stehende Summe kann analog der Gleichung III. auf die Form gebracht werden:

$$\sum_{\nu}^{(k)} = (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1} + \Theta_k (x_k - x_{k-1})) = d_k f(x_{k-1} + \Theta_k (x_k - x_{k-1}))$$

$$0 \leqq \Theta_k \leqq 1.$$

Die Theilung der Intervalle von S in neue Unterabtheilungen liefert also einen Werth S', der von dem vorigen nur dadurch unterschieden ist, dass in jedem Terme $d_k f(x_{k-1})$ an Stelle von $f(x_{k-1})$ ein anderer Werth von f tritt, der zu einer im Intervalle d_k befindlichen Stelle gehört.

Ebenso geht S'' aus S' dadurch hervor, dass an Stelle des Termes in S', $d_k' f(x'_{k-1})$, ein anderer Werth von f tritt, der zu einer im Intervalle d_k' gelegenen Stelle gehört; mit d_k' ist eines der n' Theilintervalle bezeichnet, dessen Anfangspunkt x'_{k-1} ist, u. s. f.

Da nun aber die Function f stetig ist, so kann an jeder Stelle ein endliches Intervall ausfindig gemacht werden, in welchem die verschiedenen Werthe von f um weniger als eine beliebig kleine endliche Grösse ε differiren. Durch fortgesetzte Theilung werden also sicherlich die Intervalle so klein gemacht werden können, dass in jedem derselben die absoluten Beträge der Differenzen der verschiedenen Werthe von f kleiner sind als ε; ist die Anzahl dieser Intervalle $n^{(k)}$, der hierauf bezüglichen Summe $S^{(k)}$, so ist, wenn zu irgend einer der weiteren Theilungen übergegangen wird:

$$\text{abs}\,[S^{(k)} - S^{(k+\nu)}] < \varepsilon [d_1 + d_2 + \dots d_{n^{(k)}}];$$

also, da die Gesammtgrösse der Intervalle immer gleich $(x - a)$ bleibt, kleiner als $\varepsilon(x - a)$.

Ist also einmal die Theilung so weit vorgeschritten, dass in jedem Intervalle die Schwankungen von f kleiner sind als die Grösse:

$$= \frac{\delta}{x - a} \varepsilon,$$

so vermögen alle weiteren Theilungen den Betrag von $S^{(k)}$ nur um

weniger als δ zu ändern; die Reihe der S nähert sich also einem bestimmten Grenzwerthe.

Es muss aber noch untersucht werden, ob dieser Grenzwerth von der ursprünglichen Theilung in n Intervalle und der daraus hervorgehenden fortgesetzten Theilung jedes Intervalles in kleinere abhängig ist, oder ob es ganz gleichgiltig ist, in welcher Weise das Gesammtintervall von a bis x in Unterabtheilungen zerlegt wird, deren Grösse schliesslich unter jeden Betrag herabsinkt*). Dass letzteres der Fall ist, erhellt aus folgender Betrachtung.

Es sei ursprünglich eine Theilung in m Theile gewählt, der zugehörige Werth heisse S_1. Durch weitere Theilung dieser Intervalle erhält man eben so wie vorhin eine Reihe von Werthen $S_1^{(1)}, S_1^{(2)} \ldots S_1^{(k)} \ldots$, während die Anzahl der Intervalle $m', m'', \ldots m^{(k)}$ ist. Die Theilung sei so weit vorgeschritten, dass jede neue Untertheilung den Werth von $S_1^{(k)}$ nur um weniger als δ zu ändern vermag.

Denken wir uns nun die beiden Theilungen in $m^{(k)}$ und in $n^{(k)}$ Intervalle zu einer einzigen vereinigt, so gehört zu dieser eine Summe Σ, welche von $S^{(k)}$ sowohl als auch von $S_1^{(k)}$ um eine Grösse kleiner als δ verschieden ist; denn es ist diese dritte aus der Vereinigung entstandene Theilung als eine Fortsetzung jeder der beiden früheren zu betrachten. Mithin ist

$$\text{abs}\,[S^{(k)} - S_1^{(k)}]$$

kleiner als die beliebig kleine Grösse 2δ, d. h. die Reihe der S_1 hat den nämlichen Grenzwerth wie die Reihe S.

Man kann sich also insbesondere das Intervall von a bis x in lauter gleiche Theile Δx zerlegt denken, deren Anzahl n immer mehr wächst; alsdann stellt sich der gesuchte Werth in der Form dar:

$$\text{Lim}\,\{\Delta x[f(a) + f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \ldots f(a + (n-1)\Delta x)]\}$$

$$\left[\frac{x-a}{n} = \Delta x, \quad \text{für } \Delta x = 0\right].$$

Mit Benutzung des Differentialzeichens $dx = \text{Lim}\,\Delta x$ bezeichnet man die Summe nach dem Vorgange von Leibnitz durch das kurze Symbol

$$\text{IV.} \quad \int_a^x f(x)\,dx = \text{Lim}\,\{\Delta x[f(a) + f(a + \Delta x) + \ldots f(x - \Delta x)]$$

$$\text{für } \Delta x = 0, \qquad \left(\frac{x-a}{n} = \Delta x\right)$$

und nennt sie das bestimmte Integral der Function $f(x)$ genommen von der unteren Grenze a bis zu einer bestimmten oberen Grenze x.

Das Integralzeichen $\int$ ist ein Summenzeichen; auf der linken Seite der Definitionsgleichung IV steht ein Symbol, auf der rechten ein

*) Ausführlicher noch ist diese Untersuchung §. 142 geführt.

berechenbarer Ausdruck. Zu beachten ist bei dieser Formel, dass x als obere Grenze einen bestimmten Werth repräsentirt, unter dem Integralzeichen dagegen eine Veränderliche bedeutet, da f für die Stellen $f(a)$, $f(a + dx)$, $f(a + 2dx)$ . . . zu bilden ist.

Der Begriff des Integrales als einer Summe gab Veranlassung zu einer irrthümlichen Auffassung. Wenn man nämlich auf der rechten Seite der Gleichung IV. zuerst Δx gleich Null setzt, so erhält man, da alle Glieder den Factor Δx haben, lauter Summanden, deren Werth Null ist, und welche nothwendigerweise, wie viele man auch addiren mag, den Summenwerth Null liefern. Demnach könnte ein Integral immer nur den Werth Null haben, oder die Gleichung IV. enthielte einen Widerspruch. Derselbe wird durch den andern Widerspruch $dx \,.\, f(x)$ ist nicht Null, sondern eine unendlich kleine Grösse, nicht beseitigt, sondern nur verdunkelt. Euler (siehe Anmerk. zu §. 105) verwarf daher die Definition des Integrales als einer Summe gänzlich, und behielt nur die Definition, welche aus der Umkehr der Differentiation folgt, bei. Indessen führt doch diese Definition, wie die obige Entwickelung zeigt, unumgänglich auf den Summenbegriff, und derselbe enthält keinen Widerspruch, wenn man beachtet, dass $\int_a^x f(x)\,dx$ nicht die Summe aus den Grenzwerthen von $f(x)\Delta x$, sondern der Grenzwerth der Summe aus den Gliedern $f(x)\Delta x$ ist; mit andern Worten: es handelt sich darum, zuerst die Summe bei endlicher Gliederzahl als Function von Δx zu ermitteln, und alsdann den Grenzwerth für $\Delta x = 0$ zu bestimmen. Es ist z. B. für $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b x\,dx = \operatorname{Lim} \Delta x [a + (a + \Delta x) + (a + 2\Delta x) + \ldots (a + (n-1)\Delta x)] =$$

$$= \operatorname{Lim} an\Delta x + \operatorname{Lim} \Delta x^2 \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= (b-a)\,a + \operatorname{Lim} \frac{1}{2}(b-a)(b-a-\Delta x) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\,.$$

In der Gleichung IV. gilt bei jedem noch so kleinen Werthe von Δx der Satz, dass die rechts stehende Summe gleich ist dem Producte von $x - a$ multiplicirt mit einem Werthe, der zwischen dem grössten und kleinsten der Werthe enthalten ist, den f an den verschiedenen Theilpunkten annimmt; da aber f als stetig vorausgesetzt ist, so muss es auch diesen mittleren Werth jedenfalls einmal annehmen, d. h. es ist auch:

$$\text{V.} \qquad \int_a^x f(x)\,dx = (x-a)\,f[a + \Theta(x-a)] \qquad 0 \leqq \Theta \leqq 1.$$

104. Der bestimmte Grenzwerth ist aber auch zweitens eine stetige Function seiner oberen Grenze x; zu jeder noch so kleinen Zahl δ kann eine Zahl h gefunden werden, so dass:

$$\text{abs}\left[\int_a^{x\pm h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx\right] < \delta,$$

vorausgesetzt, dass $x \pm h$ auch noch im Intervalle a bis b liegt.

Denn aus der Summendefinition geht hervor:

$$\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = \text{Lim}\,\Delta x\,[f(x) + f(x+\Delta x) + \cdots f(x+h-\Delta x)] =$$

$$= \int_x^{x+h} f(x)\,dx.$$

Es ist aber nach Gleichung V.:

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = hf(x+\Theta h) \qquad 0 \leqq \Theta \leqq 1.$$

Da $f(x)$ durchweg endlich ist, so kann dieser Ausdruck durch Wahl von h beliebig klein gemacht werden. Ebenso ist:

$$\int_a^{x-h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = -\text{Lim}\,\Delta x\,[f(x-h) + f(x-h+\Delta x) + \cdots f(x-\Delta x)]$$

$$= -\int_{x-h}^x f(x)\,dx,$$

und nach Gleichung V.:

$$-\int_{x-h}^x f(x)\,dx = -h\,f(x-\Theta h) \qquad 0 \leqq \Theta \leqq 1.$$

Aus diesen Gleichungen folgt auch, dass das Integral, als Function der oberen Grenze betrachtet, die Ableitung $f(x)$ besitzt. Denn es wird

$$\text{Lim}\,\frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx\right\} = \text{Lim}\,\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx = \underset{\text{für } h=0}{\text{Lim}}\, f(x+\Theta h),$$

$$\text{Lim} - \frac{1}{h}\left\{\int_a^{x-h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx\right\} = \text{Lim}\,\frac{1}{h}\int_{x-h}^x f(x)\,dx = \underset{\text{für } h=0}{\text{Lim}}\, f(x-\Theta h).$$

An den Stellen wo $f(x)$ stetig ist, geht $f(x+\Theta h)$ sowohl wie $f(x-\Theta h)$ stetig in den Werth $f(x)$ über; der vor- und der rückwärts genommene Differentialquotient sind hier identisch.

Mithin sind die Bedingungen erfüllt, welche nothwendig und hinreichend sind, um aus der Gleichung II. den Satz zu gewinnen:

Die gesuchte stetige Function $F(x)$, welche die Eigenschaft haben soll, dass ihre Ableitungen im Intervalle von a bis b allenthalben gleich sind den Werthen der stetigen Function $f(x)$, ist gleich dem bestimmten Integrale $\int\limits_a^x f(x)\,dx$, dasselbe additiv vermehrt um eine beliebige Constante:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx + \text{Const.}$$

Die Function $F(x)$ heisst das unbestimmte Integral von $f(x)$. Die Constante wird festgelegt, sobald der Werth, den F an der Stelle a haben soll, gegeben ist. Denn setzt man in der Gleichung $x = a$, so wird $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$, also

$$F(a) = \text{Const.}$$

Das bestimmte Integral lässt sich sonach umgekehrt bezeichnen als die Differenz der Werthe des unbestimmten Integrales gebildet für die obere und untere Grenze:

$$F(x) - F(a) = \int\limits_a^x f(x)\,dx.$$

105. Das bestimmte Integral $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ ist einer einfachen geometrischen Deutung fähig, wenn die Werthe $f(x)$ als die Ordinaten einer Curve, oder präciser gesprochen als Ordinaten der Eckpunkte eines Polygones mit beliebig vielen Ecken dargestellt werden, denn die Bedingung der Darstellbarkeit durch eine Curve oder der Differentiirbarkeit braucht hier nicht erfüllt zu sein. Construirt man zu den Punkten

$$a,\quad a + \Delta x,$$
$$a + 2\Delta x \ldots (a + (n-1)\Delta x),\ x$$

die Ordinaten

$$f(a),\quad f(a + \Delta x),$$
$$f(a+2\Delta x) \ldots f(a+(n-1)\Delta x), f(x)$$

und verbindet die auf einander folgenden Endpunkte dieser Ordinaten durch Gerade, so ist der vom Polygon und den Coordinaten begrenzte Flächenraum $ABCD$ als Summe von Trapezen gleich:

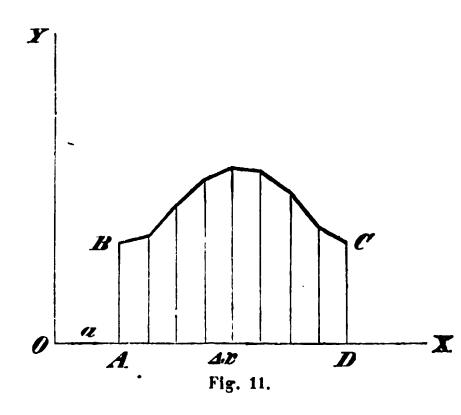


Fig. 11.

$$\Delta x \left[\frac{f(a)+f(a+\Delta x)}{2} + \frac{f(a+\Delta x)+f(a+2\Delta x)}{2} + \ldots \frac{f(a+(n-1)\Delta x)+f(x)}{2}\right]$$

oder gleich:

$$S - \frac{\Delta x}{2}\{f(a) - f(x)\},$$

unter S eine Productsumme der früheren Form verstanden. Lässt man nun Δx nach Null convergiren, d. h. geometrisch: construirt man die der Function f entsprechenden Polygone mit immer mehr Ecken, so geht S in den Werth des bestimmten Integrales:

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

über, während das zweite Glied der Gleichung nach Null convergirt.

Das bestimmte Integral ist also gleich der Maasszahl eines Flächeninhaltes, wenn die Werthe von f als Ordinaten von Punkten gedeutet werden; insbesondere des Flächeninhaltes, welcher von einem Curvenstücke, den Ordinaten seiner Endpunkte und der Abscissenaxe begrenzt wird, falls die Polygone der Function f nach einer bestimmten Curve convergiren*). Sind die Werthe von f im Intervall von a bis x von verschiedenen Vorzeichen, so misst das bestimmte Integral die Differenz von Flächen. Diese geometrische Anschauung vermittelt auch am einfachsten die Erkenntniss, dass das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ auch dann noch einen bestimmten endlichen Werth hat, wenn die Function f an beliebig vielen, aber immer noch zählbaren Stellen:

$$c_1, c_2 \ldots c_m$$

zwar endlich bleibt, jedoch discontinuirlich wird.

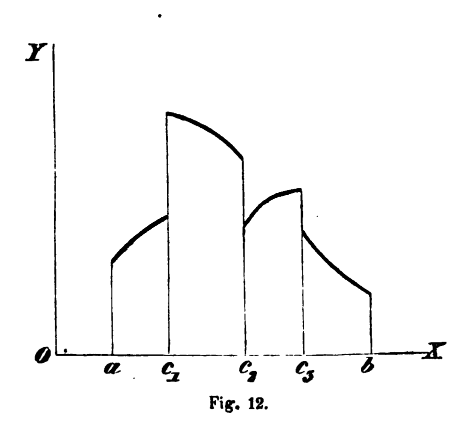


Fig. 12.

*) Aus der Lösung dieses geometrischen Problemes, den Flächeninhalt, welcher von einer beliebigen durch eine Function gegebenen Curve umschlossen wird, zu messen, ist die Integralrechnung gleichzeitig mit der Differentialrechnung (dem Probleme der Tangenten) hervorgegangen. Die ersten Sätze gaben auch hierüber Leibnitz und Newton in den §. 23 genannten Schriften; vorher schon hatten Fermat (1608—1665) und Wallis (1616—1703) den Grundgedanken einer Summation für die Flächenmessung bei den parabolischen Curven entwickelt und ausgeführt. Die weitere Ausbildung dieser Rechnung ist aber vornehmlich das Verdienst der Brüder Jacob (1654—1705) und Johann (1667—1748) Bernoulli

Es ist dann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1-0} f(x)\,dx + \int_{c_1+0}^{c_2-0} f(x)\,dx + \cdots \int_{c_{(m-1)}+0}^{c_m-0} f(x)\,dx + \int_{c_m+0}^{b} f(x)\,dx$$

eine bestimmte endliche Grösse, nämlich die Summe der Flächen, welche von den einzelnen Curvenstücken (Polygonen) und den Ordinaten ihrer Endpunkte begrenzt werden. Das unbestimmte Integral

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx + \text{Const.}$$

hat an einer solchen Unstetigkeitsstelle von f den vorwärts genommenen Differentialquotienten $f(c+0)$, denn es ist:

$$\frac{F(c+h)-F(c)}{h} = \frac{\int_a^{c+h} f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx}{h} = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)\,dx = f(c+\Theta h),$$

und den rückwärts genommenen Differentialquotienten $f(c-0)$, denn es ist:

$$\frac{F(c-h)-F(c)}{-h} = \frac{\int_a^{c-h} f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx}{-h} = +\frac{1}{h}\int_{c-h}^{c} f(x)\,dx = f(c-\Theta h),$$

wie bei der Problemstellung für die Function F verlangt wurde.

106. Die Formel

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx + \text{Const.}$$

ist in dem Sinne bisher abgeleitet worden, dass das unbestimmte Integral $F(x)$ aus dem bestimmten dargestellt werden soll; sie erfordert also die Berechnung des Grenzwerthes einer Summe mit beliebig vielen Summanden. Sie kann jedoch umgekehrt dazu dienen, diesen Summengrenzwerth zu berechnen, falls das unbestimmte Integral $F(x)$ bekannt ist. Da nun aber in der Differentialrechnung zu ganzen Classen von Functionen $F(x)$ ihre zugehörigen Ableitungen: $f(x) = F'(x)$ berechnet

---

in Basel, die sich in der Lösung von Aufgaben vermittelst derselben gegenseitig zu überbieten suchten. Joh. Bernoulli verfasste in den Jahren 1691 und 1692 zu Paris seine Lectiones mathematicae, das erste Lehrbuch der Integralrechnung, welches 1742 in der vollständigen Sammlung seiner Schriften im Druck erschien. Bei der Uebersendung derselben an Euler schrieb Joh. Bernoulli: „Exhibeo enim mathesin sublimem, qualis fuit in infantia, Tu vero eam nobis sistis in virili aetate.“ Euler's systematische Bearbeitung der Integralrechnung: Institutiones Calculi Integralis erschien 1768—70 in Petersburg.

worden sind, so ist auch umgekehrt zu jeder dieser Ableitungen $f(x)$ das zugehörige unbestimmte Integral $F(x)$ bekannt. Unter der Voraussetzung, dass dieses Integral im Intervalle von a bis b eindeutig und stetig ist, erhält man durch die Differenz der Functionswerthe das bestimmte Integral von a bis b. Diese Berechnung ist selbst dann noch gültig, wenn in dem Intervalle von a bis b die Function $f(x)$ unendliche Werthe annimmt, während $F(x)$ endlich bleibt, indem an einer solchen Stelle c gesetzt werden soll:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \operatorname{Lim}_{\text{für } \delta=0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx\right] = \operatorname{Lim}_{\text{für } \delta=0}[F(c-\delta)-F(a)] = F(c)-F(a),$$

und sie gilt auch für ein unendliches Intervall von a bis ∞, oder von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn die Function $F(x)$ auch an diesen Grenzen einen endlichen bestimmten Werth behält, wenn man die Definition einführt:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \operatorname{Lim}_{w=\infty}\left[\int_a^{w} f(x)\,dx\right] = \operatorname{Lim}_{w=\infty}[F(w)-F(a)] = F(\infty)-F(a).$$

Das unbestimmte Integral von $f(x)$ soll mit dem Symbol $\int f(x)\,dx + \text{const.}$ bezeichnet werden. Es ist also $\frac{d\int f(x)\,dx}{dx} = f(x)$; $f(x)$ heisst die zu integrirende Function, $F(x)$ die Integralfunction.

107. Fundamentalformeln:

1) $\frac{dx^{m+1}}{m+1} = x^m\,dx \quad (m \gtrless -1).$

2) $d(lx) = \frac{dx}{x}.$

3) $\frac{de^{mx}}{m} = e^{mx}\,dx.$

4) $\frac{d\sin mx}{m} = \cos mx\,dx.$

5) $-\frac{d\cos mx}{m} = \sin mx\,dx.$

6) $d\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos x^2}.$

7) $-d\operatorname{cotg} x = \frac{dx}{\sin x^2}.$

8) $d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

9) $-d\arccos x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

10) $d\operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}.$

11) $-d\operatorname{arccotg} x = \frac{dx}{1+x^2}.$

Daraus folgt umgekehrt

1) $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{const.} (m \gtrless -1).$

2) $\int \frac{dx}{x} = l(x) + \text{const.}$

3) $\int e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m} + \text{const.}$

4) $\int \cos mx\,dx = \frac{\sin mx}{m} + \text{const.}$

5) $\int \sin mx\,dx = -\frac{\cos mx}{m} + \text{const.}$

6) $\int \frac{dx}{\cos x^2} = \operatorname{tang} x + \text{const.}$

7) $\int \frac{dx}{\sin x^2} = -\operatorname{cotg} x + \text{const.}$ 10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + \text{const.}$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \text{const.}$ 11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arccotg} x + \text{const.}$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + \text{const.}$

Diese Formeln sagen nur in anderer Form dasselbe aus, was durch die ersten elf Gleichungen behauptet ist.

Hieraus können nun aber die bestimmten Integrale gewonnen werden, deren Gültigkeitsbereich bestimmt durch die Forderung, dass die Integralfunction reell, stetig und endlich bleibe, in den beistehenden Klammern angegeben ist; und die nun folgenden Gleichungen vermitteln eine neue Erkenntniss, indem sie die Berechnung der Grenzwerthe von Summen darstellen.

1) $\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$ $(m \gtrless -1,\ 0 < a < \infty,\ 0 < b < \infty)$

ist $m + 1 > 0$, so gilt die Formel auch für a oder b gleich Null, ist $m + 1 < 0$, so gilt die Formel auch für a oder b gleich ∞.

2) $\int_a^b \frac{dx}{x} = l\left(\frac{b}{a}\right)$ $(0 < a < \infty,\ 0 < b < \infty)$; $\int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = +\, l\left(\frac{b}{a}\right)$.

3) $\int_a^b e^{mx}\, dx = \frac{e^{mb} - e^{ma}}{m}$ $(-\infty \leqq a < +\infty,\ -\infty \leqq b < +\infty$ wenn $m > 0)$.

4) $\int_a^b \cos mx\, dx = \frac{\sin(mb) - \sin(ma)}{m}$ $(-\infty < a < +\infty.\ -\infty < b < +\infty)$,

5) $\int_a^b \sin mx\, dx = -\frac{\cos(mb) - \cos(ma)}{m}$ $(-\infty < a < +\infty,\ -\infty < b < +\infty)$.

6) $\int_a^b \frac{dx}{\cos x^2} = \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a$ (in jedem Intervall von a bis b, welches nicht ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ enthält).

7) $\int_a^b \frac{dx}{\sin x^2} = -\operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} a$ (in jedem Intervalle von a bis b, welches nicht π oder Vielfache von π enthält).

$$8) \text{ u. } 9) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin b - \arcsin a = -\arccos b + \arccos a.$$
$$(-1 \leqq a \leqq +1, \quad -1 \leqq b \leqq +1).$$

$$10) \text{ u. } 11) \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = -\operatorname{arccotg} b + \operatorname{arccotg} a$$
$$(-\infty \leqq a \leqq +\infty, \quad -\infty \leqq b \leqq +\infty).$$

108. Die Angabe des unbestimmten Integrales gelingt auch für Functionen, die aus den einfachen zusammengesetzt sind; hierzu dienen die allgemeinen Regeln, die sich aus den Regeln der Differentiation (§. 26) durch Umkehr ableiten lassen.

Ist

a) $$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \cdots + f_n(x)$$

so ist:

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)\,dx + \cdots \int f_n(x)\,dx,$$

d. h. das Integral einer Summe von Functionen ist gleich der Summe aus den Integralen der einzelnen Summanden. Der Beweis ergiebt sich durch Differentiation.

Ist

b) $F(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$, so ist $F'(x) = f(x) = \varphi(x)\psi'(x) + \psi(x)\varphi'(x)$,

also umgekehrt

$$\int \varphi(x)\psi'(x)dx + \int \psi(x)\varphi'(x)\,dx = \varphi(x)\,\psi(x).$$

Schreibt man diese Formel:

$$\int \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx = \varphi(x)\,\psi(x) - \int \psi(x)\,\varphi'(x)\,dx,$$

oder auch

$$\int \varphi(x)\,d[\psi(x)] = \varphi(x)\,\psi(x) - \int \psi(x)\,d[\varphi(x)],$$

so lehrt sie das Integral einer Function, welche aus zwei Factoren besteht, von denen sich das Integral des einen angeben lässt, auf ein anderes Integral zurückführen. Diese Reduction, das Verfahren der theilweisen Integration genannt, gewährt in vielen Fällen eine Vereinfachung des Problemes.

Specialsatz: Ist

$$F(x) = a\varphi(x), \text{ so ist } F'(x) = f(x) = a\varphi'(x),$$

also:

$$\int a\,\varphi'(x)\,dx = a\,\varphi(x) = a\int \varphi'(x)\,dx.$$

c) Führt man in die Formel

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

für x eine neue Variabele ein durch die Gleichung $x = \varphi(u)$, welche so geartet ist, dass den stetig auf einander folgenden Werthen von $x = a$ bis $x = b$ eindeutig stetig auf einander folgende Werthe von u entsprechen, wobei u keinen Wechsel der Zu- und Abnahme erfährt, so dass $\frac{du}{dx}$ nicht Null wird, so möge $F(x)$ den Werth $\Psi(u)$, $f(x)$ den Werth $\psi(u)$ erhalten. Alsdann besteht die Relation:

$$F'(x) = f(x) = \psi(u) = \frac{d\Psi(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

also:

$$\frac{d\Psi(u)}{du} = \psi(u)\frac{dx}{du} = \psi(u)\,\varphi'(u),$$

mithin ist $\Psi(u) = \int \psi(u)\,\varphi'(u)\, du$.

Die Substitution der Variabelen vermittelst der Gleichung $x = \varphi(u)$ führt die Bestimmung des Integrales von f auf die Ermittelung des Integrales $\int \psi(u)\varphi'(u)du$ zurück; bei zweckmässiger Wahl der Substitutionsformel kann dieses Integral einfacher zu ermitteln sein als das ursprüngliche.

Ist das ursprüngliche zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ zu nehmen, so ist das neue Integral mit den Grenzen u_a und u_b zu bilden, für welche $a = \varphi(u_a)$, $b = \varphi(u_b)$, so dass die Werthe von $x = a$ bis $x = b$ eindeutig auf die Werthe u_a bis u_b bezogen sind.

Ist dagegen die Beziehung zwischen x und u nicht umkehrbar eindeutig, so muss das gesammte Intervall in Theilintervalle zerlegt werden, bei denen eine gegenseitig eindeutige Beziehung sich herstellen lässt.

Ist z. B. $\int_0^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx$ vorgelegt (a und b positiv), und setzt man $ax + \frac{b}{x} = u$, so gehört zwar zu jedem Werthe von x eindeutig ein Werth u, aber während x von 0 bis ∞ läuft, erleidet u einen Wechsel der Ab- und Zunahme, so dass es anfänglich eine abnehmende, dann aber eine wachsende Function ist; zu jedem Werthe von u gehören zwei Werthe von x,

$$x = \frac{u}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{u^2 - 4ab}, \quad dx = \frac{du}{2a}\left[1 \pm \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4ab}}\right],$$

was man sich durch geometrische Zeichnung der Hyperbel veranschau-

lichen kann. Ermittelt man den Minimalwerth von u, so ist derselbe aus der Gleichung $\frac{du}{dx} = 0$, also $a - \frac{b}{x^2} = 0$ zu berechnen; es wird $x = +\sqrt{\frac{b}{a}}$, $u = 2\sqrt{ab}$.

Läuft x von Null bis $\sqrt{\frac{b}{a}}$, so erhält u die abnehmenden Werthe von ∞ bis $2\sqrt{ab}$ und es ist:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{2a}\int_{\infty}^{+2\sqrt{ab}} f(u)\left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4ab}}\right) du,$$

dagegen wird in dem Intervall von $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ bis ∞, u von $2\sqrt{ab}$ bis $+\infty$ wachsen, und also

$$\int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(u)\left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4ab}}\right) du.$$

Demnach folgt durch Summation:

$$\int_0^{\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(u) \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4ab}} du.$$

Die allgemeinen Sätze sollen im Folgenden auf verschiedene Functionen $f(x)$ angewandt werden, mit der Absicht die Bestimmung von $\int f(x)\, dx$ vermittelst der Fundamentalformeln zu erreichen.

Zweites Capitel.

Das unbestimmte Integral der rationalen algebraischen Functionen. Partialbruchzerlegung.*)

109. Das Integral der ganzen rationalen Function n^{ter} Ordnung:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$$

wird (nach Satz a) und b) und der Fundamentalformel I. des vorigen Paragraphen):

$$F(x) = \int f(x)\, dx = a_0 \int dx + a_1 \int x\, dx + a_2 \int x^2 dx + \cdots a^n \int x^n\, dx$$

$$= a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{Const.}$$

---

*) Leibnitz und Joh. Bernoulli. Acta erud. 1702—1703. Euler: Institutiones calculi integralis. Vol. I. Sect. I. Cap. I.

110. Eine gebrochene rationale Function:

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

in welcher ψ von der m^{ten}, φ von der n^{ten} Ordnung ist, lässt sich, falls $m \geqq n$ ist, stets zerlegen in eine ganze Function und eine echt gebrochene, d. h. in eine solche, in welcher die Ordnung des Zählers höchstens gleich $n - 1$ ist. Zu dem Zwecke hat man die Division mit dem Nenner $\varphi(x)$ auszuführen und dieselbe so lange fortzusetzen, bis die Ordnung des Restes kleiner als n wird. Da die Integration der ganzen Function geleistet ist, so handelt es sich darum, das Integral von der Form:

$$\int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\, dx$$

zu bestimmen, in welcher die Ordnung $m < n$ ist, und φ und ψ keine gemeinsame Wurzel besitzen.

Diese echt gebrochene Function kann in eine Summe von Brüchen zerlegt werden, deren Zähler constant und deren Nenner lineare Functionen oder Potenzen von solchen sind. (Partialbrüche.)

111. Es seien die n Verschwindungspunkte von

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + x^n$$

bezüglich $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ reell oder complex, aber zunächst sämmtlich von einander verschieden. (Der Coefficient der höchsten Potenz von x in φ ist gleich 1 vorausgesetzt, was sich durch Vorsetzen des ursprünglichen Factors vor den ganzen Quotienten und also auch vor das Integral stets erzielen lässt.) Die n Verschwindungspunkte werden als bekannt angenommen und $\varphi(x)$ wird aufgelöst in das Product:

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

Das Product aller Factoren mit Ausnahme des ersten bezeichne ich durch $\varphi_1(x)$, so dass

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)\, \varphi_1(x).$$

Alsdann erkennt man: Der Bruch $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ lässt sich nur auf eine einzige Weise zerlegen in die Form:

$$1) \qquad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)},$$

in welcher A_1 eine Constante, $\psi_1(x)$ eine ganze Function höchstens von der Ordnung $n - 2$ bedeuten soll. Denn es ist identisch:

$$\psi(x) = A_1\, \varphi_1(x) + (x - \alpha_1)\, \psi_1(x),$$

also:

$$2) \qquad \psi_1(x) = \frac{\psi(x) - A_1\, \varphi_1(x)}{x - \alpha_1}.$$

Damit nun dieses eine ganze Function höchstens von der Ordnung $n-2$ werde, muss der Zähler rechts durch $x-\alpha_1$ theilbar sein, d. h. für $x=\alpha_1$ verschwinden; daraus folgt:

$$3)\qquad 0=\psi(\alpha_1)-A_1\,\varphi_1(\alpha_1),\ \text{oder}\ A_1=\frac{\psi(\alpha_1)}{\varphi_1(\alpha_1)}.$$

Der Werth $\varphi_1(\alpha_1)=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)$ verschwindet nicht, weil alle Wurzeln α von einander verschieden sind; derselbe kann auch vermittelst der Ableitung von $\varphi(x)$ unter der Form $\varphi'(\alpha_1)$ geschrieben werden; denn es ist

$$\operatorname{Lim}\frac{\varphi(x)}{x-\alpha_1}=\varphi'(\alpha_1)\qquad\text{für } x=\alpha_1$$

sonach:

$$4)\qquad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\frac{\psi(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)}\,\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}.$$

In gleicher Weise fortfahrend wird man den Quotienten $\frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}$ zerlegen in die Form:

$$\frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}=\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\frac{\psi_2(x)}{\varphi_2(x)}\qquad \varphi_1(x)=(x-\alpha_2)\,\varphi_2(x),$$

ferner:

$$\frac{\psi_2(x)}{\varphi_2(x)}=\frac{A_3}{x-\alpha_3}+\frac{\psi_3(x)}{\varphi_3(x)}\qquad \varphi_2(x)=(x-\alpha_3)\,\varphi_3(x).$$

In dem zweiten Quotienten der rechten Seite ist die Ordnung des Zählers mindestens um eine Einheit kleiner als die des Nenners, so dass sich schliesslich:

$$\frac{\psi_{n-2}(x)}{\varphi_{n-2}(x)}=\frac{A_{n-1}}{x-\alpha_{n-1}}+\frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

ergiebt, wobei A_{n-1} und A_n Constante bedeuten; demnach ist bewiesen: Die echt gebrochene Function lässt sich nur auf eine einzige Weise in Partialbrüche zerlegen von der Form:

$$5)\qquad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\cdots\frac{A_n}{x-\alpha_n}.$$

Auch für die Coefficienten A kann nunmehr eine einheitliche Bestimmungsweise gegeben werden, ganz abgesehen von der Reihenfolge, nach welcher sie berechnet werden. Multiplicirt man nämlich beide Seiten der Gleichung 5) mit $\varphi(x)$, so wird:

$$\psi(x)=\frac{A_1}{x-\alpha_1}\,\varphi(x)+\frac{A_2}{x-\alpha_2}\,\varphi(x)+\cdots\frac{A_n}{x-\alpha_n}\,\varphi(x).$$

Wird für $\varphi(x)$ überall der Productwerth substituirt, so heben sich die linearen Factoren des Nenners auf der rechten Seite fort; und setzt man für x irgend einen der Verschwindungswerthe α_k von φ, so

fallen alle Glieder mit dem Factor $x - \alpha_k$ fort, es bleibt das Glied mit dem Coefficienten A_k nach; d. h. es wird

$$\psi(\alpha_k) = A_k \cdot \underset{\text{für } x=\alpha_k}{\mathrm{Lim}} \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_k} = A_k \varphi'(\alpha_k),$$

also

$$A_k = \frac{\psi(\alpha_k)}{\varphi'(\alpha_k)}. \tag{6}$$

$\varphi'(\alpha_k)$ kann nicht Null werden, weil $\varphi(x) = 0$ lauter verschiedene Wurzeln hat. Umgekehrt erkennt man: Besitzt die Gleichung $\varphi(x) = 0$ zwei gleiche Wurzeln, so verschwindet für diesen Wurzelwerth auch $\varphi'(x)$.

Mithin ist

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\psi(\alpha_k)}{\varphi'(\alpha_k)} \cdot \frac{1}{x-\alpha_k},$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx = \frac{\psi(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)} \int \frac{dx}{x-\alpha_1} + \frac{\psi(\alpha_2)}{\varphi'(\alpha_2)} \int \frac{dx}{x-\alpha_2} + \cdots \frac{\psi(\alpha_n)}{\varphi'(\alpha_n)} \int \frac{dx}{x-\alpha_n}.$$

Das Integral $\int \frac{dx}{x-\alpha_k}$ wird durch die Substitution $x - \alpha_k = z$, $dx = dz$ auf das Fundamentalintegral $\int \frac{dz}{z} = l(z)$ gebracht, so dass die Schlussformel lautet:

$$\text{I.} \quad \int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} dx = \frac{\psi(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)} l(x-\alpha_1) + \frac{\psi(\alpha_2)}{\varphi'(\alpha_2)} l(x-\alpha_2) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\psi(\alpha_n)}{\varphi'(\alpha_n)} l(x-\alpha_n) + \text{Const.}$$

Beispiel:

$$\int \frac{x^3+2}{(x-1)(x+1)x} dx = \int dx + \int \frac{x+2}{(x-1)(x+1)x} dx =$$
$$= x + \frac{3}{2} l(x-1) + \frac{1}{2} l(x+1) - 2l(x) + \text{Const.}$$

Das bestimmte Integral kann aus dieser Formel entnommen werden für jedes endliche Intervall, zu welchem die Verschwindungspunkte -1, 0, $+1$ nicht gehören.

$$\int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \frac{i+1}{2i} l(x-i) + \frac{i-1}{2i} l(x+i) + \text{C.} =$$
$$= \frac{1}{2} l(x^2+1) - \frac{i}{2} l\left(\frac{x-i}{x+i}\right) + \text{C.}$$

Die Logarithmen complexer Grössen sind vieldeutig, unterscheiden sich aber nur um eine additive imaginäre Constante, so dass es für das unbestimmte Integral gleichgültig ist, welcher Werth den einzelnen Logarithmen beigelegt wird. Der Uebergang zum bestimmten Integrale

durch Bildung der Differenz zweier Functionswerthe erfordert, dass der Werth der Function an der einen Stelle durch continuirlichen Uebergang aus dem Werthe an der andern Stelle hervorgehe (siehe den Schluss des nächsten Paragraphen).

112. Sind die Coefficienten von φ reell, so kann $\varphi(x)$ zwar complexe Wurzeln enthalten, doch sind dieselben paarweise conjugirt (§. 90). Man kann das Auftreten complexer Werthe, falls auch ψ reelle Coefficienten hat, in der Schlussformel alsdann vermeiden, dadurch dass man die auf die conjugirt imaginären Wurzeln bezüglichen Partialbrüche vereinigt.

Seien $\alpha + i\beta$ und $\alpha - i\beta$ die beiden conjugirten Wurzeln, so ist

$$\frac{\psi(\alpha+i\beta)}{\varphi'(\alpha+i\beta)} \text{ eine complexe Grösse: } M + iN,$$

und

$$\frac{\psi(\alpha-i\beta)}{\varphi'(\alpha-i\beta)} \text{ der conjugirte Werth: } M - iN;$$

also wird:

$$\frac{M+iN}{x-(\alpha+i\beta)} + \frac{M-iN}{x-(\alpha-i\beta)} = \frac{2M(x-\alpha)-2N\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

ein reeller Quotient. Es lassen sich die Constanten des Zählers auch direct bestimmen, indem man von der Identität ausgeht:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{Px+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}, \qquad \varphi(x) = ((x-\alpha)^2+\beta^2)\varphi_1(x),$$

folglich:

$$\psi(x) = (Px+Q)\varphi_1(x) + \psi_1(x)((x-\alpha)^2+\beta^2).$$

Substituirt man für x die beiden Werthe $\alpha \pm i\beta$, so folgt:

$$P(\alpha \pm i\beta) + Q = \frac{\psi(\alpha \pm i\beta)}{\varphi_1(\alpha \pm i\beta)}.$$

Der reelle und imaginäre Theil dieser Gleichungen liefern zwei Gleichungen zur Bestimmung von P und Q.

Das Integral:

$$\int \frac{Px+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx$$

ist zerlegbar in:

$$P\int\frac{(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + (P\alpha+Q)\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Das erste derselben wird durch die Substitution: $(x-\alpha)^2+\beta^2 = z$, $(x-\alpha)\,dx = \frac{1}{2}\,dz$ verwandelt in:

$$P\int\frac{(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{P}{2}\int\frac{dz}{z} = \frac{P}{2}\,l(z) = \frac{P}{2}\,l((x-\alpha)^2+\beta^2).$$

Das zweite lässt sich durch die Substitution $\frac{x-\alpha}{\beta} = z$, $dx = \beta\,dz$ auf ein Fundamentalintegral reduciren;

$$\frac{P\alpha+Q}{\beta^2}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}=\frac{P\alpha+Q}{\beta}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{P\alpha+Q}{\beta}\operatorname{arctg}z=\frac{P\alpha+Q}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Sonach ist:

$$\text{II.}\quad \int\frac{Px+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx=\frac{P}{2}l((x-\alpha)^2+\beta^2)+\frac{P\alpha+Q}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{x-\alpha}{\beta}+C.$$

Das obige Beispiel liefert bei dieser Behandlungsweise den Werth:

$$\int\frac{x+1}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\,l\,(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+C.$$

Hier kann auch ohne weiteres das bestimmte Integral für jedes endliche reelle Intervall nach der Formel berechnet werden:

$$\int\limits_a^b\frac{x+1}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\,l\frac{b^2+1}{a^2+1}+\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}a.$$

Aus den beiden verschiedenen Formen, welche für das nämliche Integral gefunden wurden, erkennt man, dass

$$\operatorname{arctg}x=-\frac{i}{2}\,l\left(\frac{x-i}{x+i}\right)+\text{Const.}$$

sein muss, für alle Werthe von x. In der That ist (§. 74):

$$l\frac{x-i}{x+i}=l\frac{x^2-1-2xi}{x^2+1}=-i\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}+C.=2i\operatorname{arctg}x+C.$$

Beispiel:

$$\int\frac{dx}{a+2bx+cx^2}=c\int\frac{dx}{(cx+b)^2+(ac-b^2)}=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{cx+b}{\sqrt{ac-b^2}}+C.$$

Dies ist eine reelle Darstellung, falls $ac-b^2>0$, d. h. wenn die Wurzeln complex sind.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a+2bx+cx^2}=\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$$ ($ac-b^2>0$, im andern Falle gilt diese Formel nicht).

113. Enthält die Function φ vielfache Wurzeln:

$$\varphi(x)=(x-\alpha)^{\lambda_1}(x-\beta)^{\lambda_2}+\ldots(x-\varkappa)^{\lambda_m},\quad \lambda_1+\lambda_2+\ldots\lambda_m=n,$$

so ist die angewandte Partialbruchzerlegung nicht mehr möglich; dagegen besteht hier der Satz: Der Quotient $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ ist immer und nur auf eine einzige Weise in die Form zerlegbar:

$$1)\qquad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_0}{(x-\alpha)^{\lambda_1}}+\frac{\psi_1(x)}{(x-\alpha)^{\lambda_1-1}\varphi_1(x)},\quad \varphi(x)=(x-\alpha)^{\lambda_1}\varphi_1(x),$$

in welcher A_0 eine Constante, $\psi_1(x)$ eine ganze Function höchstens vom Grade $n-2$ bedeutet. Dies folgt aus der Identität:

$$2)\quad \psi(x)=A_0\varphi_1(x)+\psi_1(x)(x-\alpha)\quad\text{oder:}\quad \psi_1(x)=\frac{\psi(x)-A_0\varphi_1(x)}{x-\alpha}.$$

Damit der Quotient eine ganze Function werde, muss sein Zähler für $x = \alpha$ verschwinden; also ist

$$3) \qquad A_0 = \frac{\psi(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)} = \frac{\psi(\alpha)}{\varphi^{\lambda_1}(\alpha)},$$

unter $\varphi^{\lambda_1}(\alpha)$ den Werth der Ableitung von der Ordnung λ_1 verstanden; die Constante A_0 ist weder Null noch unendlich.

Wendet man dasselbe Verfahren auf den zweiten Quotienten auf der rechten Seite der Gleichung 1) an, so wird man erhalten:

$$\frac{\psi_1(x)}{(x-\alpha)^{\lambda_1-1}\varphi_1(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda_1-1}} + \frac{\psi_2(x)}{(x-\alpha)^{\lambda_1-2}\varphi_1(x)}, \quad A_1 = \frac{\psi_1(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}.$$

Der Werth von A_1 kann aber auch verschwinden, wenn $\psi_1(\alpha) = 0$ ist. Sonach erhält man bei Fortsetzung dieser Methode die Gleichung:

$$4) \quad \frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^{\lambda_1}\varphi_1(x)} = \frac{A_0}{(x-\alpha)^{\lambda_1}} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda_1-1}} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{\lambda_1-2}} + \cdots \frac{A_{\lambda_1-1}}{x-\alpha} + \frac{\chi(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Der Quotient $\frac{\chi(x)}{\varphi_1(x)}$, in welchem die Ordnung des Zählers kleiner ist, als die des Nenners, lässt sich in Bezug auf die vielfachen Factoren von φ_1 nach der nämlichen Regel zerlegen, so dass allgemein und nur auf eine einzige Weise die Gleichung besteht:

$$5) \qquad \begin{aligned} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} &= \frac{A_0}{(x-\alpha)^{\lambda_1}} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda_1-1}} + \cdots \frac{A_{\lambda_1-1}}{(x-\alpha)} \\ &+ \frac{B_0}{(x-\beta)^{\lambda_2}} + \frac{B_1}{(x-\beta)^{\lambda_2-1}} + \cdots \frac{B_{\lambda_2-1}}{x-\beta} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{K_0}{(x-\varkappa)^{\lambda_m}} + \frac{K_1}{(x-\varkappa)^{\lambda_m-1}} + \cdots \frac{K_{\lambda_m-1}}{x-\varkappa}. \end{aligned}$$

Die Constanten A_0, $B_0 \ldots K_0$ sind von Null verschieden; die übrigen können auch verschwinden.

Die Bestimmung der Coefficienten A in der Gleichung 4) erfolgt am besten, indem man $x - \alpha = h$ setzt und beachtet, dass

$$\frac{\psi(\alpha+h)}{\varphi_1(\alpha+h)} = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots A_{\lambda_1-1}h^{\lambda_1-1} + \frac{\chi(\alpha+h)}{\varphi_1(\alpha+h)} \cdot h^{\lambda_1}$$

wird; es sind also A_0, $A_1 \ldots A_{\lambda_1-1}$ die λ_1 ersten Coefficienten, die sich bei Entwickelung des links stehenden Quotienten nach wachsenden Potenzen von h ergeben; denkt man sich die Entwickelung nach der Taylor'schen Reihe ausgeführt, so folgt, wenn man $\frac{\psi(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}$ mit $\Phi_1(\alpha)$ bezeichnet:

$$A_0 = \Phi_1(\alpha), \quad A_1 = \Phi_1'(\alpha), \quad A_2 = \frac{1}{2!}\Phi_1''(\alpha), \ldots A_{\lambda_1-1} = \frac{1}{\lambda_1-1!}\Phi_1^{\lambda_1-1}(\alpha).$$

Sonach ist im allgemeinen Falle;

$$\int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} dx = \sum_{j=0}^{j=\lambda_1-1} A_j \int \frac{dx}{(x-\alpha)^{\lambda_1-j}} + \sum_{j=0}^{j=\lambda_2-1} B_j \int \frac{dx}{(x-\beta)^{\lambda_2-j}} + \cdots$$
$$+ \cdots \sum_{j=0}^{j=\lambda_m-1} K_j \int \frac{dx}{(x-\varkappa)^{\lambda_m-j}}.$$

Es ist aber

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^\lambda} = -\frac{1}{\lambda-1} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{\lambda-1}} \quad (\text{wenn } \lambda > 1)$$
$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = l(x-\alpha),$$

also:

$$\text{III.} \quad \int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \sum_{j=0}^{j=\lambda_1-2} - \frac{A_j}{\lambda_1-j-1} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{\lambda_1-j-1}} + A_{\lambda_1-1} l(x-\alpha)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$
$$+ \sum_{j=0}^{j=\lambda_m-2} - \frac{K_j}{\lambda_m-j-1} \cdot \frac{1}{(x-\varkappa)^{\lambda_m-j-1}} + K_{\lambda_m-1}\, l(x-\varkappa).$$

Das Integral jeder rationalen algebraischen Function $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ ist selbst durch rationale algebraische und durch logarithmische Functionen darstellbar; die explicite Darstellung erfordert die Bestimmung der Verschwindungswerthe von $\varphi(x)$; an Stelle der logarithmischen Function können auch die cyclometrischen eingeführt werden.

Beispiel: $\quad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x^4-3x^3-x+21}{(x+1)^3(x-2)^2}.$

Setzt man $x = -1 + h$, so wird

$$\frac{\psi(-1+h)}{\varphi_1(-1+h)} = \frac{27-18h+21h^2-11h^3+2h^4}{9-6h+h^2} = 3 + 2h^2 + \frac{h^3}{9-6h+h^2},$$
$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{3}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)} + \frac{1}{(x-2)^2},$$
$$\int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} dx = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + 2l(x+1) - \frac{1}{(x-2)} + C.$$

114. Auch in dem zuletzt behandelten allgemeinen Falle ist es möglich, das Auftreten complexer Grössen in dem Schlussresultate zu umgehen, wenn die Coefficienten von φ und ψ zwar reell sind, jedoch die Wurzeln von φ complex werden; es sind wiederum die zu conjugirt imaginären Wurzeln gehörigen Partialbrüche zu vereinen. Man geht hierbei direct von dem Satze aus: Ist

$$\varphi(x) = ((x-\alpha)^2 + \beta^2)^\lambda \varphi_1(x),$$

so lässt sich nur auf eine einzige Weise die Zerlegung:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{P_0 x + Q_0}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^\lambda} + \frac{\psi_1(x)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{\lambda-1}\varphi_1(x)}$$

ausführen, in welcher P und Q reelle Constante bedeuten.

Es muss

$$\psi(x) = (P_0 x + Q_0)\varphi_1(x) + \psi_1(x)\,[(x-\alpha)^2 + \beta^2]$$

werden, d. h.

$$P_0(\alpha \pm i\beta) + Q_0 = \frac{\psi(\alpha \pm i\beta)}{\varphi_1(\alpha \pm i\beta)}.$$

Demnach wird:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{P_0 x + Q_0}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^\lambda} + \frac{P_1 x + Q_1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{\lambda-1}} + \cdots \frac{P_{\lambda-1}x + Q_{\lambda-1}}{(x-\alpha)+\beta^2} + \frac{\chi(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Ein Integral von der Form:

$$\int \frac{(Px+Q)\,dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^\lambda} \qquad (\lambda > 1)$$

besteht aus den Theilen:

$$P\int \frac{(x-\alpha)dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^\lambda} + (P\alpha + Q)\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^\lambda}.$$

Das erste derselben hat den Werth:

$$P\int \frac{(x-\alpha)\,dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^\lambda} = -\frac{P}{2\lambda-2}\cdot\frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{\lambda-1}}.$$

Das zweite Integral verwandele man durch die Substitution $(x-\alpha) = y$ in:

$$\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^\lambda} = \int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^\lambda}.$$

Da nun:

$$d\left[\frac{y}{(y^2+\beta^2)^{\lambda-1}}\right] = \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{\lambda-1}} - 2(\lambda-1)\frac{y^2\,dy}{(y^2+\beta^2)^\lambda}$$

$$= \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{\lambda-1}} - 2(\lambda-1)\frac{(y^2+\beta^2)-\beta^2}{(y^2+\beta^2)^\lambda}\,dy$$

$$= -(2\lambda-3)\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{\lambda-1}} + (2\lambda-2)\beta^2\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^\lambda},$$

so gewinnt man die Formel:

$$\text{IV.} \qquad \int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^\lambda} = \frac{1}{\beta^2(2\lambda-2)}\,\frac{y}{(y^2+\beta^2)^{\lambda-1}} + \frac{2\lambda-3}{\beta^2(2\lambda-2)}\int\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{\lambda-1}}.$$

Die successive Andeutung dieser Recursionsformel also:

$$\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{\lambda-1}} = \frac{1}{\beta^2(2\lambda-4)}\,\frac{y}{(y^2+\beta^2)^{\lambda-2}} + \frac{2\lambda-5}{\beta^2(2\lambda-4)}\int\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{\lambda-2}} \quad \text{u. s. w.}$$

führt die Entwickelung des vorgelegten Integrals auf algebraische Functionen und auf das Integral:

$$\int \frac{dy}{y^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\,\text{arctg}\,\frac{y}{\beta} + \text{C}.$$

zurück.

Beispiel:

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}\,\text{arctg}\,x + C.$$

115. Das Integral:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n + e^{\alpha i}} \quad *)$$

$$i = \sqrt{-1}, \qquad m-1 < n, \qquad -\pi \leq \alpha \leq +\pi.$$

Die n Wurzeln des Nenners sind complex und sämmtlich von einander verschieden.

$$x = \sqrt[n]{-e^{\alpha i}} = e^{i\frac{\alpha+(2k+1)\pi}{n}} = \cos\left(\frac{\alpha+(2k+1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+(2k+1)\pi}{n}\right)$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1.$$

Demnach wird der constante Zähler eines Partialbruches:

$$A_k = \frac{1}{n}\,e^{i(m-n)\frac{\alpha+(2k+1)\pi}{n}} = -\frac{1}{ne^{\left(1-\frac{m}{n}\right)\alpha i}}\,e^{(2k+1)\frac{m\pi i}{n}},$$

also:

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{x^n+e^{\alpha i}} = -\frac{1}{ne^{\left(1-\frac{m}{n}\right)\alpha i}}\sum_{k=0}^{k=n-1} e^{(2k+1)\frac{m\pi i}{n}}\,l\left(x - e^{i\frac{\alpha+(2k+1)\pi}{n}}\right) + C.$$

Trennt man den Logarithmus der complexen Grösse in seinen reellen und imaginären Bestandtheil (x reell gedacht), so folgt

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{x^n+e^{\alpha i}} = -\frac{1}{ne^{\left(1-\frac{m}{n}\right)\alpha i}}\sum_{k=0}^{k=n-1} e^{(2k+1)\frac{m\pi i}{n}}\,(P_k + iQ_k) + C.$$

wobei (§. 74):

$$P_k = \frac{1}{2}\,l\left(x^2 - 2x\cos\frac{\alpha+(2k+1)\pi}{n} + 1\right)$$

$$Q_k = \text{arctg}\,\frac{\sin\frac{\alpha+(2k+1)\pi}{n}}{\cos\frac{\alpha+(2k+1)\pi}{n} - x}$$

(die Vielfachen von πi können zur Constante gezogen werden).

Es soll das bestimmte Integral zwischen den Grenzen Null und ∞ ermittelt werden, wenn alle Wurzeln des Nenners complex oder negativ sind, also $-\pi < \alpha < +\pi$. Zu dem Zwecke hat man die Werthe

---

*) Euler: Inst. calculi integr. Vol. I. Cap. I. §. 77—80. Cap. VIII. §. 351—355. Dirichlet: Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale. Bearbeitet von Meyer. Leipzig 1871. §. 27.

von P_k und Q_k an den Grenzen Null und ∞ zu bestimmen, doch müssen in dem ganzen Verlaufe von $x = 0$ bis $x = \infty$ P_k und Q_k stetig bleiben.

Der Werth jedes P an der Stelle $x = 0$ ist Null, er wächst mit wachsenden Werthen von x continuirlich. Zerlegt man aber, da $x^2 > 2x \cos\frac{\alpha+(2k+1)\pi}{n} - 1$:

$$P_k = \frac{1}{2}\, l(x^2) + \frac{1}{2}\, l\left(1 - \frac{2x\cos\frac{\alpha+2(k-1)\pi}{n} - 1}{x^2}\right)$$

und vereinigt alle mit $\frac{1}{2}\, l(x^2)$ multiplicirten Glieder in der Summe, so liefern dieselben den Werth

$$\frac{1}{2}\, l(x^2) \sum_{k=0}^{k=n-1} e^{(2k+1)\frac{m\pi i}{n}} = \frac{1}{2}\, l(x^2)\, \frac{1-e^{2n\frac{m\pi i}{n}}}{1-e^{\frac{2m\pi i}{n}}} \cdot e^{\frac{m\pi i}{n}} = 0;$$

diese Formel ist nicht mehr giltig, wenn $m = n$ ist. Alsdann wird das Integral mit unendlichen Grenzen nicht mehr endlich; wir führen also die Voraussetzung ein, dass m höchstens gleich $n - 1$ ist.

Es kommen nunmehr die zweiten Theile von P_k bei der Summenbildung allein in Betracht, und diese convergiren für $x = \infty$ nach Null.

Zur Bestimmung des Werthes Q_k bemerke man, dass

$$\frac{\alpha+(2k+1)\pi}{n} = \mu \quad < 2\pi$$

für alle Werthe von $k = 0, 1 \ldots n-1$, weil $\alpha < \pi$ angenommen wurde. Für $x = 0$ ist $Q_k = \operatorname{arctg}(\operatorname{tang}\mu)$; es möge gleich μ gesetzt werden, in welchem Quadranten dieses auch liegen mag.

Liegt μ im ersten Quadranten ($\cos\mu > 0$, $\sin\mu > 0$), so wächst mit wachsenden Werthen von x der arctg, wird für $x = \cos\mu$ gleich $+\frac{\pi}{2}$, für grössere Werthe von x wird das Argument negativ, für $x = \infty$ ist $Q_k = \pi$.

Liegt μ im zweiten Quadranten ($\cos\mu < 0$, $\sin\mu > 0$), so bleibt das Argument durchweg negativ, für $x = \infty$ ist $Q_k = \pi$.

Liegt μ im dritten Quadranten ($\cos\mu < 0$, $\sin\mu < 0$), so bleibt das Argument durchweg positiv, für $x = \infty$ ist $Q_k = \pi$.

Liegt μ im vierten Quadranten ($\cos\mu > 0$, $\sin\mu < 0$), so nimmt mit wachsenden Werthen von x die Function arctang ab, wird für $x = \cos\mu$ gleich $\frac{3\pi}{2}$, für grössere Werthe von x kleiner als $\frac{3\pi}{2}$, für $x = \infty$ gleich π. Demnach ist:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n + e^{\alpha i}} = -\frac{i}{n e^{\alpha i}} \sum_{k=n}^{k=n-1} \left[\pi - \frac{\alpha+(2k+1)\pi}{n}\right] e^{\frac{\alpha+(2k+1)\pi}{n} m i}.$$

Die Summation wird folgendermassen ausgeführt: es ist für jedes $\lambda < 2\pi$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} e^{k\lambda i} = \frac{e^{n\lambda i}-1}{e^{\lambda i}-1}, \qquad \sum_{k=0}^{k=n-1} k e^{k\lambda i} = \frac{n e^{n\lambda i}(e^{\lambda i}-1) - e^{\lambda i}(e^{n\lambda i}-1)}{(e^{\lambda i}-1)^2}.$$

Die zweite Formel ergiebt sich durch Differentiation der ersten nach λ. Für

$$\lambda = \frac{2m\pi}{n}$$

folgt:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} e^{\frac{2km\pi i}{n}} = \frac{e^{2m\pi i}-1}{e^{\frac{2m\pi i}{n}}-1} = 0, \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} k e^{\frac{2km\pi i}{n}} = \frac{n}{e^{\frac{2m\pi i}{n}}-1} = \frac{n e^{-\frac{m\pi i}{n}}}{2i \sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Demnach wird:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n+e^{\alpha i}} = \frac{2\pi i e^{\frac{(\alpha+\pi)mi}{n}}}{n^2 e^{\alpha i}}, \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} k e^{\frac{2km\pi i}{n}} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{e^{-\left(1-\frac{m}{n}\right)\alpha i}}{\sin\frac{m\pi}{n}} \quad (m < n).$$

Substituirt man in dieser Formel z statt x^n und bezeichnet man den echten rationalen Bruch $\frac{m}{n}$ mit a, so erhält man die für die Theorie der bestimmten Integrale wichtige Fundamentalformel:

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{z+e^{\alpha i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi} e^{(a-1)\alpha i} \text{ *)} \quad -\pi < \alpha < +\pi.$$

116. Auf die Form eines rationalen Integrals wird ein Ausdruck von der Form:

$$\int f(x^a, x^b, \ldots x^l)\,dx,$$

in welchem $a, b \ldots l$ rationale Brüche, das Functionszeichen f eine rationale algebraische Verbindung der angegebenen Grössen bezeichnen durch eine einfache Substitution gebracht**). Nennt man m das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner von $a, b \ldots l$ und setzt

$$x = z^m, \qquad dx = m z^{m-1}\,dz,$$

so wird:

$$\int f(x^a, x^b, \ldots x^l)\,dx = m\int f(z^{am}, z^{bm}, \ldots z^{lm})\, z^{m-1}\,dz$$

das Integral einer rationalen Function.

---

*) Weitere Folgerungen aus dieser Formel sind in §. 159 gegeben.

**) Euler: Inst. calc. integ. Cap. I. §. 27.

Beispiel:

$$\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = 6\int \frac{1+z^3-z^4}{1+z^2}\,z^5 dz \qquad z = x^{\frac{1}{6}}$$

$$= 6\int\left(-z^7+z^6+z^5-z^4+z^2-1+\frac{1}{1+z^2}\right)dz$$

$$= -\frac{3}{4}z^8+\frac{6}{7}z^7+z^6-\frac{6}{5}z^5+2z^3-6z+6\,\mathrm{arctg}\,z+C.$$

und durch Substitution für z:

$$\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = -\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+$$
$$+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

Drittes Capitel.

Das Integral der expliciten irrationalen Functionen.

117. Die zu integrirende Function heisst eine explicite irrationale, wenn sie ausser ganzen oder gebrochenen Potenzen der Variabelen x (siehe den vorigen Paragraph) Polynome in x enthält, welche selbst mit gebrochenen Exponenten behaftet sind. Als einfachster Fall dieser Art stellt sich das zweigliedrige lineare Polynom dar:

$$\int f\left(x, (a+bx)^{\frac{p}{q}}\right)dx,$$

wobei p und q ganze relativ prime Zahlen bezeichnen sollen. Dieses Integral wird in ein rationales verwandelt durch die Substitution:

$$a+bx = z^q, \qquad b\,dx = qz^{q-1}dz,$$

also

$$\int f\left(x, (a+bx)^{\frac{p}{q}}\right)dx = \frac{q}{b}\int f\left(\frac{z^q-a}{b},\, z^p\right)z^{q-1}dz.$$

Als allgemeines binomisches Integral bezeichnet man ein Integral von der Form:

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx,$$

unter m, n, p beliebige rationale Brüche verstanden*). Die Zahlen m und n können aber ohne Einschränkung der Allgemeinheit stets als ganze Zahlen vorausgesetzt werden; denn sind sie Brüche, so setze man statt x, z^ν, unter ν das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ihrer Nenner verstanden. Auch kann man n stets positiv annehmen, anderen Falles schreibe man:

*) Euler, a. a. O. Cap. II. §. 103—124.

$$x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = x^{m+np-1}(ax^{-n}+b)^p dx.$$

Ist nun auch p eine ganze Zahl, so ist die Function ohne weiteres rational; ist aber p gebrochen, so kann die Function in gewissen Fällen auf die Form einer rationalen gebracht werden. Man substituire:

$$a+bx^n = z, \quad x = \left[\frac{z-a}{b}\right]^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{bn}\left[\frac{z-a}{b}\right]^{\frac{1}{n}-1} dz,$$

so folgt:

$$\frac{1}{bn}\int\left[\frac{z-a}{b}\right]^{\frac{m}{n}-1} z^p dz, \text{ oder auch: } \frac{1}{bn}\int\left[\frac{1-az^{-1}}{b}\right]^{\frac{m}{n}-1} z^{p+\frac{m}{n}-1} dz.$$

Ist $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl, so verwandelt sich der erste Ausdruck durch die Substitution $z = t^q$ in einen rationalen, wobei q den Nenner des Bruches p bedeutet.

Ist $p+\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl, so verwandelt sich der zweite Ausdruck in einen rationalen durch die Substitution:

$$\frac{1-az^{-1}}{b} = t^n.$$

118. Lässt sich nun auch das binomische Integral nur unter diesen bestimmten Bedingungen durch explicite irrationale algebraische Functionen und durch logarithmische darstellen*), so kann doch in allen Fällen seine Integration auf die Integration gewisser einfacher Formen reducirt werden.

Man betrachte das Differential $x^{m-1}(a+bx^n)^p dx$ als Product von:

$$\frac{d(x^m)}{m}\cdot(a+bx^n)^p \quad \text{oder auch: } \frac{d(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}\cdot x^{m-n},$$

so wird nach dem Verfahren der theilweisen Integration:

$$\text{I. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m} - \frac{bpn}{m}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1} dx,$$

$$\text{II. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n}{nb(p+1)}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1} dx.$$

Diese Formeln kann man so abändern, dass in den Integralen der rechten Seite immer nur der eine der Exponenten geändert erscheint. In der Gleichung I. schreibe man:

$$\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1} dx = \frac{1}{b}\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx - \frac{a}{b}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1} dx,$$

in der Gleichung II.:

$$\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1} dx = a\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p dx + b\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx$$

---

*) Tschebychef, Sur l'intégration de différentielles irrationnelles. Liouville Journal T. XVIII. 1853.

und vereinige jedesmal das Integral der rechten Seite mit dem ihm gleichen der linken; es wird:

$$\text{III.} \quad \int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m+pn} + \frac{apn}{m+pn}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}dx,$$

$$\text{IV.} \quad \int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(np+m)b} - \\ - \frac{(m-n)a}{(np+m)b}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p dx.$$

Die Formeln III. und IV. vermindern also die Exponenten n und m um die Grössen 1 und n. Die Formeln lassen sich auch so betrachten, dass sie die rechts stehenden Integrale auf die links stehenden zurückführen. Um eine einheitliche Formulirung zu gewinnen, löse man die Gleichung nach den rechts stehenden Integralen auf, nachdem man zuvor in III. statt $p-1$ den Werth p, und in IV. statt $m-n$ den Werth m geschrieben, so ergiebt sich:

$$\text{V.} \quad \int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = -\frac{x^m(a+bx^n)^{p-1}}{an(p+1)} + \\ + \frac{m+n(p+1)}{an(p+1)}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1}dx,$$

$$\text{VI.} \quad \int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{am} - \\ - \frac{(np+m+n)b}{am}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p dx.$$

Die vorstehenden Reductionsformeln werden unbrauchbar, wenn die in den Nennern stehenden Grössen verschwinden; in allen diesen Fällen wird aber das Integral durch die früher angegebenen Substitutionen rational; bemerkenswerth sind hierbei nur die Fälle $m=0$ und $np+m=0$; es wird:

$$\int \frac{(a+bx^n)^p}{x}dx = \frac{1}{n}\int \frac{z^p}{z-a}dz \qquad (a+bx^n=z)$$

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}}dx = \frac{1}{bn}\int \left[\frac{1-az^{-1}}{b}\right]^{\frac{m}{n}-1} z^{-1}dz = \int \frac{t^{m-1}dt}{1-t^n b}$$

$$\left(\frac{x^n}{a+bx^n} = t^n\right).$$

Die Formeln IV. und VI. lehren, dass das binomische Integral durch algebraische Functionen ausgedrückt werden kann und durch ein Integral, in welchem der Exponent m von x zwischen Null und n gelegen ist, das Verhältniss $\frac{m}{n}$ also zwischen Null und 1.

Die Formen III. und V. zeigen,. dass das binomische Integral durch algebraische Functionen ausgedrückt wird, und durch ein Integral,

in welchem der Exponent p ebenfalls ein positiver Bruch zwischen Null und 1 ist.

Wird schliesslich $\frac{m}{n}$ nicht gleich Null oder ergänzen sich beide Brüche $\frac{m}{n}$ und p nicht zu eins, so wird der Werth des Integrals nur durch eine unendliche Reihe ausgedrückt, indem man das Binom der zu integrirenden Function in eine Potenzreihe entwickelt, und alsdann das Integral dieser mit x^{m-1} multiplicirten Reihe bildet (Cap. 4).

119. Die nächstfolgende Gruppe irrationaler Functionen bilden diejenigen, in welchen die Quadratwurzel aus einem Polynom zweiten Grades auftritt*):

$$\int F(x, \sqrt{R})dx, \qquad R = a + 2bx + cx^2,$$

unter F eine rationale Verbindung der Grössen x und R verstanden. Das Vorzeichen von $\sqrt{R}$ ist, wenn nicht das — Zeichen vorgesetzt wird, positiv zu nehmen. Geordnet nach seinem rationalen und irrationalen Theile wird

$$F(x, \sqrt{R}) = \frac{G(x) + H(x)\sqrt{R}}{G_1(x) + H_1(x)\sqrt{R}},$$

G, H, G_1, H_1 bedeuten ganze rationale Functionen. Macht man den Nenner dieses Quotienten durch Multiplication mit $G_1(x) - H_1(x)\sqrt{R}$ rational, so wird:

$$F(x, \sqrt{R}) = \varphi(x) + \psi(x)\sqrt{R}.$$

φ und ψ bezeichnen rationale Functionen. Wir haben uns im folgenden nur mit dem irrationalen Theile zu beschäftigen, dem man die Form geben kann:

$$\frac{\psi(x).R}{\sqrt{R}} = f(x)\frac{1}{\sqrt{R}} = \sum_{n=0} \frac{A_n x^n}{\sqrt{R}} + \sum \frac{B_n}{(x-\varrho)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}},$$

denn die rationale Function $f(x)$ zerfällt in eine ganze Function und in eine echt gebrochene, die in Partialbrüche zerlegt werden kann.

Das Integral $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{R}}$ wird durch eine Recursionsformel auf algebraische Functionen und auf das Integral: $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ gebracht. Es ist:

$$d[x^{n-1}\sqrt{a + 2bx + cx^2}] =$$

$$= \left[(n-1)x^{n-2}\sqrt{a + 2bx + cx^2} + \frac{x^{n-1}(b + cx)}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}\right]dx$$

$$= \left[\frac{(n-1)x^{n-2}(a + 2bx + cx^2)}{\sqrt{R}} + \frac{x^{n-1}(b + cx)}{\sqrt{R}}\right]dx,$$

*) Euler a. a. O. Cap. II. §. 88—93.

also durch Integration:

$$\text{I.}\quad x^{n-1}\cdot\sqrt{R}=(n-1)a\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{R}}+(2n-1)b\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{R}}+nc\int\frac{x^n dx}{\sqrt{R}}.$$

Setzt man in dieser Formel für n nach einander die Werthe 1, 2, 3 ..., so folgt:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}=\frac{1}{c}\sqrt{R}-\frac{b}{c}\int\frac{dx}{\sqrt{R}},$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}=\frac{x}{2c}\sqrt{R}-\frac{3b}{2c}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}-\frac{a}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

$$=\sqrt{R}\left(\frac{x}{2c}-\frac{3b}{2c^2}\right)+\left(\frac{3b^2}{2c^2}-\frac{a}{2c}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{R}},$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{R}}=\frac{x^2}{3c}\sqrt{R}-\frac{5b}{3c}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}-\frac{2a}{3c}\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

$$=\sqrt{R}\left(\frac{x^2}{3c}-\frac{5bx}{6c^2}+\frac{15b^2-4ac}{6c^3}\right)-\left(\frac{5b^3}{2c^3}-\frac{3ab}{2c^2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Allgemein:

$$\text{II.}\qquad\int\frac{x^n dx}{\sqrt{R}}=\sqrt{R}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\alpha_\nu x^{n-\nu}+\beta\int\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Die Coefficienten α_ν und β werden aus Recursionsformeln bestimmt, die man aufs neue durch Differentiation dieser Gleichung herleiten kann:

$$\frac{x^n}{\sqrt{R}}=\frac{b+cx}{\sqrt{R}}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\alpha_\nu x^{n-\nu}+\sqrt{R}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\alpha_\nu(n-\nu)x^{n-\nu-1}+\frac{\beta}{\sqrt{R}},$$

oder nach Multiplication beider Seiten mit $\sqrt{R}$, geordnet nach a, b, c:

$$x^n=c\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\alpha_\nu(n-\nu+1)x^{n-\nu+1}+b\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\alpha_\nu(2n-2\nu+1)x^{n-\nu}+$$

$$+a\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\alpha_\nu(n-\nu)x^{n-\nu-1}+\beta.$$

Hieraus entnimmt man durch Coefficientenvergleichung die Relationen:

$$1=c\alpha_1{}^n,\qquad 0=c\alpha_2(n-1)+b\alpha_1(2n-1),$$

$$0=c\alpha_3(n-2)+b\alpha_2(2n-3)+a\alpha_1(n-1),$$

allgemein:

$$\text{III.}\quad\begin{array}{l}0=c\alpha_\nu(n-\nu+1)+b\alpha_{\nu-1}(2n-2\nu+3)+a\alpha_{\nu-2}(n-\nu+2),\\ \beta=-b\alpha_n-a\alpha_{n-1}.\end{array}$$

Bemerkung: Ist $b=0$, also $R=a+cx^2$, so verschwindet in der Recursionsformel für α_ν das mittlere Glied; dem zufolge wird α_2, α_4 ... überhaupt jedes α mit geradem Index gleich Null. Ferner wird:

$$0 = c\alpha_{2m+1}(n-2m) + a\alpha_{2m-1}(n-2m+1)$$

also:

$$\alpha_1 = \frac{1}{cn}, \qquad \alpha_3 = -\frac{a(n-1)}{c^2 n(n-2)}, \qquad \alpha_5 = \frac{a^2(n-1)(n-3)}{c^3 n(n-2)(n-4)},$$

$$\alpha_{2m+1} = (-1)^m \cdot \frac{a^m(n-1)(n-3)\ldots(n-2m+1)}{c^{m+1} n(n-2)(n-4)\ldots(n-2m)}.$$

Ist n ungerade, so wird β gleich Null; ist aber n gerade, so wird, indem man die gerade Zahl n mit $2p$ bezeichnet:

$$\beta = -a\alpha_{2p-1} = (-1)^p \cdot \frac{a^p(2p-1)(2p-3)\ldots 5.3}{c^p 2p(2p-2)(2p-4)\ldots 4.2}.$$

Im ersten Falle reducirt sich das Integral

$$\int \frac{x^{2p+1}dx}{\sqrt{a+cx^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{z^p dz}{\sqrt{a+cz}}$$

auf algebraische Functionen allein; im zweiten auf algebraische Functionen und auf den Theil

$$\beta \int \frac{dx}{\sqrt{a+cx^2}}.$$

120. Dem Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$ kann stets die Form eines rationalen Integrales gegeben werden. Bei reellen Werthen der Coefficienten a, b, c unterscheidet man die Fälle, ob $c >$ oder < 0, und sucht jedesmal die Integralfunction wo möglich vermittelst reeller Grössen allein darzustellen.

1) Ist $c > 0$, so substituire man: $\sqrt{a+2bx+cx^2} = z - x\sqrt{c}$

$$x = \frac{z^2-a}{2(z\sqrt{c}+b)}, \quad \sqrt{R} = \frac{(z^2+a)\sqrt{c}+2bz}{2(z\sqrt{c}+b)}$$

und es sind x sowohl wie $\sqrt{R}$ rational und eindeutig durch z ausgedrückt. Aus der Gleichung: $a + 2bx = z^2 - 2zx\sqrt{c}$ folgt:

$$bdx = zdz - dzx\sqrt{c} - zdx\sqrt{c}, \quad dx(b+z\sqrt{c}) = dz(z - x\sqrt{c})$$

oder

$$\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{dz}{b+z\sqrt{c}}.$$

Es ist also:

I.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \int \frac{dz}{b+z\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l(b+z\sqrt{c}) + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\, l(b+\sqrt{Rc}+xc) + C.$$

2) Ist $c < 0$, aber $a > 0$, so substituire man:

$$\sqrt{a+2bx+cx^2} = \sqrt{a} + zx$$

$$x = \frac{2(z\sqrt{a}-b)}{c-z^2}, \quad \sqrt{R} = \frac{\sqrt{a}(c+z^2)-2bz}{c-z^2}, \quad \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{2dz}{c-z^2}.$$

Also:

II. $$\int\frac{dx}{\sqrt{R}} = 2\int\frac{dz}{c-z^2} = \frac{2}{c}\int\frac{dz}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{-c}}\right)^2} = -\frac{2}{\sqrt{-c}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{-c}} + C$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{-c}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{R}-\sqrt{a}}{x\sqrt{-c}} + C.$$

Ist $a < 0$ und sind die Wurzeln der Gleichung $a+2bx+cx^2=0$ complex, also $ac-b^2>0$, so ist R bei allen reellen Werthen von x negativ, $\sqrt{R}$ also imaginär; in diesem Falle kann auch die Einführung imaginärer Constanten bei der Darstellung der Integralfunction nicht vermieden werden.

Sind dagegen die beiden Wurzeln der Gleichung reell, α und β, so ist für die Werthe von x, die zwischen α und β gelegen sind, $\sqrt{R}$ reell; in diesem Falle kann man der Integralfunction eine reelle Form geben vermittelst der Substitutionen:

3) $R = a+bx+cx^2 = c(x-\alpha)(x-\beta)$, $\sqrt{R} = (x-\alpha)z$, folglich
$$x = \frac{c\beta-\alpha z^2}{c-z^2}, \quad \sqrt{R} = \frac{c(\beta-\alpha)z}{c-z^2}, \quad \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{2dz}{c-z^2}.$$

Es wird:

III. $$\int\frac{dx}{\sqrt{R}} = 2\int\frac{dz}{c-z^2} = \frac{2}{c}\int\frac{dz}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{-c}}\right)^2} = -\frac{2}{\sqrt{-c}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{-c}} + C$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{-c}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{R}}{(x-\alpha)\sqrt{-c}} + C.$$

Die angegebenen Substitutionen dienen auch dazu, das Integral
$$\int F(x, \sqrt{R})\,dx$$
von vornherein in das Integral einer rationalen Function zu verwandeln.

Bemerkung. Der Fall $c=0$ führt zurück auf das einfachste binomische Integral: es wird
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx}} = \frac{1}{b}\sqrt{a+2bx} + C.$$

121. Um das Integral $\int\frac{dx}{(x-\varrho)^n\sqrt{R}}$ zu bestimmen, untersuche man zunächst $\int\frac{dx}{x^n\sqrt{R}}$; für dasselbe gewinnt man eine Recursionsformel:
$$d\left[\frac{\sqrt{R}}{x^{n-1}}\right] = -\frac{(n-1)\sqrt{R}}{x^n}\,dx + \frac{(b+cx)\,dx}{x^{n-1}\sqrt{R}}$$
$$= -\frac{(n-1)(a+2bx+cx^2)}{x^n\sqrt{R}}\,dx + \frac{(b+cx)\,dx}{x^{n-1}\sqrt{R}},$$

$$d\left[\frac{\sqrt{R}}{x^{n-1}}\right] = -\frac{(n-1)a\,dx}{x^n\sqrt{R}} - \frac{(2n-3)\,b\,dx}{x^{n-1}\sqrt{R}} - \frac{(n-2)\,c\,dx}{x^{n-2}\sqrt{R}},$$

also:

$$\text{Ia.}\quad \int\frac{dx}{x^n\sqrt{R}} = -\frac{1}{(n-1)a}\,\frac{\sqrt{R}}{x^{n-1}} - \frac{(2n-3)b}{(n-1)a}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{R}} - \frac{(n-2)c}{(n-1)a}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{R}}$$

$$(\text{wenn } a \gtrless 0).$$

Setzt man für n nach einander die Werthe 2, 3, 4 ..., so reducirt sich das Integral schliesslich auf die Form $\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}$.

Die Formel wird verallgemeinert durch die Substitution $x = z - \varrho$; es wird:

$$R = A + 2Bz + Cz^2 = (a - 2b\varrho + c\varrho^2) + 2(b - c\varrho)z + cz^2,$$

also: $\quad c = C, \qquad b = B + C\varrho, \qquad a = A + 2B\varrho + C\varrho^2.$

Man schreibe dann auf beiden Seiten statt der Zahlzeichen A, B, C die Zahlzeichen a, b, c, statt z x, und der Kürze halber:

$$a + 2b\varrho + c\varrho^2 = f(\varrho), \qquad b + c\varrho = \tfrac{1}{2}f'(\varrho), \qquad c = \tfrac{1}{2}f''(\varrho),$$

so ergiebt sich, unter der Voraussetzung, dass $f(\varrho)$ von Null verschieden ist:

$$\text{I.}\quad \int\frac{dx}{(x-\varrho)^n\sqrt{R}} = -\frac{1}{(n-1)f(\varrho)}\,\frac{\sqrt{R}}{(x-\varrho)^{n-1}} - \frac{(2n-3)f'(\varrho)}{2(n-1)f(\varrho)}\int\frac{dx}{(x-\varrho)^{n-1}\sqrt{R}}$$
$$- \frac{(n-2)f''(\varrho)}{2(n-1)f(\varrho)}\int\frac{dx}{(x-\varrho)^{n-2}\sqrt{R}}.$$

Daraus erkennt man, dass

$$\text{II.}\qquad \int\frac{dx}{(x-\varrho)^n\sqrt{R}} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\frac{\alpha_\nu\sqrt{R}}{(x-\varrho)^{n-\nu}} + \beta\int\frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{R}}$$

wird. Die Grössen α_ν und β lassen sich aus Recursionsformeln berechnen, die man durch Differentiation dieser Gleichung erhält:

$$\frac{1}{(x-\varrho)^n\sqrt{R}} = \frac{(b+cx)}{\sqrt{R}}\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\frac{\alpha_\nu}{(x-\varrho)^{n-\nu}} - \sqrt{R}\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\frac{(n-\nu)\alpha_\nu}{(x-\varrho)^{n-\nu+1}} + \beta\,\frac{1}{(x-\varrho)\sqrt{R}}$$

also:

$$1 = (b+cx)\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\alpha_\nu(x-\varrho)^\nu - (a+2bx+cx^2)\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}(n-\nu)\,\alpha_\nu(x-\varrho)^{\nu-1} +$$
$$+ \beta(x-\varrho)^{n-1},$$

oder, wenn $x - \varrho = z$ gesetzt wird:

$$1 = \tfrac{1}{2}(f'(\varrho)+zf''(\varrho))\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\alpha_\nu z^\nu - \left(f(\varrho)+zf'(\varrho)+\tfrac{1}{2}z^2f''(\varrho)\right)\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}(n-\nu)\alpha_\nu z^{\nu-1}$$
$$+ \beta z^{n-1}.$$

Geordnet nach den Coefficienten erhält die Gleichung die Form

$$1 = -f(\varrho)\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}(n-\nu)\,\alpha_\nu z^{\nu-1} - f'(\varrho)\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\left(n-\nu-\tfrac{1}{2}\right)\alpha_\nu z^\nu -$$

$$-\frac{1}{2}f''(\varrho)\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}(n-\nu-1)\,\alpha_\nu z^{\nu+1} + \beta z^{n-1}.$$

Hieraus folgt:

$$f(\varrho)(n-1)\,\alpha_1 + 1 = 0, \qquad f(\varrho)(n-2)\,\alpha_2 + f'(\varrho)\left(n-\tfrac{3}{2}\right)\alpha_1 = 0.$$

Allgemein:

$$\text{III.}\ f(\varrho)(n-\nu)\alpha_\nu + f'(\varrho)\left(n-\nu+\tfrac{1}{2}\right)\alpha_{\nu-1} + \tfrac{1}{2}f''(\varrho)(n-\nu+1)\,\alpha_{\nu-2} = 0$$

$$(\nu = 3, 4, \ldots n-1),$$

$$\beta = \frac{1}{2}f'(\varrho)\,\alpha_{n-1} + \frac{1}{2}f''(\varrho)\,\alpha_{n-2}.$$

Bemerkung. Die in diesem §. entwickelten Formeln erleiden eine Abänderung, wenn $f(\varrho) = 0$ wird, also ϱ zugleich eine Wurzel von $a + 2bx + cx^2 = 0$ ist.

Multiplicirt man die Identität I mit $f(\varrho)$, und setzt dann $f(\varrho) = 0$, so folgt:

$$0 = -\frac{1}{(n-1)}\cdot\frac{\sqrt{R}}{(x-\varrho)^{n-1}} - \frac{(2n-3)f'(\varrho)}{2(n-1)}\int\frac{dx}{(x-\varrho)^{n-1}\sqrt{R}} -$$

$$-\frac{(n-2)f''(\varrho)}{2(n-1)}\int\frac{dx}{(x-\varrho)^{n-2}\sqrt{R}},$$

oder, wenn für n der Werth $n+1$ gesetzt wird:

$$\text{I}'.\ \int\frac{dx}{(x-\varrho)^n\sqrt{R}} = -\frac{2}{(2n-1)f'(\varrho)}\cdot\frac{\sqrt{R}}{(x-\varrho)^n} - \frac{(n-1)}{(2n-1)}\cdot\frac{f''(\varrho)}{f'(\varrho)}\int\frac{dx}{(x-\varrho)^{n-1}\sqrt{R}}.$$

Demnach:

$$\text{II}'.\qquad \int\frac{dx}{(x-\varrho)^n\sqrt{R}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{\alpha_\nu\sqrt{R}}{(x-\varrho)^{n-\nu}}.$$

$$\text{III}'.\ f'(\varrho)\alpha_0\left(n-\tfrac{1}{2}\right) + 1 = 0,$$

$$f'(\varrho)\alpha_\nu\left(n-\nu-\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}f''(\varrho)(n-\nu)\,\alpha_{\nu-1} = 0,$$

oder:

$$\alpha_\nu = (-1)^{\nu-1}\cdot\frac{[f''(\varrho)]^\nu}{[f'(\varrho)]^{\nu+1}}\cdot\frac{(n-1)\,n-2)\ldots(n-\nu)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2\nu-1)}.$$

In diesem Falle ist also das Integral durch algebraische Functionen allein darstellbar.

122. Zur Berechnung der Integrale:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{R}} \text{ und } \int \frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{R}}$$

dienen die in §. 120 angegebenen Substitutionen. Für die Darstellung des ersten Integrales ist von Wichtigkeit, ob $a >$ oder < 0.

Im ersten Falle ($a > 0$) benutze man die Substitution II.; es wird

$$\text{I.} \int \frac{dx}{x\sqrt{R}} = \int \frac{dz}{z\sqrt{a}-b} = \frac{1}{\sqrt{a}}\, l(z\sqrt{a}-b) + C = \frac{1}{\sqrt{a}}\, l\left(\frac{\sqrt{aR}-a-bx}{x}\right) + C.$$

Setzt man in dieser Formel für x den Werth $z-\varrho$, so wird wie vorhin:

$$R = A + 2Bz + Cz^2 = (a - 2b\varrho + c\varrho^2) + 2(b - c\varrho)z + cz^2,$$

$$c = C, \quad b = B + C\varrho, \quad a = A + 2B\varrho + C\varrho^2.$$

Schreibt man dann wieder auf beiden Seiten der Gleichung I. statt A, B, C die Zahlen a, b, c, statt z x und setzt:

$$a + 2b\varrho + c\varrho^2 = f(\varrho), \quad b + c\varrho = \frac{1}{2} f'(\varrho), \quad c = \frac{1}{2} f''(\varrho),$$

so folgt, die unter der Voraussetzung $f(\varrho) > 0$ reelle Formel

$$\text{I}'. \qquad \int \frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{f(\varrho)}}\, l\left(\frac{\sqrt{Rf(\varrho)} - f(\varrho) - \frac{1}{2} f'(\varrho)(x-\varrho)}{x-\varrho}\right) + C.$$

Im Falle, dass $a < 0$ benutze man die Substitution 1); es wird

$$\text{II.} \int \frac{dx}{x\sqrt{R}} = 2\int \frac{dz}{z^2-a} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{-a}} + C = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{R}+x\sqrt{c}}{\sqrt{-a}} + C.$$

Daraus ergiebt sich nach dem vorigen Verfahren:

$$\text{II}'. \qquad \int \frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{R}} = \frac{2}{\sqrt{-f(\varrho)}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{R}+(x-\varrho)\sqrt{c}}{\sqrt{-f(\varrho)}} + C.$$

Endlich hat man noch, wenn $a < 0$, $c < 0$, die Wurzeln der Gleichung $a + 2bx + cx^2 = 0$ aber reell, und folglich von gleichem Zeichen sind, vermittelst der Substitution 3):

$$\text{III.} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{R}} = 2\int \frac{dz}{c\beta - \alpha z^2} = \frac{2}{c\beta} \int \frac{dz}{1 + \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{z}{\sqrt{-c}}\right)^2} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{-c}} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-c\beta}} + C,$$

oder

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{R}} = -\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{-c}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{\sqrt{R}}{(x-\alpha)\sqrt{-c}} + C.$$

Auch diese Gleichung lässt sich nach dem bisherigen Verfahren verallgemeinern: es wird

III'. $\int \frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{R}} = -\frac{2}{\sqrt{(\alpha-\varrho)(\beta-\varrho)}\sqrt{-c}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha-\varrho}{\beta-\varrho}} \cdot \frac{\sqrt{R}}{(x-\alpha)\sqrt{-c}} + C,$

unter α und β die Wurzeln der quadratischen Gleichung $R = 0$ verstanden.

Anmerkung. Das Integral: $\int F(x, \sqrt{R})\, dx$ kann mit Zuhülfenahme geometrischer Vorstellungen erörtert werden. Bezeichnet man den Werth: $\sqrt{R} = \sqrt{a + 2bx + cx^2}$ mit y, so stellt die Gleichung: $y^2 = a + 2bx + cx^2$, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, eine Curve 2ter Ordnung dar; dieselbe ist eine Hyperbel, wenn $c > 0$, eine Ellipse wenn $c < 0$, (eine völlig imaginäre Curve, wenn zugleich $ac - b^2 > 0$), eine Parabel wenn $c = 0$. Die Abscissenlinie ist eine Hauptaxe, zu jedem Werthe von x gehören zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von y, oder $\pm \sqrt{R}$.

Das Integral: $\int F(x, y)\, dx$ ist eindeutig auf die Curve bezogen, d. h. zu jedem Punkte derselben (reell oder complex) gehört ein Werth der zu integrirenden Function, denn durch den Punkt der Curve ist auch das Vorzeichen der Wurzel bestimmt. Die Untersuchungen haben gelehrt, dass ein solches längs eines Kegelschnittes erstrecktes Integral in ein rationales verwandelt werden kann, dass also die Coordinaten x, y der auf dem Kegelschnitte gelegenen Punkte sich als rationale Functionen einer Variabelen z ausdrücken lassen. Setzt man umgekehrt diesen Satz, der sich aus der projectiven Geometrie der Kegelschnitte als Fundamentalsatz ergiebt, voraus, so werden die Methoden zur Behandlung des irrationalen Integrales einfache Folgerungen und verlieren den Anschein einer künstlichen Substitution. So wird z. B. für die Hyperbel $y^2 = a + 2bx + cx^2$ $(c > 0)$ die Richtung der Asymptoten fixirt durch $y^2 - cx^2 = 0$. Construirt man nun ein System von Geraden, welches der einen Asymptote parallel ist, so hat man für dieses System die Gleichung $y + x\sqrt{c} = z$, unter z eine Variabele verstanden. Jede dieser Geraden schneidet die Hyperbel nur noch in einem Punkte, der sich im Endlichen befindet (der andere Schnittpunkt ist stets derselbe im Unendlichen gelegene) und die Coordinaten dieses einen Schnittpunktes sind als Functionen von z ausgedrückt:

$$x = \frac{z^2 - a}{2(z\sqrt{c} + b)}, \qquad y = \frac{(z^2 + a)\sqrt{c} + 2bz}{2(z\sqrt{c} + b)}.$$

Dies sind aber die Formeln der ersten Substitution im §. 120. Die beiden anderen Substitutionen daselbst werden durch analoge Betrachtungen motivirt. Indem man das Strahlbüschel in einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes betrachtet, erhält man alle möglichen Substitutionen, durch welche das Integral rational wird. Das Studium der

algebraischen Integrale überhaupt gewinnt erst Zusammenhang und klare Anschaulichkeit durch die Geometrie der algebraischen Curven, was in den grundlegenden Arbeiten von Aronhold und Clebsch (Journal f. Math. Bd. 61. 63. 64) zuerst ausgeführt wurde.

In Bezug auf das erledigte Problem ist noch zu bemerken: die beiden Fundamentalintegrale, auf welche jedes andere zurückgeführt wurde, waren:

$$\int \frac{dx}{y} \text{ und } \int \frac{dx}{(x-\varrho)y} \qquad (y^2 = a + 2bx + cx^2).$$

Betrachtet man eine der zur Lösung derselben aufgestellten Formeln, z. B.:

$$\int \frac{dx}{y} = \frac{1}{\sqrt{c}} l(b + cx + \sqrt{cR}) + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-\varrho)y} = \frac{1}{\sqrt{f(\varrho)}} l\left(\frac{\sqrt{Rf(\varrho)} - f(\varrho) - \frac{1}{2}f'(\varrho)(x-\varrho)}{x-\varrho}\right) + C,$$

so erkennt man, dass die Integralfunction nicht unendlich wird an den Stellen $y = 0$. Diese Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe, (in denen die Tangenten des Kegelschnittes parallel der Ordinatenaxe sind), Verzweigungspunkte der Function y, sind für die Integralfunction nicht Unendlichkeitspunkte. Dagegen wird in der ersten das Argument des Logarithmus unendlich, wenn x unendlich gross wird. (Für die Hyperbel sind dies zwei reelle, für die Ellipse zwei complexe Punkte.)

In der zweiten Formel tritt für $x = \varrho$ ein Verschwinden des Argumentes unter dem Logarithmus ein; dieser selbst wird also ebenfalls unendlich. Denn es ist:

$$\left[\frac{\sqrt{Rf(\varrho)} - f(\varrho) - \frac{1}{2}f'(\varrho)(x-\varrho)}{x-\varrho}\right]_{x=\varrho} = \frac{0}{0} = \left[\frac{(b+cx)\sqrt{f(\varrho)}}{\sqrt{R}} - \frac{1}{2}f'(\varrho)\right]_{x=\varrho} = 0.$$

Das eine Fundamentalintegral ist logarithmisch unendlich an den beiden Punkten des Kegelschnittes, die auf der unendlich fernen Geraden gelegen sind, das andere an den beiden Stellen auf der Geraden $x = \varrho$. Dieser Zusammenhang zwischen den beiden Integralen wird evident, wenn man die Gleichung der unendlich fernen Geraden ebenso behandeln kann, wie die jeder anderen Geraden, was am einfachsten vermittelst homogener Coordinaten geschieht.

Setzt man $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, so ist $x_3 = 0$ die unendlich ferne Gerade.

Es wird

$$\int \frac{dx}{y} = \int \frac{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}{x_3\,x_2}, \quad \int \frac{dx}{(x-\varrho)y} = \int \frac{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}{(x_1 - \varrho x_3)\,x_2}.$$

Die Gleichung des Kegelschnittes ist $x_2^2 = a x_3^2 + 2b x_1 x_3 + c x_1^2$. Hieraus erkennt man, was bei der nicht homogenen Form verdeckt ist, dass das erste Integral nur eine specielle Form des zweiten ist, indem an Stelle der Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der Geraden $x_1 - \varrho x_3 = 0$, die Schnittpunkte mit der Geraden $x_3 = 0$ treten. (Aronhold a. a. O.)

Ist $f(\varrho) = 0$, so sagt das aus, die Gerade $x = \varrho$ tangirt die Curve, denn es erhalten ihre beiden Schnittpunkte dieselben Coordinaten $x = \varrho$, $y = 0$; dann wird aber

$$\int \frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{R}} = -\frac{2}{f'(\varrho)} \frac{\sqrt{R}}{(x-\varrho)} + C,$$

und an der Stelle $x = \varrho$ wird dieser algebraische Ausdruck:

$$\left[-\frac{2}{f'(\varrho)} \cdot \frac{\sqrt{R}}{x-\varrho}\right]_{x=\varrho} = \left[-\frac{2}{f'(\varrho)} \cdot \frac{b+cx}{\sqrt{R}}\right]_{x=\varrho} = \left[-\frac{1}{\sqrt{f(\varrho)}}\right] = \infty.$$

Dasselbe tritt bei der Parabel ein in ihrem Schnitt mit der unendlich fernen Geraden.

123. Aus dem unbestimmten Integrale lässt sich das bestimmte zwischen zwei Grenzen bilden, in deren Intervalle die Integralfunction stetig bleibt und nicht unendlich wird; so ist z. B. wenn $\varrho^2 > 1$, nach Formel III' in §. 122:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{1-x^2}} = \left[-\frac{2}{\sqrt{\varrho^2-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\varrho-1}{\varrho+1}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}\right]_{x=-1}^{x=+1}.$$

Für $x = -1$ verschwindet das Argument von arctg; wächst x, so bekommt dasselbe continuirliche negative Werthe, für $x = +1$ wird der Werth $-\infty$; denn es ist

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \frac{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}}{-\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-x}} = \left[\frac{\sqrt{1+x}}{-\sqrt{1-x}}\right]_{x=1} = -\infty;$$

der Factor $\sqrt{\frac{\varrho-1}{\varrho+1}}$ ist positiv, also wird:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\varrho^2-1}}.$$

Diese Schlussweise wäre nicht möglich, wenn $\varrho^2 < 1$; alsdann wird arctg im Intervalle unstetig; das Argument bekommt an der Stelle $x = \varrho$ den Werth $-i$.

124. Die nächstfolgende Classe expliciter irrationaler Integrale ist durch $\int F(x, \sqrt{R})\, dx$ gegeben, wobei R ein Polynom dritten oder vierten Grades in x, $R = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ (e kann auch gleich Null sein), F eine rationale Verbindung von x und $\sqrt{R}$ be-

deutet. Denn ebenso wie es bei den bisherigen Betrachtungen im Grunde gleichgiltig war, ob unter der Quadratwurzel ein Polynom ersten oder zweiten Grades stand — in beiden Fällen konnte das Integral auf eine rationale Form gebracht werden —, so sind auch hier die Fälle dritten und vierten Grades gleichgeltend: die Integrale können in einander übergeführt werden, werden aber im allgemeinen keineswegs mehr rational. Diese Ueberführung wird durch die folgende Substitution geleistet: Setzt man $x = k + \frac{l}{z+m} = k + h$, so geht:

$$R = a + bc + cx^2 + dx^3 + ex^4 = f(x)$$

über in

$$f(k+h) = f(k) + h\,f'(k) + \frac{h^2}{2!}f''(k) + \frac{h^3}{3!}f'''(k) + \frac{h^4}{4!}f^{IV}(k),$$

oder

$$f(k+h) = \frac{1}{(z+m)^4}\Big[(z+m)^4 f(k) + (z+m)^3\, l f'(k) + \frac{(z+m)^2}{2!}\, l^2 f''(k) + \\ + \frac{z+m}{3!}\, l^3 f'''(k) + \frac{l^4}{4!} f^{IV}(k)\Big].$$

Bestimmt man nun k so, dass $f(k) = 0$, d. h. dass k eine Wurzel der Gleichung $R = 0$ wird, so ist:

$$\sqrt{R} = \frac{1}{(z+m)^2}\sqrt{Az^3 + Bz^2 + Cz + D} = \frac{1}{(z+m)^2}\sqrt{Z},$$

$$A = lf'(k), \quad B = 3mlf'(k) + \frac{1}{2}\, l^2 f''(k),$$

$$C = 3m^2 lf'(k) + ml^2 f''(k) + \frac{l^3}{3!} f'''(k),$$

$$D = m^3 lf'(k) + \frac{1}{2}\, m^2 l^2 f''(k) + \frac{1}{3!}\, ml^3 f'''(k) + \frac{1}{4!}\, l^4 f^{IV}(k).$$

Die Grössen l und m bleiben willkürlich.

Unter der Quadratwurzel steht nur noch ein Polynom dritten Grades, und da x rational durch z ausgedrückt ist, so geht

$$\int F(x, \sqrt{R})\, dx \text{ über in} \int \Phi(z, \sqrt{Z})\, dz,$$

was behauptet wurde. Bezeichnet man die Wurzeln von $R = 0$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und lässt man k mit α zusammenfallen, so sind die zugehörigen Werthe von z: ∞, $\frac{l}{\beta-\alpha} - m$, $\frac{l}{\gamma-\alpha} - m$, $\frac{l}{\delta-\alpha} - m$. Dem einen Verschwindungswerthe von R entspricht also ein unendlich werdendes z; den übrigen Verschwindungswerthen entsprechen die Wurzeln von $Z = 0$.

*Die Ermittelung des elliptischen Integrales:**)

---

*) Auf Integrale dieser Form wurde man durch das geometrische Problem geführt, die Länge des Bogens einer Ellipse oder einer Hyperbel zwischen will-

$$\int F(x, \sqrt{R})\, dx \qquad R = a + bx + cx^2 + dx^3 \qquad (e = 0)$$

lässt sich zurückführen auf algebraische und logarithmische Functionen und auf drei Fundamentalintegrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{R}}.$$

Geordnet nach seinem rationalen und irrationalen Theile wird (vergl. §. 119):

$$F(x, \sqrt{R}) = \frac{G(x) + H(x)\sqrt{R}}{G_1(x) + H_1(x)\sqrt{R}} = \varphi(x) + \psi(x)\sqrt{R},$$

φ und ψ bezeichnen rationale Functionen; das Integral von φ führt auf algebraische und logarithmische Ausdrücke; der zweite Theil liefert:

$$\frac{\psi(x)\,R}{\sqrt{R}} = f(x)\,\frac{1}{\sqrt{R}} = \sum_{n=0} \frac{A_n x^n}{\sqrt{R}} + \sum \frac{B_n}{(x-\varrho)^n}\,\frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Das Integral $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{R}}$ ist vermittelst einer Recursionsformel reducirbar:

$$d[x^{n-2}\sqrt{R}] = \frac{(n-2)\,x^{n-3}(a+bx+cx^2+dx^3)}{\sqrt{R}}\,dx + \frac{x^{n-2}(b+2cx+3dx^2)}{2\sqrt{R}}\,dx,$$

also durch Integration:

$$\text{I.} \qquad x^{n-2}\sqrt{R} = a\,(n-2)\int \frac{x^{n-3}dx}{\sqrt{R}} + b\left(n - \tfrac{3}{2}\right)\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{R}} + $$

$$+ c\,(n-1)\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{R}} + d\left(n - \tfrac{1}{2}\right)\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{R}}.$$

Setzt man für n nach einander die Werthe: 2, 3, 4 ... so wird:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} = \frac{2}{3d}\sqrt{R} - \frac{b}{3d}\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{2c}{3d}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}.$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{R}} = \frac{2}{5d}\,x\sqrt{R} - \frac{2a}{5d}\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{3b}{5d}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}} - \frac{4c}{5d}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}.$$

---

kührlich gegebenen Endpunkten zu bestimmen. Der italienische Mathematiker Fagnano (1682—1766) (Produzioni matematiche, t. II. 1750) ermittelte zuerst mit Hülfe des Integrales geometrische Beziehungen zwischen den Bogen dieser Curve, Beziehungen, für welche Euler (1761) („par une combinaison qu'on peut regarder comme fort heureuse, quoique ces hasards n'arrivent qu'à ceux qui savent les faire naître" Legendre) in dem Additionstheoreme den allgemeinen Grund aufdeckte (Inst. calc. integral. T. II. Cap. VI §. 606—649). Euler erkannte, dass durch diese Integrale neue Functionen in die Analysis eingeführt werden, so dass sich die Gruppe der transscendenten Functionen (der Logarithmus und die cyclometrischen, und deren inverse: Exponentialfunction und die goniometrischen) in gesetzmässiger Weise erweitern lässt. Eine Theorie dieser neuen Transscendenten begründete Legendre (1752—1833) durch sein Hauptwerk: Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes 1825—26.

Allgemein wird:

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{R}} = \sqrt{R}\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\alpha_\nu x^{n-1-\nu} + \beta\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \gamma\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} \qquad (n \geqq 2),$$

so dass die Zurückführung auf die zwei ersten Fundamentalintegrale geleistet ist.

Setzt man in derselben Recursionsformel für n die Werthe 1, 0, -1, -2, ... so lehrt sie die Integrale von der Form $\int\frac{dx}{x^n\sqrt{R}}$ durch die beiden ersten Fundamentalintegrale und durch das Integral $\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}$ darstellen. Um dieses in Evidenz zu setzen schreibe man statt n, $-n+3$; es folgt:

$$\text{II.} \qquad \frac{\sqrt{R}}{x^{n-1}} = -a(n-1)\int\frac{dx}{x^n\sqrt{R}} - b\left(n-\tfrac{3}{2}\right)\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{R}} -$$
$$- c(n-2)\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{R}} - d\left(n-\tfrac{5}{2}\right)\int\frac{dx}{x^{n-3}\sqrt{R}}.$$

Für $n = 2, 3$ ... ergiebt sich, falls nicht gerade $a = 0$ ist:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{R}} = -\frac{1}{a}\frac{\sqrt{R}}{x} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{R}} + \frac{d}{2a}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}.$$

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{R}} = -\frac{1}{2a}\frac{\sqrt{R}}{x^2} - \frac{3b}{4a}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{R}} - \frac{c}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{R}} - \frac{d}{4a}\int\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Allgemein ist:

$$\int\frac{dx}{x^n\sqrt{R}} = \sqrt{R}\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\frac{\alpha_\nu}{x^{n-\nu}} + \beta\int\frac{dx}{x\sqrt{R}} + \gamma\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \delta\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}. \quad (n \geqq 2).$$

Für den Fall, dass $a = 0$ ist, wird, wie aus der Recursionsformel II. hervorgeht, $\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}$ durch die beiden ersten Fundamentalintegrale dargestellt.

Die Formel II. gestattet nach der bereits früher (§. 121) angewandten Methode eine Verallgemeinerung, indem man für x $x - \varrho$, für $a + bx + cx^2 + dx^3$ $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ schreibt, wobei

$$a = A + \varrho B + \varrho^2 C + \varrho^3 D = f(\varrho),$$
$$b = B + 2\varrho C + 3\varrho^2 D = f'(\varrho),$$
$$c = C + 3D\varrho = \frac{1}{2}f''(\varrho),$$
$$d = D = \frac{1}{6}f'''(\varrho)$$

wird. Denkt man sich dann für A, B, C, D die Zeichen a, b, c, d geschrieben, so folgt:

$$\text{III. } \frac{\sqrt{R}}{(x-\varrho)^{n-1}} = -f(\varrho)(n-1)\int\frac{dx}{(x-\varrho)^n\sqrt{R}} - f'(\varrho)\left(n-\frac{3}{2}\right)\int\frac{dx}{(x-\varrho)^{n-1}\sqrt{R}} -$$
$$-\frac{1}{2}f''(\varrho)(n-2)\int\frac{dx}{(x-\varrho)^{n-2}\sqrt{R}} - \frac{1}{6}f'''(\varrho)\left(n-\frac{5}{2}\right)\int\frac{dx}{(x-\varrho)^{n-3}\sqrt{R}}.$$

Nach dieser Formel wird:

$$\int\frac{dx}{(x-\varrho)^n\sqrt{R}} = \sqrt{R}\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\frac{\alpha_\nu}{(x-\varrho)^{n-\nu}} + \beta\int\frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{R}} + \gamma\int\frac{dx}{\sqrt{R}} +$$
$$+\delta\int\frac{(x-\varrho)\,dx}{\sqrt{R}} \qquad (n \geqq 2),$$

d. h. es ist durch die drei Fundamentialintegrale ausgedrückt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}},\quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}},\quad \int\frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{R}},$$

was behauptet wurde; man nennt dieselben die elliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung.

Benutzt man die Substitution, welche dazu diente, Polynome vierten Grades unter der Quadratwurzel in ein Polynom dritten Grades zu verwandeln, so kann man, indem man diese drei Integrale wieder umgekehrt transformirt, das erhaltene Resultat auch so aussprechen:

Jedes elliptische Integral $\int F(x, \sqrt{R})\,dx$, in welchem

$$R = \sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}$$

ist, lässt sich darstellen durch drei Fundamentalintegrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}},\quad \int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}},\quad \int\frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{R}}$$

und durch algebraische und logarithmische Functionen.

In dem Integrale zweiter Gattung bedeutet α eine Wurzel von $R=0$. Statt der letzten beiden Integrale kann man auch die Integrale

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} \text{ und } \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$$

einführen, wie die Entwickelung einer der Formel III. analogen Reductionsformel lehrt.

125. Es sollen nun noch auf Grund dieser Reductionen die drei Normalintegrale aufgestellt werden, auf deren Berechnung Legendre das allgemeine elliptische Integral zurückgeführt hat.

Es seien in dem Polynome $R = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ die Coefficienten reell, so kann man, mögen die vier Wurzeln von $R=0$, reell oder complex sein, stets vermittelst einer reellen linearen Substitution in dem Polynome die ungeraden Potenzen zum Verschwinden bringen.

Die vier Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seien, falls sie reell sind, so benannt, dass $\alpha > \beta > \gamma > \delta$; sind sie complex, so seien α und β, γ und δ conjugirt. Man setze

$$R = e(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = e[x^2-2\lambda x+\mu][x^2-2\varrho x+\sigma],$$

so ist:

$$\alpha + \beta = 2\lambda, \quad \alpha\beta = \mu, \quad \gamma + \delta = 2\varrho, \quad \gamma\delta = \sigma.$$

Aus der Substitution:

$$x = \frac{p+qz}{1+z}$$

folgt:

$$x^2 - 2\lambda x + \mu = \frac{Az^2+Bz+C}{(1+z)^2}, \qquad x^2 - 2\varrho x + \sigma = \frac{A'z^2+B'z+C'}{(1+z)^2},$$

wobei:

$$\begin{aligned} A &= q^2 - 2\lambda q + \mu, & A' &= q^2 - 2\varrho q + \sigma, \\ B &= 2(pq - \lambda(p+q) + \mu), & B' &= 2(pq - \varrho(p+q) + \sigma), \\ C &= p^2 - 2\lambda p + \mu, & C' &= p^2 - 2\varrho p + \sigma, \end{aligned}$$

p und q können stets so bestimmt werden, dass B und B' verschwinden. Denn aus den Gleichungen:

$$pq - \lambda(p+q) + \mu = 0, \qquad pq - \varrho(p+q) + \sigma = 0$$

folgt (falls $\lambda - \varrho$ nicht gleich 0 ist):

$$p + q = \frac{\mu-\sigma}{\lambda-\varrho}, \qquad pq = \frac{\varrho\mu-\lambda\sigma}{\lambda-\varrho}$$

und weiter

$$(p-q)^2 = \frac{(\mu-\sigma)^2}{(\lambda-\varrho)^2} - \frac{4(\varrho\mu-\lambda\sigma)}{\lambda-\varrho} = \frac{(\mu+\sigma-2\lambda\varrho)^2 - 4(\sigma-\varrho^2)(\mu-\lambda^2)}{(\lambda-\varrho)^2}.$$

Da die Werthe $p+q$, pq reell sind, so werden auch die Werthe p und q einzeln reell sein, wenn $(p-q)^2$ grösser als Null ist.

Sind von den vier Wurzeln zwei reell, zwei imaginär, so sind $\lambda^2 - \mu$ und $\varrho^2 - \sigma$ von verschiedenem Zeichen, demnach ist der Zähler positiv.

Sind die vier Wurzeln reell, so entwickele man den Zähler:

$$\left(\alpha\beta + \gamma\delta - \frac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{2}\right)^2 - 4\left(\gamma\delta - \left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)^2\right)\left(\alpha\beta - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \left(\alpha\beta + \gamma\delta - \frac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(\gamma-\delta)^2(\alpha-\beta)^2.$$

Dieser Ausdruck ist in α und β, γ und δ symmetrisch, und verschwindet für $\alpha = \gamma$; er enthält also den Factor $(\alpha - \gamma)$ und folglich auch die Factoren $(\alpha - \delta)$, $(\beta - \gamma)$, $(\beta - \delta)$. Da er vom vierten Grade ist, so besteht er aus diesen Factoren multiplicirt mit einem Zahlenfactor; und da das Glied $\alpha^2\beta^2$ auf beiden Seiten mit dem Factor 1 vorkommt, so ist dieser Zahlenfactor 1, also

$$\left(\alpha\beta+\gamma\delta-\frac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(\gamma-\delta)^2(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta).$$

Dieses Product ist positiv, weil $\alpha > \beta > \gamma > \delta$.

Sind die vier Wurzeln complex, so sei:

$$\alpha = \lambda + i\alpha', \quad \beta = \lambda - i\alpha', \quad \gamma = \varrho + i\gamma', \quad \delta = \varrho - i\gamma',$$

so wird:

$$\alpha - \gamma = (\lambda - \varrho) + i(\alpha' - \gamma'), \quad \alpha - \delta = (\lambda - \varrho) + i(\alpha' + \gamma'),$$
$$\beta - \gamma = (\lambda - \varrho) - i(\alpha' + \gamma'), \quad \beta - \delta = (\lambda - \varrho) - i(\alpha' - \gamma').$$

Das Product ist also: $[(\lambda - \varrho)^2 + (\alpha' - \gamma')^2]\,[(\lambda - \varrho)^2 + (\alpha' + \gamma')^2]$, d. h. ebenfalls positiv.

Ist $\lambda = \varrho$, also: $R = e\,[x^2 - 2\lambda x + \mu]\,[x^2 - 2\lambda x + \sigma]$, und setzt man: $x = z + \lambda$, so wird:

$$R = e\,[z^2 + (\mu - \lambda^2)]\,[z^2 + (\sigma - \lambda^2)].$$

Durch die angenommene Substitution wird das reducirte elliptische Integral:

$$\int \frac{F(x)}{\sqrt{R}}\,dx = \frac{q-p}{e}\int F\left(\frac{p+qz}{1+z}\right)\frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad Z = (Az^2 + C)(A'z^2 + C'),$$

wobei:

$$A = (q-\alpha)(q-\beta), \quad C = (p-\alpha)(p-\beta), \quad A' = (q-\gamma)(q-\delta),$$
$$C' = (p-\gamma)(p-\delta), \quad p+q = \frac{2(\alpha\beta - \gamma\delta)}{(\alpha+\beta)-(\gamma+\delta)}, \quad pq = \frac{\alpha\beta(\gamma+\delta) - \gamma\delta(\alpha+\beta)}{2[(\alpha+\beta)-(\gamma+\delta)]}.$$

Alle diese Grössen sind reell, wenn die Coefficienten in R reell sind.

Entwickelt man die rationale Function $F\left(\frac{p+qz}{1+z}\right)$, so lassen sich die Glieder gerader und ungerader Ordnung im Zähler sowie im Nenner vereinigen:

$$F = \frac{G(z^2) + zH(z^2)}{G_1(z^2) + zH_1(z^2)}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner dieses Ausdrucks mit $G_1 - zH_1$, so erhält man im Nenner nur gerade Potenzen und es wird:

$$\frac{F}{\sqrt{Z}} = \frac{\varphi(z^2)}{\sqrt{Z}} + \frac{z\psi(z^2)}{\sqrt{Z}}.$$

Das Integral des zweiten Gliedes verwandelt sich durch die Substitution $z^2 = t$ in ein Integral der Form:

$$\frac{1}{2}\int \frac{\psi(t)\,dt}{\sqrt{(At + C)(A't + C')}},$$

es wird also durch logarithmische und algebraische Functionen ausgewerthet.

Im Integrale des ersten Termes kann das Polynom Z auf die Form gebracht werden:

$$(1 - y^2)(1 - k^2y^2),$$

in welcher $0 < k^2 < 1$. Um dieses einzusehen, schreibe man:

$$Z = CC'\left(1 + \frac{A}{C} z^2\right)\left(1 + \frac{A'}{C'} z^2\right) = \pm \gamma^2 (1 \pm \alpha^2 z^2)(1 \pm \beta^2 z^2).$$

Es sei $\alpha^2 > \beta^2$. (Diese Bezeichnungen $\alpha\beta\gamma$ sind nicht mit der früheren Bezeichnung der Wurzeln von R zu verwechseln.) Je nach dem Vorzeichen ergeben sich nun 8 Fälle, indem man dabei solche Werthe von z und entsprechende für y betrachtet, bei welchen Z positiv bleibt, so dass die zu integrirende Function und die Integralfunction bei reellen Werthen der Variabelen reell sind.

1) $Z = +\gamma^2 (1 + \alpha^2 z^2)(1 + \beta^2 z^2)$ bleibt bei allen reellen Werthen von z positiv. Man setze:

$$\alpha z = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \alpha dz = \frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wächst z von $-\infty$ bis 0, so wächst y von -1 bis 0, wächst z von 0 bis $+\infty$, so wächst y von 0 bis $+1$; es wird:

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{dy}{\alpha\gamma\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad k^2 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}.$$

Die Quadratwurzeln haben in dieser Gleichung sowie in allen analogen Resultaten sub 2) bis 8) auf beiden Seiten dasselbe Vorzeichen.

2) $Z = +\gamma^2(1+\alpha^2 z^2)(1-\beta^2 z^2)$ bleibt positiv, so lange z zwischen $-\frac{1}{\beta}$ und $+\frac{1}{\beta}$ liegt. Man setze:

$$\beta z = \sqrt{1-y^2}, \quad \beta dz = -\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Wächst z von $-\frac{1}{\beta}$ bis 0, so lasse man y von 0 bis $+1$ wachsen (die Quadratwurzel in der Substitutionsformel hat das negative Zeichen), geht z von 0 bis $+\frac{1}{\beta}$, so lasse man y von -1 bis 0 wachsen (die Quadratwurzel hat das positive Zeichen); es wird:

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{dy}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad k^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

3) $Z = +\gamma^2(1-\alpha^2 z^2)(1+\beta^2 z^2)$ bleibt positiv, so lange z zwischen $-\frac{1}{\alpha}$ und $+\frac{1}{\alpha}$ liegt. Man setze:

$$\alpha z = \sqrt{1-y^2}, \quad \alpha dz = -\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Wächst z von $-\frac{1}{\alpha}$ bis 0, so wächst y von 0 bis $+1$ (die Quadratwurzel hat das negative Zeichen), geht z von 0 bis $+\frac{1}{\alpha}$, so wächst y von -1 bis 0 (die Quadratwurzel ist positiv); es wird

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{dy}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad k^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

4) $Z = +\gamma^2(1-\alpha^2 z^2)(1-\beta^2 z^2)$ bleibt positiv, so lange z entweder zwischen $-\frac{1}{\alpha}$ und $+\frac{1}{\alpha}$ oder zwischen $+\infty$ und $+\frac{1}{\beta}$, $-\infty$ und $-\frac{1}{\beta}$ liegt. Man setze: $\alpha z = y$, $\alpha dz = dy$ im ersten Falle, $\frac{-1}{\beta z} = y$, $\frac{dz}{\beta z^2} = dy$ im zweiten Falle, so wird:

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{dy}{\gamma\alpha\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad k^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

5) $Z = -\gamma^2(1+\alpha^2 z^2)(1+\beta^2 z^2)$; in diesem Falle ist Z für alle reellen Werthe von z negativ; die Integralfunction vermittelst reeller Constanten nicht darstellbar. Setzt man den Factor $\sqrt{-1}$ vor das Integral, so ist der Fall im übrigen auf den ersten gebracht.

6) $Z = -\gamma^2(1+\alpha^2 z^2)(1-\beta^2 z^2)$ bleibt positiv, für z von $-\infty$ bis $-\frac{1}{\beta}$, und von $+\frac{1}{\beta}$ bis $+\infty$. Man setze:

$$\beta z = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \beta dz = \frac{y\,dy}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wächst z von $-\infty$ bis $-\frac{1}{\beta}$, so wächst y von -1 bis 0 (die Quadratwurzel ist negativ zu nehmen); wächst z von $+\frac{1}{\beta}$ bis $+\infty$, so wächst y von 0 bis $+1$ (die Quadratwurzel ist positiv). Es wird:

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad k^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

7) $Z = -\gamma^2(1-\alpha^2 z^2)(1+\beta^2 z^2)$ bleibt positiv, für z von $-\infty$ bis $-\frac{1}{\alpha}$ und von $+\frac{1}{\alpha}$ bis $+\infty$. Man setze:

$$\alpha z = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \alpha dz = \frac{y\,dy}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad k^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

8) $Z = -\gamma^2(1-\alpha^2 z^2)(1-\beta^2 z^2)$ ist positiv, für z von $-\frac{1}{\beta}$ bis $-\frac{1}{\alpha}$ und von $+\frac{1}{\alpha}$ bis $+\frac{1}{\beta}$. Man setze:

$$\beta z = \sqrt{1-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}y^2}, \qquad \beta dz = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{-y\,dy}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}y^2}}.$$

Wächst z von $-\frac{1}{\beta}$ bis $-\frac{1}{\alpha}$, so wächst y von 0 bis $+1$ (die Quadratwurzel ist negativ), wächst z von $+\frac{1}{\beta}$ bis $+\frac{1}{\alpha}$, so wächst y von -1 bis 0 (die Quadratwurzel ist positiv). Es wird:

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{dy}{\beta\gamma\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad k^2 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}.$$

Damit ist das Behauptete für alle Fälle bewiesen. Allen Werthen von z, bei denen $\sqrt{Z}$ reell bleibt, entsprechen die Werthe $y^2 < 1$.

Beachtet man aber, dass alle angewandten Substitutionen in der Form enthalten sind:

$$z^2 = \frac{\delta + \delta_1 y^2}{\varepsilon + \varepsilon_1 y^2},$$

so hat man das Resultat: Das elliptische Integral $\int \frac{\varphi(z^2)}{\sqrt{Z}}\, dz$ kann (bis auf constante Factoren) stets auf die Form gebracht werden:

$$\int \varphi\left(\frac{\delta + \delta_1 y^2}{\varepsilon + \varepsilon_1 y^2}\right) \frac{dy}{\sqrt{Y}}, \qquad Y = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2),$$

in welcher, falls Z reelle Coefficienten hat, k — der Modul des elliptischen Integrales — einen reellen positiven echten Bruch bedeutet.

Setzt man, um die Reduction dieses Integrales auf die Legendre'schen Normalformen zu vollenden,

$$y^2 = t,$$

so wird:

$$\int \varphi\left(\frac{\delta + \delta_1 y^2}{\varepsilon + \varepsilon_1 y^2}\right) \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{2} \int F(t) \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2 t)}}.$$

Von diesem Integrale, in welchem das Polynom nur vom dritten Grade ist, wurde bewiesen (§. 124), dass es auf die Fundamentalformen

$$\int \frac{dt}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{t\,dt}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{dt}{(t-\varrho)\sqrt{T}}$$

gebracht werden kann; mithin lauten in y die Legendre'schen Normalintegrale:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad \int \frac{dy}{(y^2-\varrho)\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

oder wie Legendre, indem er sich auf die Untersuchung reeller Integralwerthe zunächst beschränkte, nach Substitution von

$$y = \sin\varphi, \quad dy = \cos\varphi\, d\varphi$$

schrieb:

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad Z(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\sin\varphi^2\, d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \Pi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n\sin\varphi^2)\Delta\varphi},$$

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}.$$

Der Coefficient $n = -\frac{1}{\varrho}$ im dritten Integrale heisst der Parameter des dritten Normalintegrales*).

*) Eine von Weierstrass gegebene compendiösere Darstellung der Transformation auf die Normalform, wobei die Coefficienten einer gebrochenen linearen Substitution durch die Forderung bestimmt werden, dass den 4 Wurzeln von $R=0$ die Werthe $y = \pm 1, \pm \frac{1}{k}$ entsprechen sollen, ist mitgetheilt von Schellbach: Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen, und Königsberger: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Integrale.

Anmerkung. Aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \qquad a^2 > b^2$$

folgt, wenn $x = a \sin\varphi$ gesetzt wird (φ bedeutet die Anomalie ex centro gerechnet von der kleinen Axe), $y = b\cos\varphi$,

$$\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int d\varphi \sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2} = a\int d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}$$

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} < 1.$$

Die Länge des Ellipsenbogens, der zu den Werthen 0 und φ gehört, hängt also von der Berechnung des Integrals

$$aE(\varphi) = a\int_0^\varphi d\varphi\,\Delta\varphi = a\left[\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - k^2\int_0^\varphi \frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}\right] = a\Big[F(\varphi) - k^2 Z(\varphi)\Big]$$

ab.

Aus der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, in welcher a die Länge der reellen Halbaxe bedeutet, folgt, wenn man $x = \frac{a}{\cos\varphi}$ setzt, $y = b \operatorname{tg}\varphi$, $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}\sqrt{b^2 + a^2 \sin\varphi^2}$.

Um jedoch Integrale der früheren Form zu erhalten, führe man die Entfernung des Brennpunktes vom Mittelpunkte ein, $c^2 = a^2 + b^2$, und setze:

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{tg}\varphi, \text{ so wird } x = \frac{a}{\cos\varphi}\sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}, \quad k^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2},$$

also

$$\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int dy \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{a^4}{b^4}} = \frac{a}{b^2}\int\frac{dy\sqrt{b^4 + y^2(a^2 + b^2)}}{x}$$

$$= \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2\,\Delta\varphi}, \qquad \Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}.$$

Das Integral, durch welches die Länge des Hyperbelbogens von $\varphi = 0$ an gemessen wird, $\Upsilon(\varphi)$, ist also direct gleich dem dritten Normalintegral $\Pi(\varphi)$, in welchem der Parameter $n = -1$. Da aber hier $n = -1$ ist, so kann dieses dritte Integral auf das zweite und erste gebracht werden (es ist dies ein Fall, wo der Verschwindungswerth ϱ der linearen Function mit einer Wurzel von $Y = 0$ zusammenfällt). Aus der Identität:

$$d(\Delta\varphi \cdot \operatorname{tang}\varphi) = \frac{\Delta\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi^2} - \frac{k^2 \sin\varphi^2\,d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$= (1 - k^2)\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2\,\Delta\varphi} + k^2\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - k^2\frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\Delta\varphi}$$

folgt

$$\Upsilon(\varphi) = \sqrt{a^2 + b^2}\,(\Delta\varphi \operatorname{tang}\varphi) - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}F(\varphi) + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}Z(\varphi),$$

oder auch

$$\Upsilon(\varphi) = \sqrt{a^2 + b^2}\,(\Delta\varphi \operatorname{tang}\varphi) + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,F(\varphi) - \sqrt{a^2 + b^2}\,E(\varphi).$$

Der erste Term hat eine einfache geometrische Bedeutung. Er ist gleich der Länge auf der Tangente in dem zu φ gehörigen Curvenpunkte, diese Länge gemessen vom Curvenpunkte bis zum Fusspunkte des vom Centrum gefällten Lothes*).

126. Die elliptischen Integrale der drei Gattungen oder auch die drei Legendre'schen Normalintegrale werden durch Reihenentwickelungen ausgeführt, indem man die zu integrirende Function in eine Potenzreihe verwandelt und das Integral dieser unendlichen Reihe bildet. Diese Methode erfordert aber zunächst einige allgemeine Untersuchungen.

Viertes Capitel.

Ueber gleichmässige Convergenz, Differentiation und Integration einer unendlichen Reihe.

127. Bei den allgemeinen Sätzen über Potenzreihen (§. 44. IV) wurde bereits darauf hingewiesen, dass sich der Nachweis der Stetigkeit einer durch eine Potenzreihe dargestellten Function sowie die Regel für die Differentiation derselben auf eine bestimmte Eigenschaft dieser Reihen stützt, nämlich auf ihre gleichmässige Convergenz.

Dieser Begriff soll nun im folgenden bei einer beliebigen unendlichen Reihe, welche für ein reelles Intervall convergirt, näher erörtert werden.

Es sei die unendliche Reihe

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots$$

convergent im Intervalle von a bis b; ihre Summe werde mit $F(x)$ bezeichnet. Die Functionen $f_n(x)$, welche nach irgend einem Gesetze unbeschränkt fortgesetzt werden können, seien alle, wie viele man auch bilden mag, stetige Functionen in diesem Intervalle. Diese Voraussetzung ist bei allen folgenden Sätzen festzuhalten.

Die Convergenz der unendlichen Reihe erfordert, dass zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine Stelle n gefunden werden kann, von der ab sämmtliche Reste:

$$R_n = f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots, \quad R_{n+1} = f_{n+1}(x) + f_{n+2} + \ldots, \quad R_{n+k} = f_{n+k}(x) + \ldots$$

ihrem Betrage nach kleiner bleiben als δ (§. 39).

Die unendliche Reihe heisst in dem ganzen Intervalle ausnahmslos gleichmässig convergent, wenn dieses Kriterium der Convergenz für jedes

*) Legendre: Traité des fonctions elliptiques pag. 16.

δ, während x alle Werthe von a bis b durchläuft, durch dasselbe n erfüllt wird; für n hat man erst dann einen anderen Werth zu nehmen, wenn ein anderes δ gegeben ist).*

Ein ausreichendes (nicht nothwendiges) Kriterium gleichmässiger Convergenz liefert der Satz: Convergirt die Reihe aus den numerisch grössten Werthen, welche die Glieder der unendlichen Reihe in dem Intervalle von a bis b erhalten, so ist die Reihe für alle Werthe von x gleichmässig convergent.

Denn alsdann giebt die Zahl n von der ab die Reste $P_n, P_{n+1} \ldots$ der neu gebildeten Reihe kleiner als δ bleiben, auch für jedes x die erforderliche Stelle an.

Beispiel:

$$\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \ldots$$

ist für alle Werthe von x gleichmässig convergent, weil

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

convergirt (§. 47, Anmerk.).

Für eine Reihe, deren Glieder in einem Intervalle alterniren, d. h. abwechselnde Zeichen haben, genügt auch das Kriterium: Die Reihe convergirt gleichmässig, wenn sich zu jeder Zahl δ eine Stelle n ausfindig machen lässt, von der ab für jeden Werth von x die numerischen Werthe der Glieder $f_n(x)$ abnehmen und kleiner bleiben als δ. Denn setzt man:

$$R_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) - f_{n+3}(x) + \ldots,$$

wobei die Grössen f sämmtlich positiv sind, so ist $R_n(x)$ grösser als 0, aber kleiner als $f_n(x)$, weil

$$R_n(x) = [f_n(x) - f_{n+1}(x)] + [f_{n+2}(x) - f_{n+3}(x)] + \ldots,$$
$$R_n(x) = f_n(x) - [f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)] - [f_{n+3}(x) - f_{n+4}(x)] - \ldots$$

128. *Ist eine unendliche Reihe in der Umgebung einer Stelle ihres Convergenzintervalles gleichmässig convergent, so stellt die unendliche Reihe eine an dieser Stelle stetige Function dar.*

Bezeichnet man die Summe der $n-1$ ersten Glieder der Reihe mit $\Sigma(x)$, so ist $F(x) = \Sigma(x) + R_n(x)$.

Da die Reihe in der Umgebung von x gleichmässig convergiren soll, so kann ein n gefunden werden, so dass für jeden Werth von x bis $x \pm h$ abs $R_n(x)$ kleiner bleibt als $\frac{\delta}{3}$, unter δ eine beliebig kleine gegebene Zahl verstanden. Demnach wird, da

*) Heine, Ueber trigonometrische Reihen. Crelle's Journal Bd. 71.

$$\text{abs}\,[F(x \pm h) - F(x)] = \text{abs}\,[\Sigma(x \pm h) - \Sigma(x) + R_n(x \pm h) - R_n(x)]$$

ist,

$$\text{abs}\,[F(x \pm h) - F(x)] \leqq \text{abs}\,[\Sigma(x \pm h) - \Sigma(x)] + \frac{2\delta}{3}.$$

Da die Functionen f stetig sind und Σ eine Summe von endlicher Gliederzahl bedeutet, so kann man h stets so klein aber noch endlich wählen, dass

$$\text{abs}\,[\Sigma(x \pm h) - \Sigma(x)] < \frac{\delta}{3}$$

wird; mithin lässt sich zu jedem δ ein h ausfindig machen, für welches

$$\text{abs}\,[F(x \pm h) - F(x)] < \delta$$

bleibt. Das Kriterium der Stetigkeit ist sonach erfüllt.

Der bewiesene Satz kann auch so ausgesprochen werden: Ist die durch die Reihe dargestellte Function an einer Stelle discontinuirlich, so muss die Reihe in der Umgebung dieser Stelle ungleichmässig convergiren.

Aus dem Satze folgt: Convergirt die Reihe in ihrem Convergenzintervalle ausnahmslos gleichmässig, so stellt sie eine in demselben Intervalle durchweg stetige Function dar.

Die vorstehenden Sätze lassen sich nur unter einer gewissen Voraussetzung umkehren.

Stellt die unendliche Reihe an einer Stelle eine stetige Function dar, so gehört zu jeder Stelle x ein endlicher Werth n, so dass R_n und alle folgenden Reste kleiner sind als $\frac{\delta}{3}$; ferner lässt sich ein h-Werth angeben, für welchen

$\text{abs}\,[F(x \pm h) - F(x)] < \frac{\delta}{3}$ und ebenso $\text{abs}\,[\Sigma(x \pm h) - \Sigma(x)] < \frac{\delta}{3}$.

Demnach folgt aus der Gleichung:

$$F(x \pm h) - F(x) = \Sigma(x \pm h) - \Sigma(x) + R_n(x \pm h) - R_n(x)$$

dass auch

$$\text{abs}\,[R_n(x \pm h)] < \delta.$$

Hieraus folgt aber nicht, dass alle folgenden Reste im Intervalle $\pm h$ kleiner bleiben als δ. Nur dann wird dieses sicher der Fall sein, wenn alle Glieder im Intervalle x bis $x \pm h$ dasselbe Zeichen haben, weil alsdann die Beträge der Reste eine abnehmende Reihe bilden. Sonach lautet der Satz:

Lässt sich in der Umgebung einer Stelle ein endlicher Werth n angeben, von dem ab sämmtliche Glieder der Reihe im Intervalle dasselbe Zeichen behalten, so folgt aus der Stetigkeit der Reihe an dieser Stelle auch ihre gleichmässige Convergenz; oder auch: Convergirt eine

unendliche Reihe in der Umgebung einer Stelle unbedingt, so folgt aus der Stetigkeit an dieser Stelle auch die gleichmässige Convergenz*).

129. Es ist nun zweitens zu untersuchen, unter welcher Bedingung der Differentialquotient einer unendlichen Reihe durch die aus den Ableitungen der einzelnen Glieder gebildete Reihe dargestellt wird. Ich nehme dabei an, dass sämmtliche Functionen $f(x)$ differenzirbar und dass ihre Ableitungen selbst stetig sind. Damit die unendliche Reihe

$$f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \dots f_n'(x) + \dots$$

überhaupt convergire, muss nothwendig

$$\operatorname{Lim} f_n'(x) = 0 \quad \text{für} \quad n = \infty$$

werden**).

Diese Voraussetzung muss für das folgende festgehalten werden.

Beispiel. Die unendliche Reihe:

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

stellt, wie in der Theorie der trigonometrischen Reihen gelehrt wird, für $-\pi < x < +\pi$ den Werth $\frac{1}{2}x$ dar; also eine Function, deren

---

*) Dass in der That die Stetigkeit einer convergenten Reihe für sich allein noch keine hinreichende Bedingung gleichmässiger Convergenz ist, lässt sich durch Beispiele von stetigen aber ungleichmässigen convergenten Reihen, wie sie neuerdings von Du-Bois Reymond, Darboux und Cantor gebildet worden sind, darthun. Ein von Cantor gegebenes Beispiel lautet: Die unendliche Reihe, deren allgemeines Glied ist:

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2+1} - \frac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+1}$$

convergirt, denn es ist $R_n = \frac{nx}{n^2x^2+1}$ für $n = \infty$ Null, und die Summe der Reihe ist die stetige Function:

$$F(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

In der Umgebung der Stelle $x = 0$ convergirt diese Reihe ungleichmässig; denn die Function $R_n(x)$ besitzt für $x = \pm\frac{1}{n}$ einen Maximalwerth gleich $\pm\frac{1}{2}$. Es lässt sich also kein noch so kleines Intervall bei Null angeben, in welchem die Beträge aller Reste von einer Stelle ab kleiner als eine beliebig kleine Zahl bleiben.

**) $\operatorname{Lim} f_n'(x)$ bedeutet, dass zuerst $f_n'(x)$ gebildet und dann $n = \infty$ gesetzt wird. Es ist dies wohl zu unterscheiden von

$$\frac{d \operatorname{Lim} f_n(x)}{dx},$$

wobei zuerst $n = \infty$, sodann die Ableitung genommen wird.

Ist $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, so wird $\operatorname{Lim} f_n'(x) = \operatorname{Lim} \cos nx$ völlig unbestimmt, während $\dfrac{d \operatorname{Lim} \frac{\sin nx}{n}}{dx} = 0$ ist.

Ableitung $\frac{1}{2}$ ist. Aber dieser Werth wird nicht durch die Reihe geliefert, welche durch Differentiation der einzelnen Glieder erhalten wird:

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + \ldots,$$

da diese Reihe überhaupt nicht convergirt, sondern völlig unbestimmt ist, weil $\operatorname{Lim} f_n'(x) = \pm \operatorname{Lim} \cos nx$ für $n = \infty$ alle möglichen Werthe zwischen -1 und $+1$ annimmt.

Um den Differentialquotienten der Function $F(x)$ zu bestimmen an einer Stelle, wo $F(x)$ stetig ist, bilde man zunächst den Differenzenquotienten:

$$1) \quad \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\Sigma(x+\Delta x) - \Sigma(x)}{\Delta x} + \frac{R_n(x+\Delta x) - R_n(x)}{\Delta x}.$$

Bei einem noch so kleinen aber endlichen Werthe Δx hat dieser in Δx stetige Ausdruck einen endlichen bestimmten Werth; man kann demselben die Form geben:

$$2) \quad \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f_1'(x+\Theta\Delta x) + f_2'(x+\Theta\Delta x) + \ldots f'_{n-1}(x+\Theta\Delta x) + \frac{R_n(x+\Delta x) - R_n(x)}{\Delta x}.$$

Lässt man nun Δx nach Null convergiren und bezeichnet $R_n'(x)$ den Differentialquotienten der Restfunction $R_n(x)$, so folgt:

$$3) \qquad F'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots f'_{n-1}(x) + R_n'(x).$$

Ist nun der Rest der ursprünglichen Reihe so beschaffen, dass sich zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine Stelle n angeben lässt, von der ab nicht nur $R_n(x)$, sondern auch $R_n'(x)$ kleiner bleibt als δ, wie gross auch n wird, so geht diese Gleichung in die unendliche Reihe über:

$$4) \qquad F'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots f'_{n-1}(x) + f_n'(x) + \ldots$$

Das Ergebniss lautet: *Besitzt das Restglied einer unendlichen Reihe die Eigenschaft, dass bei gegebenem Werthe von x, $R_n'(x)$ durch Wahl einer unteren Grenze für n beliebig klein wird, so convergirt die aus den Ableitungen der einzelnen Glieder gebildete Reihe und stellt an dieser Stelle den Werth der Ableitung dar.*

Da diese Eigenschaft des Restgliedes bei einer beliebigen Reihe nicht ohne weiteres erkannt werden kann, so ist es von Nutzen, ein anderes Kriterium aufzustellen (nicht nothwendig, aber hinreichend), durch welches in vielen Fällen die Frage entschieden wird:

Convergirt die aus den Ableitungen gebildete Reihe in einem Intervalle gleichmässig, so stellt sie überall in diesem Intervalle die Ableitung der gegebenen Reihe dar.

Um dieses einzusehen, bezeichne man den Werth der als gleichmässig convergent vorausgesetzten Reihe $f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots f_n'(x) + \ldots$

mit $\Phi(x)$, das Restglied derselben von der n^{ten} Stelle ab mit $\mathsf{P}_n(x)$, so geht die Gleichung 2) in die Form über:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=[\Phi(x+\Theta\Delta x)-\mathsf{P}_n(x+\Theta\Delta x)]+\frac{R_n(x+\Delta x)-R_n(x)}{\Delta x}.$$

Man lasse hier zunächst n unendlich werden, sodann setze man $\Delta x=0$. Wird n unendlich, so ändert sich auch der Werth von Θ. Da aber die abgeleitete Reihe gleichmässig convergirt, so lässt sich, welchen Werth auch Θ haben mag, ein n angeben, von dem ab $\mathsf{P}_n(x+\Theta\Delta x)<\delta$ wird bei allen Werthen von Θ. Desgleichen kann man n so gross wählen, dass auch der Betrag des letzten Ausdrucks kleiner als δ wird. Es lässt sich also eine Stelle im Intervalle von x bis $x+\Delta x$ ausfindig machen, an welcher sich die stetige Function Φ beliebig wenig von dem Differenzenquotienten unterscheidet; mithin muss es auch eine Stelle geben, an welcher

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\Phi(x+\Theta\Delta x)$$

wird; und da Φ als gleichmässig convergente Reihe eine stetige Function bedeutet, so wird für $\Delta x=0$:

$$F'(x)=\Phi(x).$$

Reihen, bei welchen diese Kriterien nicht zutreffen, können nicht anders differentiirt werden, als dass man den Werth der unendlichen Reihe für den Differenzenquotienten

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

durch directe Summation zu ermitteln sucht, und alsdann die Grenzbestimmung für Δx vollzieht.

Beispiele.

1) Die unendliche Reihe $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\dots$ hat für $-1<x\leqq+1$ den Werth $l(1+x)$ (§. 47). Diese Reihe convergirt gleichmässig. Die aus den Ableitungen gebildete Reihe:

$$1-x+x^2-x^3+\dots$$

convergirt für $-1<x<+1$ gleichmässig, ist also eine stetige Function. Sie stellt die Ableitung $\frac{1}{1+x}$ dar; aber für $x=1$ besteht dieser Zusammenhang nicht, wiewohl der Differentialquotient des Logarithmus den bestimmten Werth $\frac{1}{2}$ hat.

2) Die unendliche Reihe:

$$F(x)=\frac{4}{\pi}\left\{\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\dots\right\}$$

bedeutet, wie in der Theorie der trigonometrischen Reihen gelehrt wird:

für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ $F(x) = x$, für $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ $F(x) = \pi - x$;

sie ist gleichmässig convergent. Es wird auch

$$F'(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \ldots\right\},$$

mit Ausnahme der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$, an welcher die abgeleitete Reihe unstetig ist, und den Werth Null darstellt, während der vor- und rückwärts genommene Differentialquotient von F bezüglich -1 und $+1$ ist.

3) Die unendliche Reihe, deren allgemeines Glied lautet:

$$f_n(x) = \frac{1}{2n} l(n^2 x^2 + 1) - \frac{1}{2(n+1)} l((n+1)^2 x^2 + 1),$$

convergirt gleichmässig für alle endlichen Werthe von x, da

$$R_n(x) = \frac{1}{2n} l(n^2 x^2 + 1).$$

Denn man erkennt, dass $R_n(x)$ eine Function ist, welche bei gegebenem x mit wachsenden Werthen von n abnimmt, und bei festgehaltenem Werthe von n mit wachsenden Werthen von x zunimmt. Für $x = 0$ ist $R_n(x)$ bei allen Werthen von n gleich 0. Auch an der Stelle Null lässt sich, für ein Intervall von 0 bis h, n so bestimmen, dass $R_n(x)$ kleiner wird als eine beliebige Zahl δ; man braucht nur n so zu wählen, dass $\frac{1}{2n} l(n^2 h^2 + 1) < \delta$. Die Reihe stellt den Werth

$$F(x) = \frac{1}{2} l(x^2 + 1)$$

dar. Es wird auch:

$$F'(x) = \frac{x}{x^2+1} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nx}{n^2x^2+1} - \frac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+1},$$

wiewohl diese Reihe in der Umgebung der Stelle $x = 0$ nicht gleichmässig convergirt; aber das Restglied der ursprünglichen Reihe hat hier die Eigenschaft, dass $\operatorname{Lim} R_n'(x) = \operatorname{Lim} \frac{nx}{n^2x^2+1} = 0$.

4) Der Differentialquotient der unendlichen Reihe:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos(a^n x\pi),$$

welche gleichmässig convergirt wenn $0 < b < 1$, kann, falls das Product $ab > 1$ ist, nicht aus der abgeleiteten Reihe

$$-\pi \sum_{n=0}^{n=\infty} (ab)^n \sin(a^n x\pi)$$

berechnet werden, denn diese Reihe convergirt nicht, weil

$$\operatorname{Lim} (ab)^n \sin(a^n x\pi)$$

für $n = \infty$ nicht Null ist. Es besitzt die $F(x)$ überhaupt keinen bestimmten Werth des Differentialquotienten. (Mittheilung von Weierstrass in dem Aufsatze von Du Bois-Reymond: Journal f. Math. Bd. 79. Eine weitere Classe von Beispielen dieser Art ist von Darboux gegeben worden: Annal. de l'école normale T. VIII pag. 195.)

130. Die Regeln für die Integration einer unendlichen Reihe ergeben sich ohne weitere Untersuchung aus den für die Differentiation aufgestellten Sätzen. Unseren bisherigen Untersuchungen im §. 127 entsprechend nehmen wir an, dass die unendliche Reihe eine im Intervalle von a bis b durchweg stetige Function darstellt. Das bestimmte Integral genommen zwischen zwei dem Intervalle angehörigen Werthen x_0 und x_1 werde mit

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \Phi(x_1) = (x_1 - x_0)\,F(x_0 + \Theta\,(x_1 - x_0))$$

bezeichnet, und ebenso seien die stetigen Functionen $f_n(x)$ integrirt:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_n(x)\,dx = \varphi_n(x_1).$$

Damit die Reihe aus diesen Integralfunctionen überhaupt convergire, muss vor allem

$$\text{Lim}\,\varphi_n(x) = \text{Lim}\int_{x_0}^{x_1} f_n(x)\,dx, \qquad \text{für } n = \infty$$

gleich Null werden. Man darf nicht etwa schliessen, dass diese Bedingung ohne weiteres erfüllt sei, weil

$$\int_{x_0}^{x_1} f_n(x)\,dx = (x_1 - x_0)\,f_n(x_0 + \Theta\,(x_1 - x_0))$$

und $\text{Lim}\,f_n = 0$ ist. Denn es ist zum Beispiel:

$$\text{Lim}\int_0^{x_1} nxe^{-nx^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{Lim}\,(1 - e^{-nx_1^2}) = \frac{1}{2}$$

und nicht gleich $\quad x_1\,\text{Lim}\,(n\Theta x_1 e^{-n\Theta^2 x_1^2}) = 0.$

Die aus den Integralfunctionen der einzelnen Glieder gebildete Reihe stellt das Integral der ursprünglichen Reihe dar, wenn sie eine stetige Function von x ist, und ihre Ableitung für jeden Werth im Intervall x_0 bis x_1 gleich der Reihe $F(x)$ ist.

Dazu muss nach dem ersten Satze des vorigen §. *die Reihe der Integralfunctionen die Eigenschaft haben, dass zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine Stelle n ausfindig gemacht werden kann, von der ab die Ableitung des Restgliedes $R_n'(x)$ kleiner bleibt als δ.*

Nach dem zweiten Satze aber ist es eine hinreichende Bedingung, *dass die gegebene Reihe gleichmässig convergirt.*

Man kann diesen zweiten Satz direct folgendermassen einsehen: Ist

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots f_{n-1}(x) + \mathsf{P}_n(x),$$

und lässt sich für das ganze Intervall von x_0 bis x_1 ein n ausfindig machen, so dass für diesen sowie für alle grösseren Werthe von n die stetige Function $\mathsf{P}_n(x)$ ihrem Betrage nach kleiner als δ bleibt, so wird:

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathsf{P}_n(x)\,dx = (x_1 - x_0)\,\mathsf{P}_n(x_0 + \Theta\,(x_1 - x_0)), \qquad \text{also}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_1) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) + (x_1 - x_0)\,\mathsf{P}_n(x_0 + \Theta(x_1 - x_0)).$$

Lässt man nun n beliebig wachsen, so wird

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_1) \dots + \varphi_{n-1}(x_1) \dots,$$

und diese Reihe convergirt im ganzen Intervalle von x_0 bis x_1 ebenfalls gleichmässig.

Nach den über das bestimmte Integral bewiesenen Sätzen können diese Untersuchungen auch ausgedehnt werden auf Reihen, durch welche Functionen dargestellt sind, die in einzelnen Punkten discontinuirlich oder unendlich werden, oder auch auf das bestimmte Integral mit unendlicher Grenze, vorausgesetzt immer, dass die Reihe der Integralfunctionen convergent bleibt.

Die in der vorigen Nr. angeführten Beispiele können umgekehrt auch betrachtet werden als Beispiele für die Integration der unendlichen Reihe.

Als ein Beispiel, in welchem die Integration nicht geleistet ist, wiewohl die Reihe der Integralfunctionen convergirt, führe ich das folgende von Darboux gegebene an:

$$F(x) = xe^{-x^2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(nxe^{-nx^2} - (n+1)\,x^{-(n+1)x^2}\right)$$

ist eine für alle Werthe von x convergente Reihe und eine stetige Function, wiewohl die Reihe ungleichmässig convergirt in der Umgebung der Stelle $x = 0$. Denn es ist $R_n(x) = n\,x\,e^{-nx^2}$ und für $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ wird $R_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{1}{2}}$.

Durch Integration der einzelnen Glieder zwischen Null und x erhält man

$$\int_0^x nx\,e^{-nx^2}\,dx - \int_0^x (n+1)\,x e^{-(n+1)x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-nx^2} + \frac{1}{2}e^{-(n+1)x^2}.$$

Die aus diesen Integralfunctionen gebildete unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-nx^2}+\frac{1}{2}e^{-(n+1)x^2}\right)$$

convergirt, sie stellt für jeden endlichen Werth von x die Function $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ dar, für $x=0$ aber den Werth 0, sie ist also eine unstetige Function an dieser Stelle und überhaupt im allgemeinen nicht gleich dem Werthe:

$$\int_0^x F(x)\,dx=\int_0^x xe^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}(1-e^{-x^2}).$$

131. Wendet man die vorstehenden Sätze auf eine Reihe an, welche nach Potenzen irgend einer stetigen Function $f(x)$ fortschreitet:

$$a_0+a_1 f(x)+a_2[f(x)]^2+a_3[f(x)]^3+\ldots a_n f[(x)]^n+\ldots,$$

so erkennt man:

Erstens: Solch eine Reihe ist innerhalb des Intervalles, in welchem sie convergirt, eine stetige Function von x; denn setzt man $f(x)=z$, so ist die unbedingt convergirende Potenzreihe:

$$a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots a_n z^n+\ldots$$

eine gleichmässig convergente Reihe. Auch an den Grenzen des Convergenzintervalles bleibt die Potenzreihe eine stetige Function, wenn sie nur bedingt convergirt (§. 44. IV.); sie convergirt dann immer gleichmässig.

Zweitens: Die durch Differentiation nach x abgeleitete Reihe:

$$f'(x)[a_1+2a_2 f(x)+3a_3[f(x)]^2+\ldots na_n[f(x)]^{n-1}+\ldots]$$

ist, so lange sie convergirt, stetig und stellt die Ableitung der gegebenen Reihe dar; sie convergirt aber sicher innerhalb des Intervalles der ursprünglichen Reihe.

Drittens: Das Integral der gegebenen Reihe, genommen zwischen zwei Werthen x_0 und x_1 des Convergenzintervalles, wird durch die gleichmässig convergente Reihe

$$a_0+a_1\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\,dx+a_2\int_{x_0}^{x_1}[f(x)]^2\,dx+\ldots a_n\int_{x_0}^{x_1}[f(x)]^n\,dx+\ldots$$

gebildet. Convergirt die Reihe auch an den Grenzen des Convergenzintervalles und bleibt sie dabei stetig, so stellt sie das Integral einschliesslich der Grenzen dar.

132. Darstellung der Function arcsin durch eine Reihe.

Es ist $\arcsin x=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Ist $x^2<1$, so entsteht die Entwicklung:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \dots \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}x^{2n}\dots,$$

folglich ist

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \dots \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\dots$$

Diese Reihe convergirt auch noch für $x^2 = 1$, wiewohl die voranstehende Binominalreihe nicht mehr convergent ist.

Denn die Glieder der Reihe:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{9} + \dots$$

sind kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \dots$$

Diese Reihe convergirt aber und hat den Werth 2. Denn es ist

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^3}{6} + \dots$$

convergent auch für den Werth $x = 1$.

Es ist also

$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \dots$$

Das bestimmte Integral $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ hat (wie schon §. 107 angegeben wurde) den endlichen Werth $\frac{\pi}{2}$, obgleich die zu integrirende Function an der oberen Grenze unendlich wird.

133. Das elliptische Integral:

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} \qquad (k^2 < 1)$$

lässt sich nach Potenzen von k entwickeln:

$$(1-k^2\sin\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin\varphi^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4\sin\varphi^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\sin\varphi^6 + \dots$$

also wird:

$$F(\varphi) = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \varphi + \frac{1}{2}k^2\int\limits_0^\varphi \sin\varphi^2 d\varphi + \frac{1.3}{2.4}k^4\int\limits_0^\varphi \sin\varphi^4 d\varphi +$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\int\limits_0^\varphi \sin\varphi^6 d\varphi \dots, \qquad (k^2\sin\varphi^2 < 1).$$

Die Integrale, welche hierbei auszuführen sind, gehören, wie man aus der Substitution: $\sin\varphi = x$ erkennt, zu den in §. 108 unter-

suchten binomischen Integralen, und werden vermittelst der „theilweisen“ Integration bestimmt; es ist:

$$\int \sin\varphi^{2m} d\varphi = -\int \sin\varphi^{2m-1}\, d(\cos\varphi) = -\sin\varphi^{2m-1}\cos\varphi + \\ + (2m-1)\int \sin\varphi^{2m-2}\cos\varphi^2\, d\varphi,$$

folglich, wenn in der letzten Form $\cos\varphi^2$ durch $1 - \sin\varphi^2$ ersetzt wird:

$$\int \sin\varphi^{2m} d\varphi = -\frac{\sin\varphi^{2m-1}\cos\varphi}{2m} + \frac{2m-1}{2m}\int \sin\varphi^{2m-2}\, d\varphi$$

und

$$\int_0^\varphi \sin\varphi^{2m} d\varphi = -\frac{\sin\varphi^{2m-1}\cos\varphi}{2m} + \frac{2m-1}{2m}\int_0^\varphi \sin\varphi^{2m-2}\, d\varphi.$$

Für die Grenzen Null und $\frac{\pi}{2}$ wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi^{2m} d\varphi = \frac{2m-1}{2m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi^{2m-2}\, d\varphi = \frac{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots 1}{(2m)(2m-2)(2m-4)\ldots 2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Es ist also das „vollständige Integral“:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \ldots\right].$$

Desgleichen erhält man für das Integral

$$E(\varphi) = \int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi = F(\varphi) - k^2 Z(\varphi)$$

die Entwickelung:

$$(1 - k^2\sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}k^2\sin\varphi^2 - \frac{1}{2.4}k^2\sin\varphi^4 - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\sin\varphi^6 + \ldots$$

$$E(\varphi) = \varphi - \frac{1}{2}k^2\int_0^\varphi \sin\varphi^2 d\varphi - \frac{1}{2.4}k^4\int_0^\varphi \sin\varphi^4 d\varphi - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\int_0^\varphi \sin\varphi^6 d\varphi + \ldots,$$

$$(k^2\sin\varphi^2 \leqq 1),$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3k^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5k^6 + \ldots\right]$$

$$(k^2 \leqq 1).$$

Die vorstehenden Reihen convergiren langsam, wenn der Werth von k^2 nahezu 1 ist; für diesen Fall hat Legendre (Fonctions ellipt. S. 65) rascher convergente Reihen aufgestellt, welche nach Potenzen des complementären Modul $k' = \sqrt{1 - k^2}$ fortschreiten.

134. Um das Gesetz für die explicite Darstellung von $F(\varphi)$ und $E(\varphi)$ zu erkennen, ist es zweckmässig, die Formen einzuführen, durch welche die Potenzen von $\sin\varphi$ durch Sinus oder Cosinus des Vielfachen von φ ausgedrückt werden*). Zufolge der Gleichungen (§. 67):

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

setze man:

$$1)\qquad \Delta^2 = 1 - k^2\sin\varphi^2 = \frac{(1+ce^{2i\varphi})(1+ce^{-2i\varphi})}{(1+c)^2} = 1 - \frac{4c}{(1+c)^2}\sin\varphi^2$$

$$k = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \qquad c = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} < 1.$$

Nun sind

$$2)\qquad \begin{aligned} P &= (1+ce^{2i\varphi})^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}ce^{2i\varphi} + \frac{1.3}{2.4}c^2e^{4i\varphi} - \frac{1.3.5}{2.4.6}c^3e^{6i\varphi} + \dots \\ Q &= (1+ce^{-2i\varphi})^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}c^2e^{-2i\varphi} + \frac{1.3}{2.4}c^2e^{-4i\varphi} - \frac{1.3.5}{2.4.6}c^3e^{-6i\varphi} + \dots \end{aligned}$$

unbedingt convergente Reihen ($c < 1$), also wird der Werth

$$\frac{1}{\Delta} = (1+c)PQ$$

nach der Multiplicationsregel (§. 78) ausgeführt, eine ebenfalls unbedingt convergente Reihe ergeben, welche sich nach Cosinus der Vielfachen von φ ordnen lässt, wenn wiederum

$$\cos(m\varphi) = \frac{e^{im\varphi} + e^{-im\varphi}}{2}$$

gesetzt wird.

Es ergiebt sich:

$$3)\qquad \frac{1}{\Delta} = A - 2A_1\cos 2\varphi + 4A_2\cos 4\varphi - 6A_3\cos 6\varphi + \dots$$

$$A = (1+c)\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2c^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2c^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2c^6 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2c^8 + \dots\right.$$

$$A_1 = \frac{1+c}{1}\left[\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}c^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}c^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c^7 + \dots\right.$$

$$A_2 = \frac{1+c}{2}\left[\frac{1.3}{2.4}c^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}c^4 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c^6 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}c^8 + \dots\right.$$

$$A_3 = \frac{1+c}{3}\left[\frac{1.3.5}{2.4.6}c^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c^5 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}c^7 + \dots\right]$$

. . . .

Die Reihe der Zahlen A, A_1, $2A_2$, $3A_3$, $4A_4$ nimmt fortwährend ab und hat die Null zur Grenze, denn es ist

---

*) Legendre: a. a. O. S. 273.

$$A_1 < cA, \quad 2A_2 < cA_1, \quad 3A_3 < 2cA_2, \quad 4A_4 < 3cA_3 \ldots$$

folglich

$$A_1 < cA, \quad 2A_2 < c^2A, \quad 3A_3 < c^3A, \quad 4A_4 < c^4A \ldots .$$

Es convergirt also, da $c < 1$, die Reihe 3) auch wenn man allen Gliedern die absolut grössten Werthe beilegt, welche sie überhaupt annehmen können, folglich convergirt sie gleichmässig (§. 127) und stellt eine im Intervalle von Null bis $\frac{\pi}{2}$ stetige Function dar. Demnach wird durch Integration erhalten:

$$4) \quad F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = A\varphi - A_1 \sin 2\varphi + A_4 \sin 4\varphi - A_6 \sin 6\varphi + \ldots$$

Es ist insbesondere für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$5) \qquad A = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{2}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Aber auch die übrigen Coefficienten dieser Reihe lassen sich als bestimmte Integrale darstellen. Denn multiplicirt man die Reihe 3) successive mit $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\cos 6\varphi \ldots$ und integrirt diese Producte zwischen den Grenzen Null und $\frac{\pi}{2}$, so wird, da:

für $m \gtrless n$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2m\varphi \cos 2n\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos 2(m+n)\varphi + \cos 2(m-n)\varphi]\, d\varphi = 0,$$

für $m = n$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2m\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = -A_1\frac{\pi}{2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = 2A_2\frac{\pi}{2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 6\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = -3A_3\frac{\pi}{2} \cdots$$

Die Berechnung von A_1 führt auf die Werthe $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$; denn es ist:

$$7) \qquad \frac{\pi}{2}A_1 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-2\sin\varphi^2)\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{2}{k^2}\left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Auch kann man für die übrigen Coefficienten durch Differentiation der Reihe 3) Recursionsformeln angeben:

$$\frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta^3} = 4A_1 \sin 2\varphi - 16A_2 \sin 4\varphi + 36A_3 \sin 6\varphi - \dots$$

ist eine gleichmässig convergente Reihe und folglich war die Differentiation gestattet (§. 129). Multiplicirt man die linke Seite mit $\frac{2\Delta^2}{k^2}$, die rechte mit dem gleichen Werthe:

$$\frac{2-k^2}{k^2} + \cos 2\varphi = \lambda + \cos 2\varphi$$

und ordnet dieselbe nach Sinus der Vielfachen von φ, da

$$\sin 2m\varphi \cos 2\varphi = \frac{1}{2}[\sin(2m+2)\varphi + \sin(2m-2)\varphi],$$

so wird:

$$\frac{\sin 2\varphi}{\Delta} = \sin 2\varphi[4A_1\lambda - 8A_2] - \sin 4\varphi[16A_2\lambda - 2A_1 - 18A_3]$$
$$+ \sin 6\varphi[36A_3\lambda - 8A_2 - 32A_4] - \sin 8\varphi[64A_4\lambda - 18A_3 - 50A_5]$$

. . . .

$$(-1)^m \sin(2m-2)\varphi\left[(2m-2)^2 A_{m-1}\lambda - \frac{(2m-4)^2}{2}A_{m-2} - \frac{(2m)^2}{2}A_m\right]$$

. . . .

Andererseits erhält man durch Multiplication der Gleichung 3) mit $\sin 2\varphi$:

$$\frac{\sin 2\varphi}{\Delta} = \sin 2\varphi(A - 2A_2) - \sin 4\varphi[A_1 - 3A_3] + \sin 6\varphi[2A_2 - 4A_4]$$
$$\dots (-1)^m \sin(2m-2)\varphi[(m-2)A_{m-2} - mA_m] \dots$$

Diese Reihe muss mit der obigen identisch sein; und diese Identität kann, da beide Reihen gleichmässig convergiren, nur so bestehen, dass die Coefficienten der entsprechenden Sinusglieder in beiden Reihen übereinstimmen. Man erkennt dies, indem man, wie bei der Ableitung der Gleichungen 6) jeden Coefficienten durch ein bestimmtes Integral darstellt. Mithin ist

$$A - 2A_2 = 4A_1\lambda - 8A_2, \quad A_1 - 3A_3 = 16A_2\lambda - 2A_1 - 18A_3,$$
$$(m-2)A_{m-2} - mA_m = (2m-2)^2 A_{m-1}\lambda - \frac{(2m-4)^2}{2}A_{m-2} - \frac{(2m)^2}{2}A_m,$$

oder

8) $2m(2m-1)A_m = 2(2m-2)^2 A_{m-1}\lambda - (2m-3)(2m-4)A_{m-2}$.

Sonach sind die Coefficienten der Reihe 4) durch die Gleichungen bestimmt:

$$A = \frac{2}{\pi}F\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad A_1 = \lambda F\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{k^2}E\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad A_2 = \frac{4A_1\lambda - A}{6},$$
$$A_3 = \frac{16A_2\lambda - 3A_1}{15} \text{ u. s. w.}$$

In gleicher Weise erhält man eine explicite Darstellung für das Integral $E(\varphi)$.

Das dritte Normalintegral $\Pi(\varphi)$ erfordert besondere Untersuchungen, auf welche hier nicht eingegangen werden soll, da überhaupt diese Reihen durch rascher convergente Entwicklungen ersetzt werden können, Untersuchungen, die eine ausführliche Theorie der elliptischen Integrale erfordern.

Fünftes Capitel.

Die Integrale transscendenter Functionen*).

135. Bedeutet $f(e^x)$ eine rationale Function von e^x, so wird das Integral $\int f(e^x)\,dx$ durch die Substitution $z = e^x$, $\frac{dz}{z} = dx$ in ein rationales verwandelt.

Das Integral einer rationalen Function von $\sin x$ und $\cos x$ kann durch die Substitutionen

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

in ein Integral der obigen Form und folglich auch in das Integral einer rationalen Function verwandelt werden.

Da hierbei imaginäre Grössen eingeführt werden, so ist in der Regel die Substitution vorzuziehen

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = z, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Da $\int x\,df = xf - \int f\,dx$, so lässt sich auch $\int x\,df$ nach der Regel der rationalen Functionen ausführen, wenn f eine beliebige rationale Function von $\sin x$ und $\cos x$ ist.

136.

$$\int e^x x^m\,dx$$

$$\int e^x x^m\,dx = x^m e^x - m\int x^{m-1} e^x\,dx$$

$$\int \frac{e^x}{x^m}\,dx = -\frac{e^x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{(m-1)}\int \frac{e^x\,dx}{x^{m-1}}.$$

Ist m eine positive ganze Zahl, so erhält man durch die erste Formel:

---

*) Ohne auf eine allgemeine Untersuchung einzugehen, unter welchen Bedingungen die Integrale transscendenter Functionen sich in geschlossener Form auswerthen lassen, stelle ich in diesem Capitel nur diejenigen Formeln zusammen, auf welche man bei den einfachsten Anwendungen der Analysis geführt wird. Euler: Cap. IV und V. Allgemeine Untersuchungen dieser Integrale sind von Hermite ausgeführt worden: Cours d'analyse S. 320.

$$\int e^x x^m dx = m!\, e^x \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{(-1)^\nu_{\cdot} x^{m-\nu}}{m-\nu\,!}.$$

Die zweite Formel führt für ein ganzzahliges m auf die Gleichung:

$$\int \frac{e^x}{x^m} dx = -e^x \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \frac{1}{\nu!(m-1)_\nu x^{m-\nu}} + \frac{1}{m-1!} \int \frac{e^x dx}{x}.$$

Neue Formen desselben Integrales ergeben sich durch Substitutionen:

$$\int x^m e^{kx} dx = \frac{1}{k^{m+1}} \int y^m e^y dy \qquad \left(x = \frac{y}{k}\right)$$

$$\int x^m e^{kx} dx = \int (l\,y)^m y^{k-1} dy \qquad (x = l(y)).$$

137. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{x} = \int \frac{dy}{l(y)} \qquad [x = l(y)]$ (Integral-Logarithmus).

Es ist $\displaystyle\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^2 + \cdots \frac{1}{n!}x^{n-1} + \cdots$

also

1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{x} dx = l(x) + x + \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^3}{3!3} + \cdots \frac{x^n}{n!n} + \cdots$

Das bestimmte Integral kann zwischen zwei Grenzen genommen werden, welche die Null nicht einschliessen, also entweder zugleich positiv oder zugleich negativ sind:

$$\int_a^b \frac{e^x}{x} dx = l\left(\frac{b}{a}\right) + (b-a) + \frac{1}{2!2}(b-a)^2 + \frac{1}{3!3}(b-a)^3 + \cdots$$

Ebenso ist

2) $\displaystyle\int \frac{e^{-x} dx}{x} = -\int \frac{dx}{l(y)} = l(x) - x + \frac{x^2}{2!2} - \frac{x^3}{3!3} + \cdots (-1)^n \frac{x^n}{n!n} - \cdots$

$$(x = -l(y)).$$

Es tritt hier aber noch ein besonderer Fall ein. Da die Function $\frac{1}{l(y)}$ in einem endlichen Intervalle, welches die Einheit nicht enthält, also z. B. von $y = 0$ bis zu irgend einem echten Bruche y' sich erstreckt, endlich und stetig ist, so muss das Integral

$$\int_0^{y'} \frac{dy}{l(y)}, \text{ also auch das Integral } \int_\infty^{x'} \frac{e^{-x} dx}{x} \qquad (x' = -l(y'))$$

unter x' irgend eine positive Zahl verstanden, einen bestimmten Werth haben (§. 106). Für die Grenze $x = +\infty$ convergirt aber die vorstehende Reihe 2) nicht mehr. Man erkennt also, dass:

$$3) \quad \int\limits_{+\infty}^{x} \frac{e^{-x}\,dx}{x} = l(+x) - x + \frac{x^2}{2!2} - \frac{x^3}{3!3} + (-1)^n \frac{x^n}{n!\,n} + \cdots + C.$$

sein muss, doch ist der Werth der Constante C noch zu bestimmen. Bezeichnet man die convergente Reihe:

$$l(x) - x + \frac{x^2}{2!2} - \frac{x^3}{3!3} + \cdots$$

mit $F(x)$, so muss, da das Integral für $x = \infty$ Null wird,

$$F(\infty) + C = 0$$

sein. Setzt man nun $C = -F(a)$, unter a eine grosse Zahl verstanden, so erhält man einen angenäherten Werth für C, dessen Fehler man beurtheilen kann.

Bildet man nämlich die Function $\varphi(x) = \frac{1}{a}(e^{-a} - e^{-x})$, so ist die Ableitung derselben $\varphi'(x) = \frac{e^{-x}}{a}$. Da nun $F'(x) = \frac{e^{-x}}{x}$, so wird $\varphi'(x) > F'(x)$ falls $x > a$. Folglich wachsen die Functionen $F(x) - F(a)$ und $\varphi(x)$ für $x \geqq a$ beide stetig von Null an, so dass die zweite Function immer grösser ist als die erste; mithin wird

$$\varphi(\infty) = \frac{e^{-a}}{a} > F(\infty) - F(a),$$

also
$$F(\infty) < F(a) + \frac{e^{-a}}{a} \cdot$$

Der Fehler, welcher begangen wird, indem man $C = F(a)$ setzt, ist also kleiner als $\frac{e^{-a}}{a}$.*) Auf diese Weise kann man, indem z. B. $a = 10$ angenommen wird, den Werth von C aus der Gleichung $F(10)$ bestimmen, mit einer Abweichung kleiner als $\frac{e^{-10}}{10} < 0{,}00001$.

Der Werth von C, die Euler'sche Constante, für welche §. 165 rascher convergente Reihen gegeben werden, beträgt: 0,577 215 664 9 . . .

138. $\int x^m \cos x\; dx, \qquad \int x^m \sin x\, dx.$

$$\int x^m \cos x\, dx = x^m \sin x - m\int x^{m-1} \sin x\, dx =$$
$$= x^m \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - m\int x^{m-1} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx,$$
$$\int x^m \sin x\, dx = -x^m \cos x + \int x^{m-1} \cos x\, dx =$$
$$= +x^m \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - m\int x^{m-1} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx.$$

---

*) Minding, Handbuch der Differential- und Integralrechnung, S. 191.

Für ein positives ganzes m wird also:

$$\int x^m \cos x\, dx = m! \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{x^\nu}{\nu!}(-1)^{m-\nu}\cos\left(x - \frac{m-\nu+1}{2}\pi\right),$$

$$\int x^m \sin x\, dx = m! \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{x^\nu}{\nu!}(-1)^{m-\nu}\sin\left(x - \frac{m-\nu+1}{2}\pi\right).$$

Ebenso wird:

$$\int \frac{\cos x\, dx}{x^m} = -\frac{\cos x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\int\frac{\sin x\, dx}{x^{m-1}},$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{x^m} = -\frac{\sin x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int\frac{\cos x\, dx}{x^{m-1}}.$$

In diesem Falle wird man bei einem ganzen positiven Werthe von m auf die Integrale

$$\int \frac{\cos x\, dx}{x}, \qquad \int \frac{\sin x}{x}\, dx$$

geführt, die nur durch Reihenentwickelung gelöst werden können. Es ist:

$$\int \frac{\cos x}{x}\, dx = l(x) - \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^4}{4!4} - \frac{x^6}{6!6} \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{2n!2n} \cdots$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1!\,2n+1} \cdots.$$

Das erste Integral gilt für jedes Intervall, welches die Zahl Null nicht einschliesst, das zweite unbeschränkt. Auch für unendlich werdende Grenzen müssen sich bestimmte Werthe ergeben (s. §. 155).

139. Das Integral $\int \sin x^m \cos x^n\, dx$

führt durch die Substitution

$$\sin x = z^{\frac{1}{2}}, \quad \cos x = (1-z)^{\frac{1}{2}}, \quad dx = \frac{\frac{1}{2}dz}{z^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

auf das binomische Integral:

$$\frac{1}{2}\int z^{\frac{m-1}{2}}(1-z)^{\frac{n-1}{2}}\, dz.$$

Nach den in §. 117 angegebenen Sätzen erkennt man, dass dieses Integral sich auf ein rationales bringen lässt, wenn einer der Werthe

$$\frac{m-1}{2}, \quad \frac{n-1}{2}, \quad \frac{m+n}{2}$$

eine ganze Zahl ist; eine dieser Gleichungen ist sicherlich erfüllt, wenn m und n beide ganze Zahlen sind. Im übrigen finden die im §. 118 aufgestellten Recursionsformeln auf das vorliegende Integral Anwendung.

Man kann diese sechs Recursionsformeln unmittelbar mit Beibehaltung der trigonometrischen Form anschreiben, so dass sie lauten:

$$\text{I.}\quad \int \sin x^m \cos x^n\, dx = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2}\, dx,$$

$$\text{II.}\quad \int \sin x^m \cos x^n\, dx = -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin x^{m-2} \cos x^{n+2}\, dx.$$

Schreibt man in der ersten Gleichung auf der rechten Seite: $\sin x^{m+2} = \sin x^m(1-\cos x^2)$, in der zweiten Gleichung: $\cos x^{n+2} = \cos x^n(1-\sin x^2)$, so folgt:

$$\text{III.}\quad \int \sin x^m \cos x^n\, dx = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin x^m \cos x^{n-2}\, dx,$$

$$\text{IV.}\quad \int \sin x^m \cos x^n\, dx = -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin x^{m-2} \cos x^n\, dx.$$

Löst man die Gleichungen nach den rechts stehenden Integralen auf, indem man in der Gleichung III. statt $n-2$ wieder n, in der Gleichung IV. statt $m-2$ m schreibt, so erhält man:

$$\text{V.}\quad \int \sin x^m \cos x^n\, dx = -\frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin x^m \cos x^{n+2}\, dx,$$

$$\text{VI.}\quad \int \sin x^m \cos x^n\, dx = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin x^{m+2} \cos x^n\, dx.$$

Die Gleichungen III. und IV. dürfen nicht auf den Fall angewandt werden, dass $m+n=0$ ist. Hier hat man für $n = -m = -\frac{\mu}{\nu}$

$$\int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^m dx = \int (\operatorname{tang} x)^{\frac{\mu}{\nu}}\, dx = \nu \int \frac{z^{\mu+\nu-1}}{1+z^{2\nu}}\, dz \qquad (\operatorname{tang} x = z^\nu).$$

Desgleichen sind die übrigen Gleichungen unbrauchbar, je nachdem m oder n gleich -1 ist. Aber auch in diesem Falle ist die Bedingung der Integrirbarkeit vermittelst eines rationalen Integrales erfüllt.

Die Recursionsformeln lehren, dass in allen anderen Fällen die Exponenten m und n auf Zahlen gebracht werden können, die zwischen -1 und $+1$ oder Null und 2 gelegen sind. Sind m und n ganze Zahlen, so wird man stets durch eine wiederholte Anwendung der Recursionsformeln auf eines der acht Integrale geführt:

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dz}{z} = l(z) + C = l\left(\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x\right) + C. \qquad (§.\ 135.)$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dy}{\sin y} = l\left(\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} x + \tfrac{\pi}{4}\right)\right) + C. \qquad \left(y = x + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\, l(\cos x) + C. \qquad \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = l(\sin x) + C.$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = 2\int \frac{dx}{\sin 2x} = l\,(\operatorname{tang} x) + C.$$

140. $$\int e^{kx} \sin x^n \, dx.$$

Setzt man $e^{kx}\,dx = d\left(\frac{e^{kx}}{k}\right)$, so folgt:

$$1.\quad \int e^{kx} \sin x^n \, dx = \frac{e^{kx}\sin x^n}{k} - \frac{n}{k}\int e^{kx} \sin x^{n-1} \cos x \, dx.$$

Ebenso findet man für dieses neue Integral:

$$\int e^{kx} \sin x^{n-1} \cos x \, dx = \frac{e^{kx}\sin x^{n-1}\cos x}{k} - \frac{(n-1)}{k}\int e^{kx} \sin x^{n-2} \cos x^2 \, dx + $$
$$+ \frac{1}{k}\int e^{kx} \sin x^n \, dx,$$

oder, da $\cos x^2 = 1 - \sin x^2$,

$$2.\quad \int e^{kx} \sin x^{n-1} \cos x \, dx = \frac{e^{kx}\sin x^{n-1}\cos x}{k} - \frac{(n-1)}{k}\int e^{kx} \sin x^{n-2} \, dx + $$
$$+ \frac{n}{k}\int e^{kx} \sin x^n \, dx.$$

Vereinigt man die Gleichungen 1 und 2, so folgt:

$$3.\quad \int e^{kx} \sin x^n \, dx = \frac{e^{kx}\sin x^{n-1}(k \sin x - n \cos x)}{k^2 + n^2} + $$
$$+ \frac{n(n-1)}{k^2+n^2}\int e^{kx} \sin x^{n-2} \, dx.$$

Für $n = 1$ ist

$$\int e^{kx} \sin x \, dx = \frac{e^{kx}(k \sin x - \cos x)}{k^2 + 1}.$$

Für $n = 0$ hat man von vornherein:

$$\int e^{kx} \, dx = \frac{e^{kx}}{k}.$$

Auf eines dieser beiden Integrale wird jedes Integral, bei welchem n eine ganze positive Zahl ist, durch die Formel 3 zurückgeführt.

Ist k eine negative Zahl, so kann das Integral auch für eine positiv unendliche Grenze genommen werden, denn wiewohl $\sin x$ und $\cos x$ völlig unbestimmt (zwischen -1 und $+1$) werden, so wird doch in der Integralfunction e^{kx} stetig in Null übergehen. Es ist also

$$\int_0^\infty e^{kx} \sin x \, dx = \frac{1}{k^2+1} \qquad (k < 0).$$

Desgleichen findet man:

$$4.\quad \int e^{kx} \cos x^n\, dx = \frac{e^{kx} \cos x^{n-1} (k \cos x + n \sin x)}{k^2 + n^2} + \\ + \frac{n(n-1)}{n^2 + k^2} \int e^{kx} \cos x^{n-2}\, dx.$$

Es ist

$$\int e^{kx} \cos x\, dx = \frac{e^{kx} (k \cos x + \sin x)}{k^2 + 1}$$

und

$$\int_0^\infty e^{kx} \cos x\, dx = -\frac{k}{k^2 + 1} \qquad (k < 0).$$

141. Treten in der zu integrirenden Function die cyclometrischen Functionen auf, so führt ebenfalls das Verfahren theilweiser Integration in vielen Fällen zu einer Lösung oder Vereinfachung des Problemes. Ist im Integral

$$\int X \arcsin x\, dx$$

die Function X integrirbar, so wird:

$$\int X \arcsin x\, dx = \arcsin x \int X\, dx - \int \left[\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int X\, dx\right].$$

Z. B.

$$\int x^n \arcsin x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dies neue binomische Integral lässt sich in geschlossener Form ausdrücken, wenn n eine ganze Zahl ist. Man kann auch die cyclometrischen Functionen beseitigen durch Einführung algebraischer und goniometrischer, indem man setzt

$$\arcsin x = z, \quad x = \sin z, \quad dx = \cos z\, dz.$$

So ist z. B.

$$\int (\arcsin x)^n\, dx = \int z^n . \cos z\, dz.$$

Sechstes Capitel.

Allgemeine Sätze über das bestimmte Integral als Grenzwerth einer Summe.

142. Das Grundproblem der Integralrechnung in seiner einfachsten Fassung (§. 101) führt auf die Ermittelung des Grenzwerthes einer Summe mit beliebig vielen Summanden. Demnach erweitert sich das Problem der Integralrechnung unabhängig vom Differentialbegriffe zu

der Frage: *Wie beschaffen muss eine Function $f(x)$ im Intervall von $x = a$ bis $x = b$ sein, damit die Summe*

$$S = d_1 f(a + \Theta_1 d_1) + d_2 f(x_1 + \Theta_2 d_2) + d_3 f(x_2 + \Theta_3 d_3) + \cdots d_n f(x_{n-1} + \Theta_n d_n)$$

einen bestimmten endlichen Grenzwerth erhält, wenn die Theilung des Intervalles a bis b durch die Punkte:

$$x_1 = a + d_1, \quad x_2 = x_1 + d_2, \quad x_3 = x_2 + d_3 \ldots, b = x_{n-1} + d_n$$

beliebig fortgesetzt wird, während die Strecken d nach Null convergiren? Wir haben hier gleich die allgemeinste Form vor uns, in der diese Frage gestellt werden kann. Die Grössen Θ bezeichnen echte Brüche, die auch gleich null oder gleich eins sein können, so dass die Functionswerth jedesmal beliebig im Innern oder an den Grenzen eines Intervalles ausgewählt werden. Der Grenzwerth soll von den willkürlichen Grössen Θ ganz unabhängig werden. Noch allgemeiner ist es, sich unter der Bezeichnung $f(x + \Theta_p d_p)$ überhaupt irgend einen Werth zu denken, welcher zwischen dem grössten und dem kleinsten Werthe gelegen ist (einschliesslich dieser Grenzen), welche die Function im Intervall d_p überhaupt annimmt. Ist sie unstetig im Intervall, so braucht dieser gewählte Werth unter den Werthen, die die Function annimmt, nicht vorzukommen. Ob dann dieser Grenzwerth, betrachtet als Function der oberen Grenze, als Ableitung die Function $f(x)$ besitzt oder nicht, ist eine secundäre Frage, die besonders beantwortet werden muss.

Während im §. 102 die Untersuchung sich einfach gestalten liess, weil $f(x)$ als stetig angenommen war, wird sie nunmehr anders zu führen sein, da ja die für die Function $f(x)$ nothwendigen Voraussetzungen erst ermittelt werden sollen. Riemann, der zuerst das Problem präcis formulirt hat, hat auch die Lösung desselben angegeben*). Wir beschränken uns zunächst auf Functionen, welche in dem endlichen Intervalle von a bis b an keiner Stelle unendlich werden, so dass sich also eine obere Grenze G und eine untere Grenze g (positiv oder negativ) bezeichnen lässt, zwischen denen alle Werthe der Function enthalten sind.

Die Function soll für dieses Intervall ausnahmslos definirt sein; d. h. an jeder Stelle ist der zugehörige Functionswerth fest gegeben.

Die oben gestellte Frage fassen wir dann kürzer zusammen in die Worte: *Unter welchen Voraussetzungen ist solch eine Function integrirbar?* Die Antwort lautet:

Bezeichnet man die grösste Schwankung der Function, d. h. den positiven Unterschied ihres grössten und kleinsten Werthes in dem Inter-

---

*) Riemann: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe (ges. Werke S. 213). Einige Präcisirungen in dem folgenden Beweise sind von Du Bois Reymond (Journal f. Mathemat. Bd. 79) gegeben.

valle von a bis x_1 (einschliesslich der Grenzen) mit D_1, ebenso zwischen x_1 und x_2 mit D_2 . . ., zwischen x_{n-1} und b mit D_n, so muss die Summe:

$$d_1 D_1 + d_2 D_2 + \ldots d_n D_n \qquad (d_1 + d_2 + \ldots d_n = b - a)$$

eine Zahl sein, welche mit wachsenden Werthen von n die Null zur Grenze hat, wenn gleichzeitig sämmtliche Grössen d nach Null convergiren.

Dies ist die nothwendige und hinreichende Bedingung. Und zwar findet folgendes statt:

Convergirt die obige Summe bei irgend einem Gesetz, nach welchem die Anzahl der Intervalle beliebig wächst, zum Werthe Null, so convergirt sie immer nach Null, wie auch die Grössen d gewählt und beliebig verkleinert werden.

Diese letzte Behauptung beweist man zuvörderst wie folgt:

Angenommen es sei die Zahl n bereits so gross gewählt, dass $\sum_{p=1}^{p=n} d_p D_p$, da es den Grenzwerth Null hat, seinem absoluten Betrage nach kleiner ist als σ. Eine zweite ganz andere Theilung in m Theile, bei welcher $m > n$ ist und die Grössen d_1', d_2' . . . d_m' beliebig viel kleiner sind als die kleinste der Grössen d, sei angenommen, und es soll bewiesen werden, dass auch $\sum_{p=1}^{p=m} d_p' D_p'$ nach Null convergirt. Betrachtet man die Strecke ab gleichzeitig mit der Theilung in die n Intervalle d, und die m Intervalle d', so wird in jedem Theile d eine gewisse Anzahl der Intervalle d' gelegen sein; Endpunkte der Intervalle d' werden aber im allgemeinen nicht mit Endpunkten von d zusammenfallen. Es sei:

$$\begin{array}{l} a + d_1' + d_2' + \cdots d_\lambda' < a + d_1 = x_1 < a + d_1' + \cdots d'_{\lambda+1} \\ a + d_1' + d_2' + \cdots d_\mu' < x_1 + d_2 = x_2 < a + d_1' + \cdots d'_{\mu+1} \\ a + d_1' + d_2' + \cdots d_\nu' < x_2 + d_3 = x_3 < a + d_1' + \cdots d'_{\nu+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

so kann man die Summe: $\sum_{p=1}^{p=m} d_p' D_p'$ folgendermassen in Theile zerlegen:

$$\sum_{p=1}^{p=\lambda} d_p' D_p' + d'_{\lambda+1} D'_{\lambda+1} + \sum_{p=\lambda+2}^{p=\mu} d_p' D_p' + d'_{\mu+1} D'_{\mu+1} + \cdots$$

Die einzeln stehenden Glieder beziehen sich also auf die Intervalle, welche die Endpunkte der ersten Theilung enthalten; ihre Anzahl ist $n-1$. Nun ist aber, da D_1 die grösste Schwankung bezeichnet, welche in dem ganzen Intervalle d_1 vorkommt,

$$\sum_{p=1}^{p=\lambda} d_p' D_p' \leqq d_1 D_1, \quad \sum_{p=\lambda+2}^{p=\mu} d_p' D_p' \leqq d_2 D_2 \text{ u. s. f.}$$

Ferner ist die Summe aller einzelnen Glieder sicherlich kleiner als das $(n-1)$fache Product der grössten Zahl d', die unter ihnen vorkommt, mit der grössten Zahl D', die unter den Schwankungen enthalten ist. Also ist:

$$\sum_{p=m}^{p=1} d_p' D_p' \leqq \sum_{p=1}^{p=1} d_p D_p + (n-1)\, d' D'.$$

Da man nun die Werthe der d' beliebig verkleinern darf, so kann man sie stets so klein wählen, dass auch das Product $(n-1)\, d' D' = \varepsilon$ beliebig klein wird; also ist

$$\sum_{p=1}^{p=m} d_p' D_p' \leqq \sigma + \varepsilon,$$

d. h. auch diese Summe wird durch Wahl von m beliebig klein.

Den Beweis des obigen Satzes führt man nun folgendermassen: Das Intervall von a bis b werde zuerst in n_1, sodann in n_2, $n_3, \ldots$ $n_\nu \ldots$ Theile getheilt. Die Strecken der ersten Theilung:

$d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots d_{n_1}^{(1)}$ seien sämmtlich kleiner als δ_1,

die der zweiten: $d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots d_{n_2}^{(2)}$ seien sämmtlich kleiner als δ_2,

die der dritten: $d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, \ldots d_{n_3}^{(3)}$ seien sämmtlich kleiner als δ_3,

. . . .

die der ν^{ten}: $d_1^{(\nu)}, d_2^{(\nu)}, \ldots d_{n_\nu}^{(\nu)}$ seien sämmtlich kleiner als δ_ν,

. . . .

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_\nu \ldots$ bilde eine Reihe von positiven nach Null convergirenden Zahlen; und es enthalte die zweite Theilung sämmtliche Theilpunkte der ersten, und so weiter jede Theilung sämmtliche Theilpunkte der vorhergehenden, so dass eine Theilung jedes Intervalles $d_1, d_2 \ldots$ in neue Unterabtheilungen stattfindet.

Die obere Grenze der Function $f(x)$ mit Berücksichtigung des Vorzeichens im Intervalle $d_\mu^{(\nu)}$ werde mit $G_\mu^{(\nu)}$ bezeichnet, ebenso die untere Grenze mit $g_\mu^{(\nu)}$. Alsdann bilde man die Summen:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\nu} d_\mu^{(\nu)} G_\mu^{(\nu)}, \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\nu} d_\mu^{(\nu)} g_\mu^{(\nu)}$$

und bezeichne ihre Werthe mit A_ν und B_ν. In der Reihe der Zahlen: $A_1, A_2, A_3, \ldots A_\nu \ldots$ ist jede kleiner (höchstens gleich) als die vorhergehende, denn während in A_1 ein Intervall z. B. $d_2^{(1)}$ den Beitrag $d_2^{(1)} . G_2^{(1)}$ liefert, besteht dasselbe Intervall in der Summe A_2 aus mehreren Theilen. Der Beitrag dieser Theilintervalle zur Summe A_2 ist aber sicherlich

kleiner (höchstens gleich) als das Product $d_2^{(1)} G_2^{(1)}$, weil $G_2^{(1)}$ die grösste Zahl bezeichnet, die in dem ganzen Intervalle $d_2^{(1)}$, also auch in allen Unterabtheilungen desselben überhaupt vorkommt.

Die Grössen B_1, B_2, $B_3 \ldots B_\nu \ldots$ bilden eine Reihe von wachsenden Zahlen; und da jedes A grösser ist als jedes B, so besitzt die Reihe der Zahlen A sowohl wie B je einen bestimmten Grenzwerth. Diese Grenzwerthe sind identisch, wenn sich eine Stelle ν angeben lässt, von der ab die Differenz $A_\nu - B_\nu$ kleiner wird als eine beliebige Zahl σ, d. h. es muss

$$A_\nu - B_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\nu} d_\mu^{(\nu)} (G_\mu^{(\nu)} - g_\mu^{(\nu)}) = \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\nu} d_\mu^{(\nu)} D_\mu^{(\nu)} < \sigma$$

sein. Die Summe, deren Grenze das Integral definirt,

$$S = d_1^{(\nu)} f(a + \Theta_1 d_1^{(\nu)}) + d_2^{(\nu)} f(a + d_1^{(\nu)} + \Theta_2^{(\nu)} d_2^{(\nu)}) + \cdots$$
$$\cdots + d_{n_\nu}^{(\nu)} (f(b - \Theta_n d_{n_\nu}^{(\nu)})$$

liegt, wie auch die Grössen Θ angenommen werden, stets zwischen den Grenzen A_ν und B_ν, und werden diese Werthe gleich, so besitzt auch diese Summe den nämlichen endlichen und bestimmten Werth, was behauptet wurde.

Die ausgesprochene Bedingung ist hinreichend; sie ist aber auch nothwendig. Denn hätte die Reihe der Zahlen A und B nicht den nämlichen Grenzwerth, so würde auch der Grenzwerth der Integralsumme je nach Wahl der Θ mit dem Werthe A oder mit dem Werthe B zur Uebereinstimmung gebracht werden können; er wäre also nicht unabhängig von Θ.

Der Beweis ist aber noch nicht vollständig; denn es wurde angenommen, dass die weiteren Theilungen stets so vollzogen werden, dass die früheren Endpunkte eines Theilintervalles als Endpunkte auch in den weiteren Unterabtheilungen vorkommen. Es entsteht also die Frage: Ist der Werth von S ganz unabhängig von der Wahl der Theilpunkte? und auch unabhängig von der Art der Fortsetzung der Theilung? Seien

$$a, \quad x_1, \quad x_2, \ldots x_{n-1}, \quad b$$

und

$$a, \quad x_1', \quad x_2', \ldots x'_{m-1}, \quad b$$

die Endpunkte zweier Theilungen. Dieselben mögen nach dem angegebenen Verfahren von irgend welchen Anfängen ganz unabhängig von einander bereits so weit getrieben sein, dass der zur ersten Theilung gehörige Summenwerth S_n von seinem Grenzwerthe S nur noch um die beliebig kleine Grösse ε differirt, während analog S_m' von seinem Grenzwerthe S' nur noch um ε' abweicht; denn wie anfangs bewiesen

wurde, muss jede Theilung zu einem bestimmten Grenzwerth führen, falls ein solcher bei einer Theilung sich ergiebt. Denkt man sich nun die beiden Theilungen zu einer einzigen vereinigt, und bildet man die betreffende Summe $S_{m,n}$ in Bezug auf diese aus der Vereinigung entstandene neue, so kann man dieselbe sowohl als einen Fortschritt in der Reihe S_n, als auch in der Reihe S_m' betrachten; es ist daher $S_{m,n}$ von S nur um eine Grösse $\eta < \varepsilon$, von S' um eine Grösse $\eta' < \varepsilon'$ verschieden.

$$S = S_{m,n} \pm \eta, \quad S' = S_{m,n} \pm \eta'.$$

Der absolute Werth der Differenz $S - S'$ wird also nicht mehr als $\eta + \eta'$ betragen, er ist kleiner als die beliebig kleine Zahl $\varepsilon + \varepsilon'$; die Grenzwerthe S und S' sind folglich identisch. Durch dasselbe Verfahren wird auch die zweite Frage beantwortet. Betrachtet man eine Aufeinanderfolge verschiedener von einander unabhängiger Theilungen: in der ersten Theilung seien alle Intervalle kleiner als $\delta^{(1)}$, die Productsumme gebildet aus den Schwankungen kleiner als $\varepsilon^{(1)}$, in der ν^{ten} die Intervalle kleiner als δ_ν, die Productsumme kleiner als $\varepsilon^{(\nu)}$; ferner seien die bezüglichen Summenwerthe:

$$S^{(1)}, \quad S^{(2)}, \dots S^{(\nu)} \dots$$

so kann man wiederum die ν^{te} Theilung mit der ersten vereinigen, und diese Vereinigung als eine Fortsetzung der ersten, sowie der ν^{ten} Theilung ansehen. Bezeichnet man den auf die Vereinigung bezüglichen Summenwerth mit S', so ist

$$S' = S^{(1)} \pm (< \varepsilon^{(1)}), \quad S' = S^{(\nu)} \pm (< \varepsilon^{(\nu)}).$$

Also unterscheiden sich $S^{(1)}$ und $S^{(\nu)}$ um weniger als die beliebig kleine Grösse $\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(\nu)}$; d. h. die Reihe der S besitzt einen bestimmten Grenzwerth.

Die Grenze der S heisst das bestimmte Integral und wird mit dem Symbol

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet.

143. Die aufgestellte Bedingung ist erfüllt:

Erstens wenn die Function $f(x)$ durchweg stetig ist, was in den §§. 102 und 103 direct bewiesen wurde. Denn in diesem Falle lässt sich ja eine Grösse δ ermitteln, so dass an allen Stellen in Intervallen die gleich oder kleiner sind als δ, die Schwankungen der Function:

$$\text{abs}\,[f(x) - f(x + \Theta\delta)]$$

kleiner werden als eine beliebige Zahl σ. Mithin wird

$$\sum d\,D < (b - a)\,\sigma.$$

Zweitens wenn die Function $f(x)$ an einzelnen (zählbaren) Stellen Unstetigkeitssprünge von endlicher Grösse besitzt (§. 105). Denn solche einzelne Stellen, deren Zahl n sein möge, können mit beliebig kleinen Intervallen δ umgeben werden, so dass, wenn D den grössten Werth unter den Sprüngen bezeichnet, der Beitrag dieser Unstetigkeitsintervalle nicht grösser ist als $n\delta D$. Da n und D endlich sind, so kann dieses Product durch Wahl von δ beliebig klein gemacht werden.

Man erkennt in derselben Weise auch, dass die Function an beliebig vielen zählbaren Stellen in noch so kleinem Intervalle unendlich viele Maxima und Minima mit endlichen Schwankungen besitzen (wie z. B. $\sin \frac{1}{x-a}$ an der Stelle $x = a$) oder auch ganz unbestimmt gelassen werden kann, d. h. dass es frei steht, an beliebig vielen Stellen der Function irgend welchen Werth (jedoch immer nur einen endlichen) zu ertheilen, ohne dass dadurch der Werth des bestimmten Integrales geändert wird.

Drittens wenn die Function an unendlich vielen Stellen unstetig, oder unbestimmt zwischen endlichen Grenzen wird — oder wenn die Function an unendlich vielen Stellen in noch so kleinem Intervalle unendlich viele Maxima und Minima mit Schwankungen von beliebiger aber endlicher Grösse besitzt, wobei aber alle diese Stellen eine bestimmte Eigenschaft erfüllen müssen. Ich gehe hierauf im folgenden Paragraph näher ein, weil diese Untersuchung Gelegenheit bietet, den Functionsbegriff bedeutend zu erweitern.

144. Um den Begriff einer unendlichen Anzahl von Punkten zu erfassen, hat man vor allem den Unterschied zu beachten: Eine endliche Strecke enthält zwar unendlich viele Punkte, aber unendlich viele Punkte brauchen nicht umgekehrt eine Strecke zu erfüllen, oder rein arithmetisch ausgedrückt: die continuirliche Zahlenreihe zwischen zwei Grenzen enthält unendlich viele Zahlen zwischen diesen Grenzen, aber unendlich viele Zahlen zwischen zwei Grenzen erfüllen noch nicht die Zahlenreihe. Um diesen Unterschied zu kennzeichnen definire ich:*)

Nennt man das Intervall von $x - \varepsilon$ bis $x + \varepsilon$ die Umgebung eines Punktes x, deren Länge 2ε beträgt, wobei ε eine beliebig kleine

*) Die Untersuchung über Punktmengen ist zuerst von Cantor präsise gegeben worden: Math. Annal. Bd. 5, und findet sich auch ausgeführt bei Dini: Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa 1878. Die obige Unterscheidung von discreten und linearen Punktmengen weicht indessen von der Cantor'schen Definition der Mengen erster und zweiter Gattung ab. Die Benennung „discrete Punktmenge“ soll streng genommen besagen, dass solch eine Punktmenge für die Probleme der Integralrechnung dieselbe Eigenschaft hat, wie eine endliche Anzahl getrennter Punkte.

aber endliche Grösse vorstellt, so soll eine unendliche Menge von Punkten eine discrete Menge oder Mannigfaltigkeit heissen, wenn es möglich ist, sämmtliche Punkte dieser Menge in Umgebungen einzuschliessen, deren Summe kleiner gemacht werden kann als eine beliebig kleine Zahl, während die Anzahl der Umgebungen dabei beliebig wachsen kann.

Dagegen soll die unendliche Menge eine lineare Mannigfaltigkeit genannt werden, wenn sich die Summe der Umgebungen nicht beliebig verkleinern lässt.

Aus diesen Definitionen folgt: 1) Bei einer discreten Punktmenge ist es immer möglich Intervalle anzugeben, deren Summe von $b - a$ beliebig wenig verschieden ist, so dass in keinem dieser Intervalle ein Punkt der gegebenen Menge sich befindet; denn man braucht nur die Punkte mit ihren Umgebungen, deren Summe beliebig klein ist, auszuscheiden. Bei einer linearen Punktmenge ist die Summe solcher Intervalle jedenfalls um eine endliche Grösse von $b - a$ unterschieden.

2) Bei einer discreten Punktmenge ist es immer möglich, in beliebiger Nähe jedweder Stelle ein endliches Intervall anzugeben, in welchem kein Punkt der gegebenen Menge liegt. Denn ist α ein beliebiger Punkt des Intervalles, so wäre es nur dann nicht möglich, in beliebiger Nähe von α ein Intervall ausfindig zu machen, in welchem kein Punkt der Menge liegt, wenn in der Nähe eines jeden Punktes, der innerhalb einer bei α beginnenden endlichen Strecke von der Länge δ liegt, unendlich viele Punkte der Menge sich befänden. Alsdann wäre es aber auch nicht möglich, sämmtliche Punkte der Menge von vornherein in Umgebungen einzuschliessen, deren Summe kleiner ist als δ; d. h. die Menge wäre nicht discret.

Bei einer linearen Punktmenge ist dieses nicht an jeder Stelle möglich.

Diese Unterschiede werden an folgenden Beispielen klar werden:

1) Jede endliche Anzahl von Punkten in einem Intervall von endlicher Länge ist eine discrete; man bezeichnet ihre Ordnung mit Null.

2) Die unendliche Punktmenge im Intervall 0 bis 1, welche durch die Zahlen

$$1,\ \frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdots \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdots$$

bestimmt wird, ist discret, denn es häufen sich die Punkte dieser Menge nur an der Stelle Null. Trennt man vom Punkte Null an ein beliebig kleines Intervall ab, so behält man eine endliche Anzahl von Punkten der Menge in der übrigen Strecke nach, so dass die totale Summe aller Umgebungen beliebig klein gemacht werden kann.

Die Stellen, an denen sich die Punkte der Menge unendlich anhäufen oder verdichten, heissen die Grenzpunkte; die Menge der Grenz-

punkte heisst die erste abgeleitete Punktmenge. Im vorliegenden Falle wird die erste abgeleitete von der Ordnung Null; daher bezeichnet man die Ordnung der ursprünglichen Menge mit eins.

3) Eine discrete Punktmenge kann mehrere Ableitungen besitzen, oder von höherer Ordnung werden. Die Punkte:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(\frac{1}{2}\right)^4,$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^4, \dots$$

häufen sich an unendlich vielen Stellen, nämlich an den Stellen

$$0,\ \frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots$$

Trotzdem ist ihre Menge discret. Denn hat man von der Stelle Null aus ein beliebig kleines Intervall abgetragen, so bleibt nur noch eine endliche Anzahl von Punkten, an welchen Anhäufungen der gegebenen Punktmenge vorhanden sind; und hat man diese mit beliebig kleinen Intervallen umgeben, so bleibt nur noch eine endliche Anzahl von Punkten der gegebenen Menge. Die erste Abgeleitete ist hier von der Ordnung eins; die Ordnung der ursprünglichen Menge ist zwei.

4) Betrachtet man im Intervall von a bis b alle rationalen Zahlen als eine Punktmenge, so hat man eine Menge der zweiten Art, eine lineare Mannigfaltigkeit. Denn an keiner Stelle lässt sich ein endliches Intervall angeben, in welches nicht unendlich viele Punkte dieser Menge fallen; oder wie man es bezeichnet, die Menge ist in einem endlichen Intervall „überall dicht". Ebenso bilden alle irrationalen Zahlen, ferner alle Zahlen, deren Nenner (auf kleinste Benennung gebracht) eine Potenz irgend einer Zahl a ist, eine lineare Mannigfaltigkeit.

Hier lässt sich auch keine abgeleitete von niederer Ordnung finden, weil jeder Punkt einer noch so kleinen Strecke Grenzpunkt wird.

Man kann vielmehr ganz allgemein einsehen: Besitzt eine Punktmenge eine endliche Anzahl von abgeleiteten Mengen, so ist sie discret.

Denn geht man von der letzten Ableitung 0ter Ordnung, also von einer endlichen Anzahl von Punkten $a_1, a_2 \dots a_m$ aus, so besitzt die Punktmenge, deren Ableitung diese ist, nur an diesen Stellen Anhäufungen unendlich vieler Punkte, und ausserdem eine endliche Anzahl $b_1, b_2 \dots b_n$. Die Gesammtgrösse ihrer Umgebungen kann beliebig klein gemacht werden. Die Menge von der Ordnung eins ist eine discrete. Von dieser gehe man zur nächst höheren Ordnung weiter. Diese enthält, nachdem man die Stellen $a_1, a_2 \dots a_m$ und $b_1, b_2 \dots b_n$ in beliebig kleine Umgebungen eingeschlossen hat, nur eine endliche Anzahl von anderweitigen Punkten $c_1, c_2 \dots c_p$. Sie ist demnach gleichfalls discret; es bleibt folglich der Charakter der discreten

Mannigfaltigkeit bei endlicher Anzahl aufsteigender Processe erhalten*).

145. Eine Function, welche im allgemeinen stetig, an unendlich vielen Stellen unstetig, oder ganz unbestimmt zwischen endlichen Grenzen ist, oder an unendlich vielen Stellen in noch so kleinem Intervalle unendlich viele Maxima und Minima besitzt, soll eine punktirt unstetige Function genannt werden, wenn die Stellen, an welchen die Schwankungen der Function grösser sind als eine bestimmte endliche Zahl σ, stets nur eine discrete Punktmenge bilden**).

Unter der „Schwankung" der Function ist die Grösse der Unstetigkeitssprünge, oder der Unterschied der Grenzen, zwischen denen die unbestimmten Werthe liegen, oder endlich der Unterschied zwischen den Maximal- und Minimalwerthen zu verstehen.

Linear unstetig dagegen nenne ich eine Function, bei welcher solche Stellen eine lineare Punktmenge bilden. Dann erkennt man leicht aus dem Riemann'schen Satze: *Die in einem Intervalle punktirt unstetigen Functionen sind integrirbar.*

Denn ist eine beliebig kleine aber endliche Zahl σ vorgegeben, so kann man die Theilung der Strecke a bis b so weit ausführen, dass in den Theilintervallen im Allgemeinen die Schwankungen kleiner werden als σ, während die Umgebungen aller der Stellen, an welchen die Schwankungen grösser sind als σ, eine Summe s liefern, die beliebig verkleinert werden kann. Heisst m der grösste Werth unter diesen Schwankungen, so ist:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} d\,D < \sigma\,(b-a) + sm.$$

Die rechts stehende Summe kann aber beliebig verkleinert werden, da σ beliebig klein angenommen werden darf, und ebenso s, zufolge der Eigenschaft einer discreten Punktmenge.

Die linear unstetigen Functionen sind nicht integrirbar.

Beispiele unendlich oft unstetiger integrabeler Functionen:

1) Im Intervalle von Null bis Eins möge die Function $f(x)$ an allen Stellen den Werth Null haben, nur in den unendlich vielen Punkten:

$$\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(\frac{1}{2}\right)^4, \cdots \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdots$$

---

*) Der Begriff der abgeleiteten Punktmengen ist von Cantor a. a. O. eingeführt. Sein Beispiel (Math. Ann. Bd. XVII S. 358) lehrt, dass eine discrete Punktmenge auch eine unendliche Anzahl von Ableitungen besitzen kann.

**) Diese Definitionen schliessen sich im wesentlichen den von Hankel: Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. Tübingen 1870, gegebenen an.

soll sie den Werth $\frac{1}{2}$ besitzen. Diese Function ist unstetig, und zwar in beliebig kleinem Intervall bei Null unendlich oft; aber die Summe der Intervalle, in welchen die Schwankungen gleich $\frac{1}{2}$ sind, kann beliebig klein gemacht werden. Der Werth des Integrales ist ein bestimmter und zwar Null.

2) Man kann in gleicher Weise eine Function construiren, welche in jedem noch so kleinen Intervalle unstetig wird, bei welcher die Anzahl der Stellen, an denen Unstetigkeitssprünge grösser als eine endliche Zahl stattfinden, nicht endlich ist, und die doch integrirbar ist. Setzt man z. B. fest, die Function $f(x)$ soll im Intervall von Null bis Eins im allgemeinen Null sein, dagegen soll sie in unendlich vielen discreten Punkten, deren Ableitung der Punkt $\frac{1}{2}$ ist, den Werth $\frac{1}{2}$ haben, in unendlich vielen Punkten, deren Ableitung die Punkte $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ sind, den Werth $\frac{1}{3}$; in unendlich vielen Punkten mit den Ableitungen $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ den Werth $\frac{1}{5}$, allgemein: wenn p eine Primzahl ist, q jede Zahl kleiner als p bedeutet, in unendlich vielen Punkten mit der Ableitung $\frac{q}{p}$ den Werth $\frac{1}{p}$, so ist das Integral solch einer Function Null. Die betreffenden Punktmengen kann man sich z. B. gebildet denken durch die Reihe

$$\frac{q}{p}+\left(\frac{1}{2}\right)^m, \quad \frac{q}{p}+\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}, \quad \frac{q}{p}+\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}, + \cdots$$

Denn die Punkte, an denen die Unstetigkeitssprünge grösser sind als irgendwelche endliche Zahl, bilden stets nur eine endliche Anzahl von discreten Punktmengen. Die Summe ihrer Umgebungen wird beliebig klein.

3) Das erste Beispiel einer punktirt unstetigen integrabelen Function gab Riemann*). Man bezeichne mit (x) den positiven oder negativen Ueberschuss von x über die nächste (kleinere oder grössere) ganze Zahl; liegt x in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen, so sei $(x) = 0$. Die Reihe:

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{2^2} + \frac{(3x)}{3^2} + \cdots = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(mx)}{m^2}$$

convergirt, denn es ist $\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ convergent (§. 47), und zwar gleich $\frac{\pi^2}{6}$. (Diese Summenbestimmung folgt aus den Reihenent-

*) Gesammelte Werke S. 228.

wickelungen für tang x und cotang x.) (mx) hat als obere Grenze den Werth $\frac{1}{2}$. Jedes Glied der Reihe $f(x)$ ist im allgemeinen stetig, nur wenn $mx = \frac{p}{2}$ (p eine ungerade ganze Zahl) oder $x = \frac{p}{2m}$ ist, wird in der Function (mx) die Differenz benachbarter Werthe beliebig wenig von 1 verschieden. Dies tritt für $x = \frac{p}{2m}$ nicht nur bei dem Gliede (mx) ein, sondern auch bei dem Gliede $(3mx)$, $(5mx)$ u. s. f. Demnach folgt: Ist x von der Form $\frac{p}{2m}$ (p und m relativ prim), so ist:

$$f(x+0) = f(x) - \frac{\pi^2}{16m^2}, \quad f(x-0) = f(x) + \frac{\pi^2}{16m^2}.$$

Denn an der Stelle $x = \frac{p}{2m}$ liefern die genannten Glieder keinen Beitrag, sie sind Null, während falls x beliebig wenig wächst, jedes derselben einen Zuwachs beliebig nahe gleich $-\frac{1}{2}$, und während x abnimmt, den Zuwachs $+\frac{1}{2}$ erfährt. Es ist aber

$$\frac{1}{2m^2}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right] = \frac{1}{2m^2}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots - \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\cdots\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2m^2}\left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24}\right] = \frac{\pi^2}{16m^2}.$$

Für jeden rationalen Werth von x, der in kleinsten Zahlen ausgedrückt ein Bruch mit geradem Nenner $2m$ ist, findet also ein Sprung statt. Die Zahl der Sprünge aber, deren Werth eine gegebene Grenze übersteigt ist endlich; denn soll

$$\frac{\pi^2}{8m^2} > \sigma \text{ sein, so muss } m < \frac{\pi}{2\sqrt{2\sigma}}.$$

In einem endlichen Intervalle ist aber nur eine endliche Anzahl von Brüchen vorhanden, deren Nenner unterhalb einer gegebenen endlichen Grenze liegen.

Die Reihe convergirt gleichmässig; (sie ist darum noch nicht stetig, weil die einzelnen Glieder nicht stetige Functionen sind); das Integral wird durch Integration der einzelnen Glieder erhalten.

146. Die Fundamentaltheoreme über das bestimmte Integral folgen unmittelbar aus der Definitionsgleichung, die in kürzester Form (auch von den Θ unabhängig) geschrieben lautet:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Lim}\,[(x_1-a)\,f(a) + (x_2-x_1)\,f(x_1) \ldots (b-x_{n-1})\,f(x_{n-1})].$$

Es ist:

I. $$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

II. Vertauscht man a mit b, indem man die Theilung des Intervalles beibehält, so erkennt man:

$$\int_b^a f(x)\, dx$$

ist gleich

$\mathrm{Lim}\,[(x_{n-1}-b)f(b)+(x_{n-2}-x_{n-1})f(x_{n-1})+\cdots(x_1-x_2)f(x_2)+(a-x_1)f(x_1)]$,

auch gleich

$\mathrm{Lim}[(x_{n-1}-b)f(x_{n-1})+(x_{n-2}+x_{n-1})f(x_{n-2})+\cdots(x_1-x_2)f(x_1)+(a-x_1)f(a)]$.

Denn, wie bewiesen wurde, ist es gleichgiltig, an welchen Stellen in einem Intervalle die Functionswerthe ausgewählt werden.

Durch die zweite Gleichung wird evident, dass:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

d. h. durch Vertauschung der oberen und unteren Grenze ändert das Integral nur sein Vorzeichen.

III. $$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Diese Gleichung gilt, auch wenn c ausserhalb des Intervalles a bis b liegt (falls nur die Function integrabel bleibt). Denn ist

$$a < b < c$$

so ist

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx,$$

also

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx - \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

IV. Die Summe integrabeler Functionen ist selbst integrabel und zwar ist:

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx \pm \int_a^b f_2(x)\, dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

V. Das Product zweier (oder mehrerer) integrabeler Functionen ist selbst integrabel*).

Zu bemerken ist, dass es sich bisher nur um Functionen handelt, die nicht unendlich werden. Eine Ausdehnung des Satzes V. ist in §. 149 gegeben.

---

*) Du Bois-Reymond. Journal f Math. Bd. 79 S. 21.

Es habe im Intervall d_p die grösste Schwankung der Function $\varphi(x)$ den Werth D_p, die grösste Schwankung von $\psi(x)$ den Werth D_p'. Der Voraussetzung nach ist

$$\sum_{p=1}^{p=n} d_p\, D_p = 0, \qquad \sum_{p=1}^{p=n} d_p\, D_p' = 0 \qquad \text{für } n = \infty.$$

Das Product $\varphi(x)\,.\,\psi(x)$ ist in demselben Intervalle Schwankungen unterworfen, welche, wenn die Stellen des grössten und kleinsten Werthes $x + \Theta d_p$ und $x + \Theta' d_p$ heissen, gemessen ist durch die Differenz:

$$\begin{aligned}\varphi(x + \Theta d_p)\, \psi(x + \Theta d_p) - \varphi(x + \Theta' d_p)\, \psi(x + \Theta' d_p) = \\ = \varphi(x + \Theta d_p)\, [\psi(x + \Theta d_p) - \psi(x + \Theta' d_p)] + \\ + \psi(x + \Theta' d_p)\, [\varphi(x + \Theta d_p) - \varphi(x + \Theta' d_p)].\end{aligned}$$

Diese Form lehrt, dass die Schwankung des Productes sicherlich nicht grösser ist als

$$G_p\, D_p + G_p'\, D_p',$$

wenn G_p und G_p' die grössten absoluten Beträge bezeichnen, welche die Functionen φ und ψ im Intervalle d_p erhalten. Sind G und G' die grössten absoluten Beträge, welche die Functionen überhaupt im ganzen Integrationsintervall annehmen, so wird

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{p=n} [\varphi(x + \Theta d_p)\, \psi\, (x + \Theta d_p) - \varphi\, (x + \Theta' d_p)\, \psi(x + \Theta' d_p)]\, d_p < \\ < G \sum_{p=1}^{p=n} d_p\, D_p + G' \sum_{p=1}^{p=n} d_p\, D_p',\end{aligned}$$

also der Voraussetzung zur Folge gleich Null, w. z. b. w.

VI. Die theilweise (partielle) Integration.

Es seien die Functionen $\varphi(x)$, $f(x)$, sowie das Product derselben integrirbar, ferner sei $\varphi(x)$ eine allenthalben stetige Function und besitze die integrirbare Ableitung $\varphi'(x)$, so dass also (das Nähere siehe §. 147):

$$\int_c^x \varphi'(y)\, dy = \varphi(x) - \varphi(c),$$

wobei c und x beliebige Stellen im Integrationsintervalle bedeuten; alsdann ist

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_a^b f(x) \left[\int_c^x \varphi'(y)\, dy + \varphi(c)\right] dx = \\ = \varphi(c) \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b dx \left[f(x) \int_c^x \varphi'(y)\, dy\right].\end{aligned}$$

Setzt man nun $c = a$, so folgt

$$\text{I)}\qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b dx\left[f(x)\int_a^x \varphi'(y)\,dy\right].$$

Setzt man $c = b$, und $\int_b^x \varphi'(y)\,dy = -\int_x^b \varphi'(y)\,dy$, so folgt

$$\text{II)}\qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(b)\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b dx\left[f(x)\int_x^b \varphi'(y)\,dy\right].$$

Im §. 168 wird bewiesen werden, dass sich die Folge der Integrationen in dem letzten Ausdrucke der rechten Seite vertauschen lässt, jedenfalls, wenn $f(x)$ und $\varphi'(y)$ im Integrationsgebiete endlich bleiben; und zwar wird

$$\int_a^b dx\left[f(x)\int_a^x \varphi'(y)\,dy\right] = \int_a^b dy\left[\varphi'(y)\int_y^b f(x)\,dx\right],$$

$$\int_a^b dx\left[f(x)\int_x^b \varphi'(y)\,dy\right] = \int_a^b dy\left[\varphi'(y)\int_a^y f(x)\,dx\right].$$

Demnach erhält man aus I) und II) die Formeln:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b dy\left[\varphi'(y)\int_y^b f(x)\,dx\right],$$

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(b)\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b dy\left[\varphi'(y)\int_a^y f(x)\,dx\right].$$

Man bezeichnet dieselben als die Formeln der theilweisen Integration; sie enthalten die im §. 108 besprochene Methode, angewandt auf ein bestimmtes Integral*).

VII. Der erste Mittelwerthsatz. (Vergl. §. 103.)

Aus der Summendefinition folgt unmittelbar:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [g + \Theta\,(G - g)]\,(b - a) \qquad (0 \leqq \Theta \leqq 1),$$

wenn g den kleinsten, G den grössten Werth bezeichnet, den $f(x)$ im

*) Diese Formeln gelten auch, falls $f(x)$ und $\varphi'(x)$ im Integrationsgebiete unendlich werden, falls nur die Integrale derselben sowie des Productes $f(x)\,\varphi(x)$ endlich und folglich auch $\varphi(x)$ eine stetige Function bleibt. Weiteren Einschränkungen als den oben genannten unterliegt der Satz nicht. (Vergl. Du Bois-Reymond: Abhandl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. II. Classe. XII. Bd. I. Abthl. S. 133.)

Intervall erhält. Ist $f(x)$ stetig, so kann es keinen zwischenliegenden Werth überspringen; daher kann die Gleichung geschrieben werden:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(a+\Theta\,(b-a)).$$

Oft ist folgende Verallgemeinerung des Mittelwerthsatzes brauchbar: Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ integrirbar, hat ferner die Function $\varphi(x)$ im Integrationsintervall immer dasselbe Zeichen, wir wollen annehmen das positive, so ist, wenn g die untere, G die obere Grenze von $f(x)$ bezeichnet:

$$g\int_a^b \varphi\,(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqq G\int_a^b \varphi\,(x)\,dx$$

oder

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = [g+\Theta\,(G-g)]\int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (0 \leqq \Theta \leqq 1).$$

Ist die Function $f(x)$ stetig, so kann man behaupten:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a+\Theta\,(b-a))\int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (0 \leqq \Theta \leqq 1).$$

VIII. Aus dem Mittelwerthsatze folgt im Zusammenhange mit Satz III. (wie in §. 103): das bestimmte Integral ist eine stetige Function seiner oberen Grenze.

Denn bezeichnen x und $x \pm h$ irgend welche im Intervall a, b gelegene Werthe, und nennt man das Integral als Function seiner oberen Grenze kurzweg $F(x)$, so ist:

$$F(x\pm h)-F(x) = \int_a^{x\pm h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = \int_x^{x\pm h} f(x)\,dx = \pm h\cdot[g+\Theta\,(G-g)],$$

wo G und g den grössten und kleinsten Werth im Intervall $+h$ oder $-h$ bezeichnen. Da die Function f durchweg endlich ist, so lässt sich an jeder Stelle x ein Intervall $\pm h$ angeben, in welchem diese Differenz kleiner wird als eine beliebig kleine Zahl.

IX. Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ integrirbar, ist ferner die Function $f(x)$ im Integrationsintervall eine positive und durchweg abnehmende Grösse, so besteht, wenn M und m bezüglich den grössten und den kleinsten Werth bezeichnen, welchen das Integral

$$\int_a^x \varphi\,(x)\,dx$$

erhält, wenn x alle Werthe zwischen a und b annimmt, die Beziehung:

$$f(a) \cdot m \leqq \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx \leqq f(a) \cdot M.$$

Es ist

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = \text{Lim}\, [(x_1 - a)\, f(a) \cdot \varphi\, (a) + (x_2 - x_1)\, f(x_1) \cdot \varphi(x_1) \ldots + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \cdot \varphi\, (x_{n-1})].$$

Die Theilpunkte $x_1 \ldots x_{n-1}$ seien nun so nahe gewählt, dass die Summe der Schwankungen in den Theilintervallen:

$$\Sigma d_p D_p < \sigma$$

wird. Alsdann können wir auf die endliche Summe:

$$d_1 f(a)\, \varphi(a) + d_2 f(x_1)\, \varphi(x_1) + \ldots d_n\, f(x_{n-1})\, \varphi\, (x_{n-1}),$$

da die Glieder $f(a)$, $f(x_1) \ldots f(x_{n-1})$ positive abnehmende Grössen sind, den von Abel bewiesenen Hülfsatz (§. 44 IV.) anwenden, welchem zufolge diese Summe kleiner ist als das Product $f(a)\, G$, dagegen grösser als das Product $f(a) g$, unter G und g den algebraisch grössten und kleinsten Werth in der Reihe:

$$d_1 \varphi\, (a), \quad d_1 \varphi\, (a) + d_2 \varphi(x_1), \quad d_1 \varphi\, (a) + d_2 \varphi\, (x_1) + d_3 \varphi\, (x_2) + \ldots$$

verstanden.

Diese Werthe unterscheiden sich aber zufolge der Voraussetzung, welche über die Theilintervalle gemacht worden ist, von den bestimmten Integralen:

$$\int_a^{a+d_1} \varphi\, (x) dx, \quad \int_a^{a+d_1+d_2} \varphi\, (x) dx \ldots, \quad \int_a^{a+\Sigma d_p} \varphi\, (x) dx \ldots, \quad \int_a^b \varphi\, (x) dx$$

um Grössen, die sicherlich kleiner sind als die beliebig kleine Grösse σ, weil ja die Gesammtsumme aller Schwankungen multiplicirt mit ihren Intervallen $< \sigma$ ist. Bezeichnet man also mit g' und G' die kleinsten und grössten Werthe in dieser Reihe, so besteht die Gleichung:

$$f(a)[g' \pm \sigma] < d_1 f(a)\, \varphi(a) + d_2 f(x_1)\, \varphi(x_1) \ldots d_n f(x_{n-1})\, \varphi(x_{n-1}) < f(a)\, [G' \pm \sigma].$$

Lässt man in dieser Gleichung n beliebig wachsen, so wird $\sigma = 0$, indessen g' und G' über die kleinsten und grössten Werthe nicht hinausgehen, welche das Integral

$$\int_a^x \varphi\, (x)\, dx,$$

während x alle Werthe zwischen a und b erhält, überhaupt annimmt. Mithin ist

$$f\, (a) \cdot m \leqq \int_a^b f(x)\, \varphi\, (x)\, dx \leqq f\, (a) \cdot M.$$

Da das bestimmte Integral eine stetige Function seiner oberen

Grenze ist, so nimmt es jeden zwischen seinem Maximum und seinem Minimum gelegenen Werth auch wirklich an, es überspringt keinen; es ist daher sicherlich ein zwischen a und b gelegener Werth vorhanden, so dass

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^{a+\Theta(b-a)} \varphi(x)\,dx. \qquad (0 \leqq \Theta \leqq 1)^*).$$

X. Aus dieser letzten Gleichung folgt ein allgemeinerer Satz, den man als den zweiten Mittelwerthsatz zu bezeichnen pflegt, indem man die Voraussetzung, dass $f(x)$ dasselbe Zeichen behält, fallen lässt. Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ durchweg endliche, integrirbare Functionen und $f(x)$ eine im Intervall von a bis b abnehmende Grösse (die auch negativ werden kann), so ist $f(x) - f(b)$ eine im Intervalle von a bis b positive Grösse, also auch nach Satz IX:

$$\int_a^b [f(x) - f(b)]\,\varphi(x)\,dx = [f(a) - f(b)]\int_a^{a+\Theta(b-a)} \varphi(x)\,dx,$$

oder

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^{a+\Theta(b-a)} \varphi(x)\,dx + f(b)\int_{a+\Theta(b-a)}^b \varphi(x)\,dx.$$

Ist $f(x)$ eine zunehmende Function, also $-[f(x) - f(b)]$ positiv und abnehmend, so folgt:

$$-\int_a^b [f(x) - f(b)]\,\varphi(x)\,dx = -[f(a) - f(b)]\int_a^{a+\Theta(b-a)} \varphi(x)\,dx,$$

oder ebenfalls:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^{a+\Theta(b-a)} \varphi(x)\,dx + f(b)\int_{a+\Theta(b-a)}^b \varphi(x)\,dx.^{**})$$

Anmerkung. Es können die Werthe von f an den Endpunkten a und b auch unbestimmt sein. Aus der Herleitung folgt, dass dann bei einer abnehmenden Function $f(a)$ durch den grössten, $f(b)$ durch den kleinsten Werth zu ersetzen ist, denen sich die Function in der Umgebung dieser Stellen annähert; das umgekehrte gilt bei einer zunehmenden Function.

147. Das bestimmte Integral ist eine stetige Function seiner oberen Grenze; es fragt sich, ob es einen bestimmten Werth des vor- und rückwärts genommenen Differentialquotienten hat. Aus der Gleichung (VII.)

---

*) O. Bonnet: Remarques sur quelques intégrales definies. Liouv. Journ. XIV.

**) Du Bois-Reymond: Journal f. Mathem. Bd. 69.

$$F(x \pm h) - F(x) = \int_a^{x \pm h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = \int_x^{x \pm h} f(x)\,dx = \pm h\,[g + \Theta(G - g)]$$

folgt:

$$\frac{F(x \pm h) - F(x)}{\pm h} = g + \Theta\,(G - g).$$

Lässt man h nach Null convergiren, so erkennt man: an jeder Stelle, an welcher $f(x)$ vorwärts genommen stetig ist, also $g + \Theta\,(G - g) = f(x + \Theta h)$ gesetzt werden darf, besitzt die Function $F(x)$ den vorwärts genommenen Differentialquotienten $F'(x) = f(x + 0)$; an jeder Stelle, an welcher $f(x)$ rückwärts genommen stetig ist, besitzt die Function $F(x)$ den rückwärts genommenen Differentialquotienten $f(x - 0)$.

Dasselbe gilt auch an jeder Stelle, an welcher $f(x)$ von den Werthen $f(x + 0)$ und $f(x - 0)$ um eine beliebige endliche Grösse unterschieden ist; und solche Stellen können eine discrete Punktmenge bilden, falls in beliebiger Nachbarschaft solch einer Stelle die Werthe $f(x + 0)$ und $f(x - 0)$ durch stetigen Uebergang aus $f(x + h)$ und $f(x - h)$ folgen. Insbesondere ist unter diesen Voraussetzungen:

$$\left[\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)\,dx\right]_{x=b} = \mathrm{Lim}\ \frac{1}{h}\int_{b-h}^b f(x)\,dx = f(b).$$

Betrachtet man das Integral als Function der unteren Grenze, so kann der Differentialquotient entweder vermittelst der Umkehr

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

bestimmt werden; es wird:

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -f(a),$$

oder direct aus der Formel:

$$\mathrm{Lim}\ \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx = -f(a).$$

An allen Stellen, in deren Umgebung $f(x)$ unendlich viele Maxima und Minima besitzt, deren Schwankungen endlich sind (und solche Stellen können wiederum nur eine discrete Punktmenge bilden), braucht die Function $F(x)$ keinen Differentialquotienten zu besitzen.

Zusammengefasst lässt sich also behaupten: *Jedes bestimmte Integral stellt in seinem Integrationsintervalle eine stetige Function seiner oberen Grenze dar, welche im allgemeinen einen bestimmten Werth des vorwärts genommenen Differentialquotienten besitzt und einen mit diesem identischen Werth des rückwärts genommenen. Nur in discreten Punkt-*

mengen können vor- und rückwärts genommener Differentialquotient von einander verschieden oder überhaupt ganz unbestimmt sein.

Da das bestimmte Integral von der Beschaffenheit der Function in discreten Punkten ganz unabhängig ist, so ergeben alle integrirbaren Functionen, welche innerhalb eines Intervalles nur in solchen Punkten von einander differiren, denselben Werth des bestimmten Integrales.

Hieraus ersieht man weiter, wie sich der Zusammenhang zwischen dem bestimmten und unbestimmten Integrale gestaltet. Denn ist $F(x)$ eine stetige Function, deren Ableitung $F'(x)$ integrirbar ist (also nur an unendlich vielen discreten Punkten unstetig oder unbestimmt wird, oder unendlich viele Maxima und Minima mit endlichen Schwankungen erhält), so ist

$$\int_a^x F'(x)\,dx - F(x)$$

eine stetige Function von x, deren Differentialquotient im allgemeinen gleich Null, nur in discreten Punkten zunächst in unbestimmter Form erscheint. Solch eine Function ist aber eine Constante. Denn in jedem noch so kleinen Intervalle lassen sich nach Ausscheidung der singulären Punkte endliche Intervalle angeben, in denen nicht nur die Function stetig, sondern auch ihre Ableitung gleich Null ist. Nach dem Satze §. 100 ist also die Function in solch einem Intervalle constant; und weil die Grenzen des Intervalles den singulären Stellen beliebig nahe gebracht werden können, die Function aber stetig ist, so hat sie denselben Werth auch an den singulären Stellen. Sie erleidet also keine Aenderung ihres Werthes, indem man von einem Intervalle in das andere übergeht; d. h. sie bleibt in dem ganzen Integrationsintervalle constant.

$$\int_a^x F'(x)\,dx - F(x) = C.$$

Der Werth dieser Constante wird bestimmt, indem man $x = a$ setzt; alsdann folgt:

$$-F(a) = C \quad \text{oder} \quad \int_a^x F'(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Kennt man also die Ableitung $F'(x)$ einer stetigen Function $F(x)$ und ist dieselbe endlich und integrirbar, so hat das Integral derselben stets den Werth

$$F(x) - F(a),$$

(selbst wenn man in unendlich vielen discreten Punkten den Werth von $F'(x)$ beliebig abändert).

148. Wenn die Function $f(x)$ bei Annäherung der Variabelen an einen bestimmten Werth c in dem Intervalle a bis b in bestimmter

Weise unendlich gross wird oder auch zwischen beliebigen Grenzen oscillirt, so kann die Summe, deren Grenzwerth das bestimmte Integral ist, bei jeder endlichen Theilung des Intervalles jedweden Werth erhalten, sie hat also keinen Grenzwerth, und $\int_a^b f(x)\,dx$ würde nach der bisherigen Bestimmung keine Bedeutung haben. Wenn aber alsdann die Summe:

$$\int_a^{c-\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha_2}^{b} f(x)\,dx$$

einen festen Werth annimmt, während α_1 und α_2 ganz unabhängig von einander nach Null convergiren, so versteht man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ diesen Grenzwerth. (Vgl. §. 106. Beispiele des Unendlichwerdens der zu integrirenden Function in §. 122 Anmerk. und §. 132.)

Die nothwendige und hinreichende Bedingung eines bestimmten Werthes für jedes der beiden Integrale besteht aber darin, dass

$$\int_{c-\alpha_1}^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{c+\alpha_2}^{c+\varepsilon_1} f(x)\,dx$$

verschwinden, wenn ε stets kleiner als α ist und α nach Null convergirt.

Bei einer Function, welche an einer Stelle in bestimmter Weise unendlich wird, ist diese Bedingung sicherlich erfüllt, wenn sie in der Umgebung dieser Stelle algebraisch von niederer als der ersten Ordnung unendlich wird; die Ordnung von $\frac{1}{x}$ für $x = 0$ als Einheit genommen. Denn ist $f(x)$ eine bei Annäherung an c wachsende Function, derart aber, dass in der Umgebung von c (für $x < c$)

$$\operatorname{abs} f(x) < \frac{A}{(c-x)^\nu}$$

ist, unter A eine beliebige endliche Grösse, unter ν einen positiven echten Bruch verstanden, so wird:

$$\int_{c-\alpha}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx < A\int_{c-\alpha}^{c-\varepsilon} \frac{dx}{(c-x)^\nu} = -\frac{A}{1-\nu}\left[\varepsilon^{1-\nu} - \alpha^{1-\nu}\right],$$

und dieser Ausdruck convergirt (so lange $1-\nu > 0$) mit α und ε nach Null.

Selbst wenn die Ordnung des Unendlichwerdens sich von der Einheit um keine angebbare Zahl unterscheiden lässt, wenn z. B.*)

*) Riemann a. a. O. S. 229. Eine allgemeine Bemerkung über die Tragweite der logarithmischen Kriterien siehe du Bois-Reymond, Journ. f. Math. Bd. 76. S. 88.

$$\operatorname{abs} f(x) < \frac{A}{c-x} \cdot \frac{1}{[\log(c-x)]^{1+\nu}}$$

wird, so ist:

$$\int_{c-\alpha}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx < A \int_{c-\alpha}^{c-\varepsilon} \frac{dx}{(c-x)\,[\log(c-x)]^{1+\nu}} = \frac{A}{\nu}\Big[[\log(\varepsilon)]^{-\nu} - [\log(\alpha)]^{-\nu}\Big]$$

eine Grösse, die falls ν positiv ist, mit α nach Null convergirt. Dagegen ist die obige Bedingung sicherlich nicht erfüllt, wenn die Function von der ersten oder von höherer Ordnung unendlich wird. Denn ist

$$f(x) > \frac{A}{c-x},$$

so wird:

$$\int_{c-\alpha}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx > A \int_{c-\alpha}^{c-\varepsilon} \frac{dx}{c-x} = A\,[\log\alpha - \log\varepsilon],$$

und diese Logarithmen werden unendlich; ihre Differenz völlig unbestimmt*).

Bei einer Function, welche an einer Stelle unbestimmt unendlich wird, braucht die Ordnung des Unendlichwerdens keinerlei Beschränkung unterworfen zu sein; so wird z. B. die Function

$$\cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + \frac{1}{x}\,e^{\frac{1}{x}} \sin\left(e^{\frac{1}{x}}\right),$$

welche für jeden endlichen Werth von x mit der Ableitung:

$$\frac{d\left(x\cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\right)}{dx}$$

identisch ist, für $x = 0$ völlig unbestimmt, indem dieselbe bei Annäherung der Variabelen an diesen Werth zwischen beliebig grossen (positiven und negativen) Werthen oscillirt. Trotzdem ist

$$\int \left[\cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}} \sin\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\right] dx = x\cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + C$$

auch für den Werth $x = 0$; weil:

---

*) $\log\alpha - \log\varepsilon = \log\frac{\alpha}{\varepsilon}$ bekommt beliebige Werthe, je nachdem man das Verhältniss der verschwindenden Grössen $\alpha : \varepsilon$ bestimmt. Lässt man $\frac{\alpha}{\varepsilon} = 1$ werden, so hat man einen Werth, für welchen der Logarithmus verschwindet. Man könnte also in diesem Sinne von einem endlichen Werthe des Integrales $\int\frac{dx}{c-x}$ sprechen, der sich bei einer bestimmten Art der Annäherung an die Unendlichkeitsstelle ergiebt. Solche besondere Festsetzungen, welche von Cauchy mehrfach angewandt wurden, werden als singuläre Integrale bezeichnet, in die allgemeine Begriffsbestimmuug aber seit Riemann nicht mehr aufgenommen, weil sie besondere Untersuchungen bei jeder Rechnung erfordern.

$$\int_\alpha^\varepsilon \frac{d\left[x \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\right]}{dx}\, dx = \left[\varepsilon \cos\left(e^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) - \alpha \cos\left(e^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right]$$

mit α und ε nach Null convergirt.

Zusatz. Wird die Function in unendlich vielen discreten Punkten ihres Integrationsintervalles unendlich, so kann man das Integrationsintervall in eine endliche Anzahl von endlichen Intervallen zerlegen, in denen kein Unendlichkeitspunkt vorkommt, während die Unendlichkeitspunkte in Intervalle eingeschlossen sind, deren Summe beliebig klein wird. Das Integral bekommt eine Bedeutung, falls die Integrale, gebildet für die Intervalle, welche keine Unendlichkeitspunkte enthalten, nach festen Werthen convergiren, wenn man die Grenzen dieser Intervalle den Unendlichkeitspunkten beliebig nahe bringt.

Bilden die Unendlichkeitspunkte eine lineare Menge, so ist solch eine Definition nicht mehr möglich, da es dann endliche Intervalle giebt, in denen überall unendlich viele solcher Punkte gelegen sind.

149. Durch das Auftreten von Unendlichkeitspunkten (ich beschränke die Untersuchung auf die Annahme einer endlichen Anzahl solcher Punkte) werden die in §. 146 gegebenen Sätze zum Theil modificirt.

An Stelle des Satzes V., bei dessen Beweise die Endlichkeit der zu integrirenden Function wesentlich war, erhält man das Theorem:

Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei von a bis b integrirbare Functionen, von denen jede in gewissen Punkten c unendlich wird, doch so, dass kein Unendlichkeitspunkt von φ mit einem Unendlichkeitspunkt von ψ zusammenfällt, so ist auch das Product $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ in diesem Intervalle jedenfalls dann integrirbar, wenn die aus den absoluten Werthen von φ und ψ gebildeten Functionen $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ integrirbar bleiben.

Zum Beweise dieses Satzes brauchen wir bloss ein Intervall von a bis c zu betrachten, in dem keine der Functionen unendlich wird, während die Grenze c Unendlichkeitspunkt für die eine Function, z. B. für $\varphi(x)$, ist. Alsdann erkennt man: Der Betrag von

$$\int_a^{c-\delta} \varphi(x)\, \psi(x)\, dx$$

ist kleiner als

$$M \int_a^{c-\delta} \varphi_1(x)\, dx,$$

unter M den grössten Betrag verstanden, welchen die Function $\psi(x)$ annimmt. Der Voraussetzung nach bleibt aber der zweite Factor auch für $\delta = 0$ endlich.

Folgerung: Werden die integrirbaren Functionen jedesmal in bestimmter Weise unendlich, so ist ihr Product integrirbar; denn alsdann sind die Voraussetzungen des Satzes sämmtlich erfüllt.

Fallen aber die Unendlichkeitspunkte zusammen, so lässt sich kein Schluss auf die Integrirbarkeit ohne weiteres ziehen. So folgt z. B. aus der Integrirbarkeit einer Function, welche unendlich wird, noch nicht die des Quadrates dieser Function:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{aber} \int_0^1 \frac{dx}{(\sqrt{1-x^2})^2} \text{ wird unendlich.}$$

Der erste Mittelwerthsatz in seiner Erweiterung für das Product zweier Functionen (VII.) gilt auch falls $\varphi(x)$ in bestimmter Weise unendlich wird, $f(x)$ jedoch endlich bleibt. Auch hier ist das bestimmte Integral eine stetige Function seiner oberen Grenze (VIII.). Denn bedeutet c einen Unendlichkeitspunkt, so ist

$$\int_a^c f(x)\,dx = \text{Lim}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx\right]_{\delta=0} = \text{Lim}\left[F(c-\delta)\right]_{\delta=0}.$$

Da nun F eine stetige Function von δ ist, so wird, falls ein Grenzwerth $F(c)$ überhaupt existirt, auch

$$\text{abs}\,[F(c) - F(c-\delta)]$$

kleiner als eine beliebig vorgegebene Zahl ε durch Wahl von δ.

Der zweite Mittelwerthsatz (X.) behält seine Geltung, auch wenn die Function $\varphi(x)$ unendlich wird; sobald nur $\varphi(x)$ und $f(x)\,\varphi(x)$ integrirbar sind. Der Differentialquotient des Integrales, gebildet nach der oberen Grenze (§. 147), wird in bestimmter Weise unendlich an jeder Stelle, an welcher die zu integrirende Function stetig wachsend bestimmt unendlich geworden ist; ist dieses nicht der Fall, so braucht der Differentialquotient der Function nicht mit dem Werthe der zu integrirenden Function übereinzustimmen; er kann auch unbestimmt werden. Es ist z. B. gemäss der Gleichung:

$$\frac{d\left(x^2 \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\right)}{dx} = 2x\cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + \sin\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\cdot e^{\frac{1}{x}},$$

$$\int_a^x \left[2x\cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + \sin\left(e^{\frac{1}{x}}\right)e^{\frac{1}{x}}\right]dx = x^2\cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) - a^2\cos\left(e^{\frac{1}{a}}\right) = F(x) - F(a).$$

Der Differentialquotient der Function $F(x)a$ der Stelle $x = 0$ hat den Werth:

$$\text{Lim}\left[\frac{F(0+h) - F(0)}{h}\right] = \text{Lim}\left[h\cos\left(e^{\frac{1}{h}}\right)\right]_{h=0} = 0,$$

während die zu integrirende Function hier unbestimmt unendlich wird.

150. Wie schon im §. 106 gezeigt wurde, kann das bestimmte Integral auch einen endlichen Werth behalten, wenn die Grenzen desselben unendlich werden, indem man unter $\int_a^\infty f(x)\,dx$ den Grenzwerth versteht, welchen das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ annimmt, falls $b=\infty$ wird. Desgleichen ist:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \text{Lim} \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (a = -\infty).^{*)}$$

Durch die Substitution $x = -z$ kann man die Untersuchung der negativ unendlichen Grenze immer auf die positiv unendliche bringen. Beispiele für das Vorhandensein solcher Grenzwerthe sind bereits früher gegeben. (Siehe besonders §. 107 und §. 137.)

Die nothwendige und hinreichende Bedingung eines bestimmten Werthes besteht aber darin, dass

$$\int_u^w f(x)\,dx < \sigma$$

wird, wenn u hinreichend gross und w grösser als u angenommen wird.

Bei einer Function, welche bei beliebig wachsenden Werthen von x nicht unendlich viele Oscillationen macht, ist diese Bedingung sicherlich erfüllt, wenn sie für $x = \infty$ algebraisch von höherer als der ersten Ordnung verschwindet, die Ordnung von $\frac{1}{x}$ für $x = \infty$ als Einheit angenommen. Denn bilden die absoluten Werthe von $f(x)$ eine abnehmende Reihe dergestalt, dass

$$\text{abs}\, f(x) < \frac{A}{x^\nu}$$

ist, unter A eine beliebige endliche Grösse, unter ν eine Zahl grösser als 1 verstanden, so wird:

$$\int_u^w f(x)\,dx < A\int_u^w \frac{dx}{x^\nu} = \frac{A}{1-\nu}\,[w^{1-\nu} - u^{1-\nu}],$$

und dieser Ausdruck convergirt (so lange $1 - \nu < 0$) bei wachsenden Werthen von u und w nach Null.

Wenn dagegen die Function von niederer als der ersten Ordnung

---

*) Wie auch bei unendlichen Grenzen das bestimmte Integral direct als Grenzwerth einer Summe $\sum_{p=1}^{p=\infty} d_p f_p$ betrachtet werden kann, hat Dini, Fondamenti p. 338 ff. gezeigt.

verschwindet (oder gar endlich bleibt), so ist die aufgestellte Bedingung nicht erfüllt. Denn falls

$$f(x) > \frac{A}{x^\nu}, \qquad (\nu \leqq 1)$$

so wird

$$\int_u^w f(x)\,dx > A\int_u^w \frac{dx}{x^\nu} = \frac{A}{1-\nu}\,[w^{1-\nu} - u^{1-\nu}],$$

und hier sind die Exponenten der beliebig wachsenden Werthe u und w positiv.

Ueberhaupt erkennt man, dass die Untersuchung der im §. 148 geführten vollkommen analog ist, weil durch die Substitution $x = \frac{1}{z}$ $\int f(x)\,dx$ übergeht in

$$-\int f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z^2},$$

es muss demnach das Verhalten des neuen Integrales an der Stelle $z = 0$ geprüft werden.

Nach diesem Kriterium kann man z. B. ohne jede Substitution erkennen, dass das Integral (§. 137):

$$\int_{-\infty}^{+x'} \frac{e^{-x}dx}{x}$$

einen endlichen Werth haben muss; denn die Function

$$\frac{e^{-x}}{x} \text{ wird kleiner als } \frac{A}{x^\nu},$$

sogar für jedes $\nu > 1$, weil

$$\lim_{x=\infty}\,[x^{\nu-1}\cdot e^{-x}] = 0.$$

Besitzt aber die Function für unendlich werdende Werthe von x unendlich viele Oscillationen, so braucht die Ordnung des Verschwindens keinerlei Beschränkung unterworfen zu sein. So hat z. B.

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$$

einen bestimmten endlichen Werth, wiewohl die zu integrirende Function für $x = \infty$ zwischen den Grenzen -1 und $+1$ völlig unbestimmt wird*). Denn es ist:

$$\int_u^w \sin(x^2)\,dx = -\int_u^w d\,[\cos(x^2)]\cdot\frac{1}{2x} = -\left[\frac{\cos(x^2)}{2x}\right]_u^w - \frac{1}{2}\int_u^w \frac{\cos(x^2)}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{(\cos w^2)}{2w} + \frac{\cos(u^2)}{2u} - \frac{1}{2}\int_u^w \frac{\cos(x^2)}{x^2}\,dx.$$

---

*) Dirichlet, Journal f. Math. Bd. 17.

Die Differenz der beiden ersten Glieder ist, absolut genommen, nicht grösser als $\frac{1}{u}$. Da ferner die Function $\frac{1}{x^2}$ ihr Zeichen nicht wechselt, so wird nach dem ersten Mittelwerthsatze der Betrag:

$$\frac{1}{2}\int_u^w \frac{\cos(x^2)}{x^2}\,dx = \frac{M}{2}\int_u^w \frac{dx}{x^2} = \frac{M}{2}\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{w}\right] < \frac{1}{2u},$$

da M einen Mittelwerth von $\cos(x^2)$, also einen echten Bruch bedeutet. Sonach ist

$$\operatorname{abs}\int_u^w \sin(x^2)\,dx < \frac{3}{2u}$$

und wird mit wachsenden Werthen von u zu Null.

Es ist

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\,dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\pi}. \quad \text{(Siehe §. 158.)}$$

Ein anderes Beispiel ist:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

dessen Endlichkeit in ähnlicher Weise erwiesen werden kann. Lehrreicher noch ist es, folgenden Process zu betrachten: Ist $w = k\pi + \alpha$ eine beliebig grosse Zahl (k ganzzahlig, $\alpha < \pi$), so ist

$$\int_0^w \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \ldots \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} + \int_{k\pi}^{k\pi+\alpha} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Die Glieder dieser unendlichen Reihe (für $k = \infty$) bekommen wechselnde Zeichen und ihre Beträge nehmen ab; denn vergleicht man:

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{und} \quad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

so wird, indem man die Grenzen des zweiten Integrales vermittelst der Substitution $y = x - \pi$ denen des ersten gleich macht:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin(y+\pi)}{y+\pi}\,dy = -\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin y}{y+\pi}\,dy.$$

Für wachsende Werthe von k convergiren die Beträge dieser Integrale nach Null; mithin hat die unendliche Reihe für $x = \infty$ einen endlichen Werth. Beachtenswerth ist noch, dass:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha z}{z}\,dz, \qquad (x = \alpha z,\ \alpha > 0)$$

so dass der Werth des Integrales von α unabhängig ist; er ist $\frac{1}{2}\pi$ (§. 155).

Die Convergenz dieser Integrale ist nur eine bedingte, d. h. sie kommt nur durch den Zeichenwechsel der zu integrirenden Functionen zu Stande; die Integrale, gebildet aus den absoluten Beträgen, sind divergent. Dass indessen auch bei Oscillationen zwischen Null und positiven Grenzen Integrale convergent sein können, ist von Du Bois-Reymond an einer allgemeinen Classe von Beispielen (Math. Annal. Bd. 13) nachgewiesen worden.

151. Differentiation des bestimmten Integrales nach einem Parameter*).

Für die Rechnung mit bestimmten Integralen ist ein Satz wichtig, welcher angiebt, wie das bestimmte Integral in gewissen Fällen nach einer Grösse differentiirt werden kann, welche in der zu integrirenden Function enthalten ist.

Zunächst bemerke ich: Es sei die Function $f(x, \alpha)$ innerhalb des Gebietes, welches durch die Werthe $x = a$ bis $x = b$ und $\alpha = \beta$ bis $\alpha = \gamma$ bestimmt wird, eine stetige Function der beiden Variabelen x und α (§. 52), so ist auch das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

eine stetige Function von α. Denn lässt sich, welchen Werth auch x haben mag, ein Werth h angeben, so dass im Intervall α bis $\alpha \pm h$

$$\text{abs}\,[f(x, \alpha \pm h) - f(x, \alpha)] < \delta,$$

so ist auch

$$\int_a^b f(x, \alpha \pm h)\, dx - \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b [f(x, \alpha \pm h) - f(x, \alpha)]\, dx$$

seinem absoluten Werthe nach kleiner als $\delta(b - a)$; es kann also durch Wahl von h beliebig verkleinert werden. Diese Bedingung ist eine hinreichende; der Satz kann aber nicht umgekehrt werden.

Der Differentialquotient des bestimmten Integrales für einen bestimmten Werth von α ist als Grenzwerth

$$\text{Lim}\, \frac{\int_a^b f(x, \alpha + h)\, dx - \int_a^b f(x, \alpha)\, dx}{h} = \text{Lim} \int_a^b \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h}\, dx$$

zu berechnen; d. h. es ist zuerst bei einem endlichen Werthe von h das bestimmte Integral auszuwerthen und dann die Grenze für $h = 0$

---

*) Thomae: Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale. S. 20 ff.

zu ermitteln. Es fragt sich, ob diese Processe auch in umgekehrter Folge vollzogen werden dürfen; ist dieses der Fall, so hat man den Differentialquotienten des bestimmten Integrales durch ein neues Integral, nämlich

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$$

dargestellt, was ein wichtiger Satz für die Berechnung von bestimmten Integralen wäre.

Setzt man, um die Bedingung dieses Satzes zu erkennen

$$\frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h} = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} + \varphi(x, \alpha, h),$$

so ist φ eine mit x und h veränderliche Grösse, die für $h = 0$ Null wird. Wir wollen nun annehmen, dass der Differentialquotient $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ ebenso wie f im Intervalle $x = a$ bis $x = b$ eine stetige Function von x ist, dann ist auch bei jedem Werthe von h, φ eine stetige Function von x, so dass beide Functionen auch integrabel sind*). Also wird:

$$\int_a^b \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h} dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + \int_a^b \varphi(x, \alpha, h)\, dx.$$

Lässt man in dieser Gleichung den Werth h nach Null convergiren, so geht sie nur dann in die gewünschte Gleichung

$$\operatorname*{Lim}_{h=0} \int_a^b \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h} dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$$

über, falls

$$\operatorname*{Lim}_{h=0} \int_a^b \varphi(x, \alpha, h)\, dx$$

stetig zur Grenze Null convergirt. Die nothwendige und hinreichende Bedingung besteht also darin, dass sich zu jedem noch so kleinen Werthe δ ein h ermitteln lässt, so dass

$$\text{abs}\left[\int_a^b \varphi(x, \alpha, h)\, dx\right] < \delta.$$

Diese Bedingung lehrt, dass der Satz von der Vertauschung der Integration und Differentiation keineswegs immer statt hat. Er wird z. B. bei allen denjenigen Functionen f nicht gelten, bei welchen,

---

*) Ist $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ keine integrabele Function, so ist die Möglichkeit des Satzes überhaupt ausgeschlossen.

während φ stets dasselbe Zeichen hat, die Stellen x, an denen der Ungleichung

$$\text{abs}\,[\varphi\,(x,\alpha,h)] = \text{abs}\left[\frac{f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)}{h} - \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right] < \delta$$

nicht durch einen angebbaren Werth h genügt werden kann, einer linearen Punktmenge angehören *).

Es lässt aber der Gang unserer Untersuchung eine Bedingung erkennen, welche hinreichend ist. Ist nämlich $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ bei jedem Werthe von x auch eine stetige Function von α, so lässt sich mit Hülfe des Mittelwerthsatzes die obige Ungleichung in der Form schreiben:

$$\text{abs}\left[\frac{\partial f(x,\alpha+\Theta h)}{\partial\alpha} - \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right] < \delta.$$

Soll diese Bedingung für alle Werthe von x innerhalb des Integrationsintervalles im allgemeinen (mit Ausnahme allenfalls einer discreten Punktmenge) erfüllt sein, so muss $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ im allgemeinen eine gleichmässig stetige Function von α sein, und folglich auch im allgemeinen

---

*) Es sei $\int_0^x f(x,\alpha)\,dx = x\sin\left(4\,\text{arctg}\,\frac{\alpha}{x}\right)$, also eine stetige Function beider Variabelen, so ist

$$f(x,\alpha) = \sin\left(4\,\text{arctg}\,\frac{\alpha}{x}\right) - \frac{4\alpha x}{x^2+\alpha^2}\cos\left(4\,\text{arctg}\,\frac{\alpha}{x}\right).$$

An der Stelle $x=0$, $\alpha=0$ soll $f(0,0)=0$ sein; diese Festsetzung hat keinen Einfluss auf das Integral. Im übrigen gilt die Gleichung bei jedem Werthe von x; für $\alpha=0$ ist $f(x,0)=0$; für $x=0$ ist $f(0,\alpha)=0$. Differentiirt man das Integral nach α, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^x f(x,\alpha)\,dx = \frac{4}{1+\frac{\alpha^2}{x^2}}\cos\left(4\,\text{arctg}\,\frac{\alpha}{x}\right)$$

und für $\alpha=0$ ist dieser Werth gleich 4. Es wird aber

$$\int_0^x \left[\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}\right]_{\alpha=0} dx = 0,$$

weil

$$\left[\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=0} = \lim_{\Delta\alpha=0}\left[\frac{\sin\left(4\,\text{arctg}\,\frac{\Delta\alpha}{x}\right)}{\Delta\alpha} - \frac{4x}{x^2+\Delta\alpha^2}\cos\left(4\,\text{arctg}\,\frac{\Delta\alpha}{x}\right)\right] = 0.$$

Der Satz von der Vertauschung besteht also nicht, wiewohl $f(x,\alpha)$ und ebenso $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ bei jedem Werthe von x stetige Functionen von α sind.

eine stetige Function beider Variabelen. Mithin besteht der Satz: *Lässt sich bei einem bestimmten Werthe von α ein Intervall angeben, so dass $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ im Gebiete von α bis $\alpha + h$ und von $x = a$ bis $x = b$ eine im allgemeinen stetige Function der beiden Variabelen ist, so wird*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

(Auch ist es für die Gültigkeit des Satzes hinreichend, dass das bestimmte Integral eine solche Function seiner oberen Grenze x und des Parameters α ist, für welche die ersten Ableitungen nach x und α stetig sind, und der Satz von der Vertauschbarkeit der Folge der Differentiationen nach x und α (§. 54) besteht. Denn bezeichnet man

$$\int_a^x f(x, \alpha)\, dx = F(x, \alpha),$$

so ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, \alpha), \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial x} = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial \alpha} = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial \alpha}\int_a^x f(x, \alpha)\, dx,$$

und aus der Gleichung:

$$\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial \alpha}\int_a^x f(x, \alpha)\, dx$$

folgt durch Integration:

$$\int_a^x \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_a^x f(x, \alpha)\, dx.)$$

Hängen die Grenzen des Integrales gleichfalls von dem Parameter α ab, so erhält man die Ableitung nach α, vorausgesetzt, dass die Differentiation unter dem Integral zulässig ist, durch die Formel:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha} + \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

152. Die vorstehenden Sätze bedürfen noch einer Ergänzung, wenn die Grenzen des Integrales oder die zu integrirenden Functionen unendlich werden. Ich betrachte, ohne alle Möglichkeiten zu erschöpfen, folgende Fälle.

a) Ist $f(x, \alpha)$ eine stetige Function beider Variabelen in dem Gebiete für $x = a$ bis $x = \infty$ und für $\alpha = \beta$ bis $\alpha = \gamma$, so ist

$$\int_0^\infty f(x, \alpha)\, dx$$

doch nur unter einer gewissen Voraussetzung eine stetige Function von α. Es ist

$$\int_a^\infty [f(x, \alpha \pm h) - f(x, \alpha)]\, dx = \int_a^w [f(x, \alpha \pm h) - f(x, \alpha)]\, dx + \\ + \int_w^\infty [f(x, \alpha \pm h) - f(x, \alpha)]\, dx.$$

Damit dieser Ausdruck durch Wahl von h kleiner als δ werde, muss die Function so beschaffen sein, dass für alle Werthe im Intervalle $\alpha - h$ bis $\alpha + h$ ein und dasselbe w ausreicht, damit

$$\int_w^\infty [f(x, \alpha \pm h) - f(x, \alpha)]\, dx < \delta$$

wird.

Es ist z. B. $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \pm \frac{1}{2} \pi$ für jeden endlichen Werth von α, aber für $\alpha = 0$ ist der Werth des Integrales Null. Es ist also das bestimmte Integral keine stetige Function von α, wiewohl die zu integrirende Function stetig für beide Variabele ist.

Die Voraussetzung ist aber erfüllt, wenn die Function f, welchen Werth auch α haben mag, für $x = \infty$ in bestimmter Weise und zwar von höherer als der ersten Ordnung verschwindet. Denn alsdann kann man erst w so gross annehmen, dass

$$\int_w^\infty [f(x, \alpha \pm h) - f(x, \alpha)]\, dx < \frac{\delta}{2}$$

und dann den Werth von h so bestimmen, dass

$$\int_0^w [f(x, \alpha \pm h) - f(x, \alpha)]\, dx < \frac{\delta}{2}$$

wird.

In diesem Falle ist die Differentiation unter dem Integralzeichen sicherlich möglich, wenn auch $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ eine stetige Function beider Variabelen ist, die für $x = \infty$ in höherer als der ersten Ordnung Null wird. Denn setzt man:

$$\frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h} = \frac{\partial f(x, \alpha + \Theta h)}{\partial \alpha},$$

so ist

$$\int_0^\infty \left[\frac{f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)}{h} - \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right] dx = \int_0^w \left[\frac{\partial f(x,\alpha+\Theta h)}{\partial \alpha} - \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right] dx$$
$$+ \int_w^\infty \left[\frac{\partial f(x,\alpha+\Theta h)}{\partial \alpha} - \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right] dx.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung convergirt, wie eben gezeigt wurde, mit h nach Null und also ist

$$\operatorname*{Lim}_{h=0} \int_0^\infty \frac{f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)}{h}\, dx = \int_0^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

b) Wird eine der Functionen $f(x, \alpha)$ und $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, oder auch beide zugleich, innerhalb des Intervalles an der Stelle $x = c$ unendlich, doch so, dass für beide die Integration gestattet ist, während α innerhalb eines Intervalles $\alpha - h$ und $\alpha + h$ variirt, so ist es wiederum eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des Satzes von der Differentiation unter dem Integral, wenn $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ in bestimmter Weise von niederer als der ersten Ordnung unendlich wird, im übrigen aber stetig bleibt. Denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_a^c f(x,\alpha)\, dx = \operatorname*{Lim}_{h=0} \int_a^{c-\delta} \frac{f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)}{h}\, dx + \int_{c-\delta}^c \frac{f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)}{h}\, dx.$$

Das erste Integral der rechten Seite geht nun, wie klein auch immer δ ist, in den Werth des Integrales

$$\int_a^{c-\delta} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx$$

über, der zweite Theil erhält die Form

$$\int_{c-\delta}^c \frac{\partial f(x,\alpha+\Theta h)}{\partial \alpha}\, dx$$

und kann der Voraussetzung nach, wie klein auch immer h gewählt wird, lediglich durch Wahl von δ kleiner gemacht werden als eine beliebig kleine Zahl. Es unterscheidet sich also

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_a^c f(x,\alpha)\, dx \quad \text{von} \quad \int_a^{c-\delta} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx$$

beliebig wenig, indem δ nach Null convergirt; d. h. es besteht die zu beweisende Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^c f(x,\alpha)\,dx = \int_a^c \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx.$$

153. Integration eines bestimmten Integrals nach einem Parameter.

Ist das bestimmte Integral eine stetige Function des Parameters α innerhalb gewisser Grenzen β und γ, so ist es auch zwischen diesen Grenzen sicherlich integrabel in Bezug auf α.

Bezeichnet man

$$\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = F(\alpha)$$

so ist:

$$\int_\beta^\gamma F(\alpha)\,d\alpha = \int_\beta^\gamma d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)\,dx.$$

Einem solchen Ausdrucke hat man den Namen eines bestimmten Doppelintegrales beigelegt; er ist so zu verstehen, dass erst die Integration nach x dann die nach α ausgeführt werden soll. Die allgemeine Theorie der Doppelintegrale wird im Capitel 8 behandelt werden; hier soll nur eine Frage gelöst werden. Angenommen die Grenzen a und b, β und γ seien von einander ganz unabhängig bestimmte Constante und $f(x,\alpha)$ sei eine stetige Function beider Variabelen, ist dann die Reihenfolge der Integrationen von Einfluss auf das Resultat; oder ist:

$$\int_\beta^\gamma d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b dx \int_\beta^\gamma f(x,\alpha)\,d\alpha\,?$$

Für $b = a$ werden beide Ausdrücke Null. Sie sind also gleiche Functionen von b, wenn ihre Ableitungen nach b übereinstimmen. Differentiirt man beide Seiten dieser Gleichung nach der oberen Grenze b, so muss

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_\beta^\gamma d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \left[\int_\beta^\gamma f(x,\alpha)\,dx\right]_{\text{für } x=b} = \int_\beta^\gamma f(b,\alpha)\,d\alpha$$

sein. Das heisst aber, das Integral in Bezug auf α auf der linken Seite muss die Differentiation unter dem Integralzeichen gestatten. Dieselbe ist aber gestattet, weil die Ableitung von $\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ nach b gleich $f(b,\alpha)$ der Annahme nach eine stetige Function der beiden Variabelen α und b ist. Die Umkehr ist also für eine stetige Function zweier Variabelen statthaft.

Sind die Grenzen b und γ unendlich, so ist

$$\int_\beta^\infty d\alpha \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \lim_{w=\infty} \int_\beta^w d\alpha \left[\lim_{u=\infty} \int_a^u f(x,\alpha)\,dx \right]$$

$$\int_a^\infty dx \int_\beta^\infty f(x,\alpha)\,d\alpha = \lim_{u=\infty} \int_a^u dx \left[\lim_{w=\infty} \int_\beta^w f(x,\alpha)\,d\alpha \right].$$

Ist nun $f(x,\alpha)$ bei beliebig wachsenden Werthen von x und α eine stetige Function beider Variabelen, so besteht die Gleichung

$$\int_\beta^w d\alpha \int_a^u f(x,\alpha)\,dx = \int_a^u dx \int_\beta^w f(x,\alpha)\,d\alpha.$$

Lässt man zuerst u beliebig wachsen, während der Werth von w beliebig gross festgehalten wird, und sind die Functionen $f(x,\alpha)$ und $\int_\beta^w f(x,\alpha)\,d\alpha$ in Bezug auf x auch für unendliche Grenzen integrirbar, so folgt die Relation

$$\int_\beta^w d\alpha \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_a^\infty dx \int_\beta^w f(x,\alpha)\,d\alpha.$$

Wächst nun auch w beliebig und geht dabei die linke Seite in einen bestimmten Werth über, so wird auch auf der rechten Seite die Grösse w durch den Werth ∞ ersetzt werden dürfen, falls noch die Bedingung erfüllt ist, dass sich eine obere Grenze w ausfindig machen lässt, so dass

$$\int_a^\infty dx \int_w^\infty f(x,\alpha)\,d\alpha$$

kleiner bleibt als eine beliebig kleine Zahl δ. Denn alsdann sind beide Seiten stetige Functionen von w. Das wird insbesondere dann der Fall sein, wenn die Function $f(x,\alpha)$ die Eigenschaft hat, dass sich, welchen Werth auch x haben mag, eine untere Grenze für α angeben lässt, so dass die Function $f(x,\alpha)$ absolut kleiner bleibt als $\frac{\varphi(x)}{\alpha^\nu}$ wobei $\nu > 1$ und $\varphi(x)$ eine zwischen den Grenzen 0 und ∞ integrirbare Function von x bedeutet.

Wird die Function $f(x,\alpha)$ an einer Stelle $x = c$ unendlich, doch so, dass bei allen Werthen von α zwischen β und γ die Integration bis zu dieser Stelle gestattet ist, so ist

$$\int_\beta^\gamma d\alpha \int_a^{c-\delta} f(x,\alpha)\,d\alpha = \int_a^{c-\delta} dx \int_\beta^\gamma f(x,\alpha)\,d\alpha$$

wie klein auch δ gewählt wird. Lässt man nun δ nach Null convergiren, so wird die linke Seite in den Werth $\int\limits_\beta^\gamma d\alpha \int\limits_a^c f(x,\alpha)\,d\alpha$ übergehen, falls sich eine Grösse δ angeben lässt, welche im allgemeinen bei allen Werthen von α zwischen β und γ hinreichend ist, damit $\int\limits_{c-\delta}^c f(x,\alpha)\,dx$ kleiner als eine beliebig kleine Grösse ε werde. In den nämlichen Werth geht dann auch die rechte Seite, falls sie überhaupt einen bestimmten Grenzwerth hat, als stetige Function von δ über.

Diese hinreichenden Bedingungen sind z. B. erfüllt, wenn

$$\text{abs}\, f(x,\alpha) < \frac{A}{(x-c)^\nu}, \quad (\nu < 1)$$

während A als Function von α endlich bleibt.

Beispiel. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\pi$ (§. 150 u. 155) für jeden endlichen Werth von α; ausser für $\alpha = 0$, wo der Werth des Integrals Null ist. Trotzdem ist eine Integration nach α z. B. zwischen den Grenzen Null und 1 möglich:

$$\int\limits_0^1 d\alpha \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\pi \int\limits_0^1 d\alpha = \frac{1}{2}\pi.$$

Durch Vertauschung der Folge ergiebt sich:

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x} \int\limits_0^1 \sin \alpha x\,d\alpha = \int\limits_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = 2\int\limits_0^\infty \frac{(\sin x)^2}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi.$$

Ein Beispiel, dass die Vertauschung der Integrationsfolge bei unstetigen Functionen nicht denselben Werth ergiebt, ist das folgende*):

$$\int\limits_0^1 d\alpha \int\limits_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)\,dx}{(\alpha^2 + x^2)^2} \text{ ist nicht gleich } \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)\,d\alpha}{(\alpha^2 + x^2)^2}.$$

Hier ist die zu integrirende Function an der Stelle $x = 0$, $\alpha = 0$ unstetig.

Es ist

$$\int\limits_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)\,dx}{(\alpha^2 + x^2)^2} = \left[\frac{x}{\alpha^2 + x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Das erste Doppelintegral wird demnach gleich

$$\int\limits_0^1 \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = \Big[\text{arctg}\ \alpha\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

*) Cauchy, Leçons de calcul différent. et intégral rédigées par Moigno. S. 85.

Dagegen ist

$$\int_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)\,d\alpha}{(\alpha^2 + x^2)^2} = -\left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{1 + x^2},$$

also wird das zweite Doppelintegral gleich $-\frac{\pi}{4}$.

Man bemerke, dass dieser Unterschied schon dadurch herbeigeführt wird, dass

$$\int_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)\,dx}{(\alpha^2 + x^2)^2}$$

zwar im allgemeinen für endliche Werthe von α den Werth $\frac{1}{1+\alpha^2}$ hat, für $\alpha = 0$ aber gleich $-\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ also unendlich wird; es ist der Werth von

$$\lim_{\alpha=0}\left[\int_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)\,dx}{(\alpha^2 + x^2)^2}\right] \text{ von dem Werthe } \int_0^1 \lim_{\alpha=0}\left[\frac{(\alpha^2 - x^2)}{(\alpha^2 + x^2)^2}\right]dx$$

verschieden. In Folge dessen wird schon in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $\alpha = 0$

$$\int_0^{\delta'} d\alpha \int_0^{\delta} \frac{(\alpha^2 - x^2)\,dx}{(\alpha^2 + x^2)^2} = \int_0^{\delta'} \frac{\delta}{\alpha^2 + \delta^2}\,d\alpha = \left[\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\delta}\right]_0^{\delta'} = \operatorname{arctg}\frac{\delta'}{\delta}.$$

Dagegen:

$$\int_0^{\delta} dx \int_0^{\delta'} \frac{(\alpha^2 - x^2)\,d\alpha}{(\alpha^2 + x^2)^2} = -\int_0^{\delta} \frac{\delta'}{\delta'^2 + x^2}\,dx = \left[-\operatorname{arctg}\frac{x}{\delta'}\right]_0^{\delta} = -\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\delta'}.$$

Die Werthe der Doppelintegrale sind völlig unbestimmt, abhängig von der Art, in welcher δ' und δ nach Null convergiren. (Vgl. §. 168.)

Siebentes Capitel.

Beispiele zur Berechnung bestimmter Integrale. Die Fundamentalformeln für die Euler'schen Integrale.

154. Erste Gruppe.

1) $$\int_0^1 x^{a-1}\,dx = \left[\frac{x^a}{a}\right]_0^1 = \frac{1}{a} \quad (a > 0).$$

Durch successive Differentiationen nach dem Parameter a folgen die Integrale:

2) $$\int_0^1 x^{a-1} l(x)\, dx = -\frac{1}{a^2},$$

$$\int_0^1 x^{a-1}[lx]^2 dx = \frac{1.2}{a^3} \dots \int_0^1 x^{a-1}[lx]^{n-1} dx = \frac{(-1)^{n-1}.\, n-1!}{a^n}$$

Alle diese Integrale gelten (nach den Sätzen §. 152b und §. 148) für $a > 0$. Durch Integration nach dem Parameter a zwischen den Grenzen $a = \alpha$ und β folgt:

$$\int_\alpha^\beta da \int_0^1 x^{a-1} dx = \int_0^1 dx \int_\alpha^\beta x^{a-1} da = \int_0^1 dx\, \frac{x^{\beta-1} - x^{\alpha-1}}{l(x)} = l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Diese Formel gilt falls α und $\beta > 0$.

Denn solange a positiv ist, bleibt nicht nur x^{a-1}, sondern auch $\frac{x^{a-1}}{l(x)}$ an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ integrabel, und es ist auch die am Schluss von §. 153 angegebene Bedingung erfüllt.

Setzt man $\alpha = 1$, so folgt:

3) $$\int_0^1 dx\, \frac{x^{\beta-1} - 1}{l(x)} = l(\beta). \qquad (\beta > 0).$$

Substituirt man an Stelle von x die Function e^{-x}, so werden die Grenzen statt 0 und 1, ∞ und 0, und man erhält für $a > 0$:

1a) $$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}.$$

2a) $$\int_0^\infty e^{-ax} x\, dx = \frac{1}{a^2} \dots \int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} dx = \frac{n-1!}{a^n} \quad (n \text{ positiv ganzzahlig}).$$

3a) $$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x}\, dx = l(a).$$

155. Zweite Gruppe. (§. 140.)

Es ist:

1) $$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx &= \frac{b}{a^2 + b^2} \\ \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx &= \frac{a}{a^2 + b^2}. \end{aligned}\right\} \quad (a > 0)$$

Durch Differentiation nach a folgt:

2) $$\int_0^\infty e^{-ax} x \sin bx\, dx = \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax} x \cos bx\, dx = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Durch Integration nach a zwischen den Grenzen α und β folgt:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin bx\,dx = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{b} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{b}.$$

3) $(\alpha \text{ und } \beta > 0).$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos bx\,dx = \frac{1}{2} l \frac{\beta^2 + b^2}{\alpha^2 + b^2}.$$

Lässt man in dem ersten der beiden Integrale α nach Null convergiren, so wird:

$$\text{4)} \qquad \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \sin bx\,dx = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{b}.$$

Denn das Integral 3) ist eine stetige Function von α einschliesslich des Werthes $\alpha = 0$. Zerlegt man nämlich, wie §. 152 es erfordert, das Integral von 0 bis w und von w bis ∞, so erkennt man

$$\int_w^\infty \frac{e^{-hx} - 1}{x} \sin bx\,dx$$

kann unabhängig von dem Werthe h lediglich durch Wahl des Werthes w kleiner gemacht werden, als eine beliebig kleine Zahl, weil (§. 150)

$$\int_w^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$$

durch Wahl von w beliebig verkleinert werden kann und

$$\int_w^\infty \frac{e^{-hx}\sin bx}{x}\,dx$$

nach dem zweiten Mittelwerthsatze gleich dem Producte von

$$e^{-hw}\int_w^u \frac{\sin bx}{x}\,dx$$

ist, wenn die obere Grenze u eine Zahl zwischen w und ∞ bezeichnet. Desgleichen ist das Integral 4) eine stetige Function von β. Lässt man also β unendlich werden, so folgt

$$\text{5)} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \pm\frac{\pi}{2}$$

je nachdem $b > 0$ oder < 0. Dieses bestimmte Integral ist aber, wie schon früher erwähnt wurde, keine stetige Function von b an der Stelle $b = 0$; denn hier erhält es den Werth Null.

Die Formel 5) lässt sich in allgemeiner Form ausdrücken. Ersetzen wir in derselben b einmal durch $b + a$ und ebenso durch $b - a$, und nehmen an, dass $b > a$ und beide Zahlen > 0 sind, so ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin(b+a)x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin(b-a)x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Demnach ist auch, wie durch Addition und Subtraction folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin ax . \cos bx}{x}\,dx = 0 \qquad (b > a)$$

oder

6) $$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}\,dx = 1 \text{ oder } = 0, \text{ je nachdem } b > \text{ oder } < a.$$

Für $a = b$ ist $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2bx}{x}\,dx = \frac{1}{2}$.

156. Dritte Gruppe. (Laplace'sche Integrale.)

Setzt man $u = \int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}\,dx$ (a und $b > 0$), so ist $u = 0$ solange $b < a$ und $u = \frac{\pi}{2}$ solange $b > a$. Multiplicirt man beide Seiten mit e^{-bc}, wobei c positiv ist, und integrirt von $b = 0$ bis $b = \infty$, so folgt:

$$\int_0^\infty u e^{-bc} db = \frac{\pi}{2}\int_a^\infty e^{-bc} db = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-ac}}{c} = \int_0^\infty e^{-bc} db \int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}\,dx.$$

Vertauscht man die Reihenfolge der Integrationen in dem Integrale rechts, so wird dasselbe:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \cos ax \int_0^\infty e^{-bc} \sin bx\, db = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2 + x^2}\,dx.$$

Sonach ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-ac}}{c}.$$

Das Integral ist eine stetige Function von a. Wird a negativ, so bleibt die Function unter dem Integral ungeändert, also ist

1) $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\mp ac}}{c}$$ (je nachdem $a > 0$ oder < 0) gilt auch für $a = 0$.

Differentiirt man nach a, so folgt:

2) $$\int_0^\infty \frac{x \sin ax\, dx}{c^2 + x^2} = \pm\frac{\pi}{2}\, e^{\mp ac}.$$ (je nachdem $a > 0$ oder < 0) für $a = 0$ gilt diese Formel nicht mehr.

Die Differentiation nach a ist gestattet (§. 152). Eine weitere Differentiation unter dem Integralzeichen nach a ist dagegen nicht möglich,

weil die Ableitung zwischen den Grenzen 0 und ∞ nicht mehr integrirbar ist. Integrirt man die Gleichung 1) nach a zwischen den Grenzen 0 und a, so folgt, wenn dieser Grenzwerth positiv ist:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(c^2+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-ac}}{c^2}\right]_0^a = \frac{\pi}{2c^2}(1-e^{-ac}). \qquad (a>0)$$

Dagegen für ein negatives a:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(c^2+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{ac}}{c^2}\right]_0^a = \frac{\pi}{2c^2}(e^{ac}-1). \qquad (a<0)$$

Das Integral 1) kann auch nach dem Parameter c successive differentiirt werden.

157. Vierte Gruppe. (§. 139.)

$$\int \sin x^n\,dx = -\frac{\sin x^{n-1}\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin x^{n-2}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{n-2}\,dx.$$

Ist $n=2m$ eine ganze gerade Zahl, so wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{2m}\,dx = \frac{2m-1.2m-3\ldots3.1}{2m.2m-2\ldots4.2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Ist $n=2m+1$ eine ganze ungerade Zahl, so wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{2m+1}\,dx = \frac{2m.2m-2\ldots4.2}{2m+1.2m-1\ldots5.3}.$$

Nun ist $\sin x$ zwischen den Grenzen Null und $\frac{\pi}{2}$ ein echter positiver Bruch, also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{2m-1}\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{2m}\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{2m+1}\,dx$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-1} > \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2m-1}{2m} > \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}.$$

Multiplicirt man mit dem Factor von $\frac{\pi}{2}$, so folgt:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-3}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1} > \frac{\pi}{2} >$$

$$> \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-3}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}.$$

$$A_m > \frac{\pi}{2} > A_m\cdot\frac{2m}{2m+1}.$$

Die Grössen A_m bilden mit wachsenden Werthen von m eine Reihe von abnehmenden Zahlen, grösser als $\frac{\pi}{2}$, die also eine bestimmte Grenze haben muss. Andererseits kann man aber m so gross wählen, dass sich A_m beliebig wenig von $A_m \cdot \frac{2m}{2m+1}$ unterscheidet, d. h. der Grenzwerth von A_m unterscheidet sich beliebig wenig von $\frac{\pi}{2}$, oder es ist also

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \text{ in infinitum*)}.$$

Es ist auch $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^n dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n dx$.

158. Fünfte Gruppe.

Zur Auswerthung des Integrales

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx$$

dient folgendes Verfahren. Man bezeichne den Werth mit A und führe für x eine neue Variable z ein durch die Gleichung $x = \alpha z$, so ist

$$A = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2 z^2} \alpha dz.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $e^{-\alpha^2} d\alpha$ und integrirt alsdann von $\alpha = 0$ bis ∞, so wird

$$A \int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = A^2 = \int\limits_0^\infty dz \int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2(1+z^2)} \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4},$$

also ist

$$1) \qquad A = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Setzt man in dem zweiten Integrale für x den Werth $x\sqrt{\alpha}$, so ist

$$2) \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}. \quad (\alpha > 0)$$

Durch $n$malige Differentiation nach α folgt:

---

*) Wallis, Arithmetica infinitorum. Erste Darstellung einer Zahl in Form eines unendlichen Productes. (Vgl. §. 39 und §. 163.)

$$3)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n}\,dx = \sqrt{\pi}\cdot\frac{1.3.5.(2n-1)}{2^n}\,\alpha^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (\alpha > 0)$$

Substituirt man in dem Integrale 1) für x, $x \pm \alpha$, so folgt:

$$4)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 \mp 2\alpha x}\,dx = \sqrt{\pi}\,.\,e^{\alpha^2}.$$

Setzt man hier für x, $x\sqrt{a}$ und für $2\alpha\sqrt{a}$ den Werth b, so wird

$$5)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 \mp bx}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\cdot e^{\frac{b^2}{4a}} \qquad (a > 0).$$

Aus der zweiten Gleichung in der Form:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx \qquad (\alpha > 0)$$

folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\alpha}}\,d\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sin\alpha\,d\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx.$$

Die Integrationen können vertauscht werden; denn $\sin\alpha\, e^{-\alpha x^2}$ ist eine allenthalben stetige Function, die für $\alpha = \infty$ in höherer Ordnung unendlich klein wird als jede algebraische Function; folglich ist:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\alpha}}\,d\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}},$$

also

$$6)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\alpha}}\,d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\quad \text{Ebenso findet man:}\ \int_0^\infty \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\alpha}}\,d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\ ^{*)}$$

159. Sechste Gruppe.

Im §. 115 wurde die Formel bewiesen:

$$1)\ \int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{x^n+e^{\alpha i}} = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{e^{-\left(1-\frac{m}{n}\right)\alpha i}}{\sin\frac{m}{n}\pi}, \qquad (m \text{ und } n \text{ positiv ganzzahlig}, m < n)\quad -\pi < \alpha < +\pi.$$

Setzt man $x^n = z$ und bezeichnet den rationalen Bruch $\frac{m}{n}$ mit a, so wird

$$2)\qquad \int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{z+e^{\alpha i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot e^{(a-1)\alpha i}. \qquad (0 < a < 1,\ -\pi < \alpha < +\pi).$$

*) Auf diese Integrale wurde Euler geführt bei der Aufgabe, diejenigen Curven zu bestimmen, deren Krümmungshalbmesser den Längen des Curvenbogens umgekehrt proportional sind. (Euler's Integralrechnung, übers. v. Salomon. Bd. IV. Supplemt. S. 321.)

Diese Gleichung gilt zunächst nur für rationale echte Brüche. Da aber das bestimmte Integral ebenso wie die Function auf der rechten Seite eine stetige Function von a ist (Beweis nach §. 152), so bleibt sie auch für jede irrationale Zahl kleiner als 1 bestehen. Für $\alpha = 0$ ergiebt sich:

$$3)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1),$$

oder, indem man das Integral in die Grenzen Null bis Eins und Eins bis ∞ zerlegt, und in dem zweiten statt x den Werth $\frac{1}{x}$ einführt:

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1} + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1} + \int_0^1 \frac{x^{-a}\,dx}{x+1}.$$

$$4)\qquad \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{-a}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1).$$

Während das Integral 1) für $\alpha = \pm\pi$ keinen endlichen Werth mehr hat, weil die zu integrirende Function an der Stelle $x = 1$ unendlich in der ersten Ordnung wird, so muss doch das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1} - x^{m'-1}}{x^n + e^{ai}}\,dx$$

auch für $\alpha = \pi$ bestehen, weil sich der Factor $x - 1$ im Zähler und Nenner weghebt. Den Werth des Integrales kann man als Differenz zweier Integralwerthe 1) darstellen, also:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1} - x^{m'-1}}{x^n + e^{ai}}\,dx = \frac{\pi}{n}\left[\frac{e^{-\left(1-\frac{m}{n}\right)ai}}{\sin\frac{m}{\pi}\pi} - \frac{e^{-\left(1-\frac{m'}{n}\right)ai}}{\sin\frac{m'}{n}\pi}\right].$$

Beide Seiten sind stetige Functionen von α einschliesslich des Werthes $x = \pi$, und folglich ergiebt sich

$$5)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{m-1} - x^{m'-1}}{x^n - 1}\,dx = \frac{\pi}{n}\left[\frac{e^{\frac{m}{n}\pi i}}{\sin\frac{m}{n}\pi} - \frac{e^{\frac{m'}{n}\pi i}}{\sin\frac{m'}{n}\pi}\right] e^{-\pi i} =$$

$$= \frac{\pi}{n}\left[\operatorname{cotg}\frac{m'}{n}\pi - \operatorname{cotg}\frac{m}{n}\pi\right].$$

Setzt man $x^n = z$, $\frac{m}{n} = a$, $\frac{m'}{n} = b$, so wird:

$$6)\qquad \int_0^\infty \frac{z^{a-1} - z^{b-1}}{1-z}\,dz = \pi\,[\operatorname{cotg} a\pi - \operatorname{cotg} b\pi] \quad (0 < a \text{ und } b < 1).$$

Sei $b = 1 - a$:

7) $$\int_0^\infty \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z}\, dz = 2\pi \operatorname{cotg} a\pi.$$

160. Die Euler'schen Integrale (Gammafunctionen).

$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$ hat, wie im §. 154 gefunden wurde, für jeden positiven ganzzahligen Werth von n den Werth $n! = 1.\, 2 \ldots n$. Indem diese Beschränkung für den Exponenten von x aufgehoben wird, entsteht das Problem, welchen Werth besitzt das Integral

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

bei beliebigem Werthe von a? Bei jedem endlichen Werthe der oberen Grenze lässt sich der Werth durch eine Reihe darstellen, indem man die Exponentialfunction durch ihre Potenzreihe ersetzt; aber für eine unendliche Grenze liefert dies Verfahren keine directe Lösung.

Das Integral hat einen endlichen Werth nur für $a > 0$; denn ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird die zu integrirende Function für $x = 0$ von höherer als der ersten Ordnung unendlich (§. 148). Man nennt das Integral nach Legendre das Euler'sche Integral zweiter Gattung, und bezeichnet den gesuchten Werth, als eine Function des Exponenten a, kurz durch $\Gamma(a)$ die Gammafunction *). Es ist also:

I) $$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(a)$$

eine definirende Gleichung.

Ersetzt man x der Reihe nach durch $x^{\frac{1}{a}}$, $l\frac{1}{x}$ und kx ($k > 0$), so wird:

dx ersetzt durch $\frac{1}{a} x^{\frac{1}{a}-1} dx$, also: 1) $\int_0^\infty e^{-\left(x^{\frac{1}{a}}\right)} dx = a\,\Gamma(a) \quad (a>0)$,

dx ersetzt durch $-\frac{dx}{x}$, also: 2) $\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx = \Gamma(a) \quad (a>0)$,

dx ersetzt durch $k\,dx$, also: 3) $\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a}, (a>0, k>0)$.

---

*) Euler: Inst. calc. integr. P. I. Cap. 4. 8. 9. Ferner Nov. Comment. Acad. Petrop. Tom. XVI; in der Uebersetzung der Euler'schen Integralrechnung von Salomon Bd. IV Supplement III. Legendre: Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes. Tome II.

Diese Integrale sind ebenfalls berechnet, sobald der Werth von $\Gamma(a)$ bekannt ist.

Auch für complexe Werthe von a behält die Function $\Gamma(a)$ einen endlichen Werth, falls nur der reelle Theil von a positiv ist.

Denn setzt man $a = \alpha + i\beta$ und beachtet, dass

$$x^{i\beta} = e^{i\beta l(x)} = \cos(\beta . l(x)) + i \sin(\beta . l(x)),$$

so wird:

$$\Gamma(\alpha + i\beta) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cos(\beta . l(x))\, e^{-x}\, dx + i \int_0^\infty x^{\alpha-1} \sin(\beta . l(x))\, e^{-x}\, dx.$$

Es ist aber:

$$\operatorname{Lim} \left[\int_\delta^\varepsilon x^{\alpha-1} \cos(\beta . l(x))\, e^{-x} dx\right] = \operatorname{Lim}\left[M \int_\delta^\varepsilon x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx\right] = 0$$

für $\delta = 0,\ \varepsilon = 0,$

$$\operatorname{Lim} \left[\int_u^w x^{\alpha-1} \cos(\beta . l(x)) e^{-x} dx\right] = \operatorname{Lim}\left[M' \int_u^w x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx\right] = 0$$

für $u = \infty,\ w = \infty,$

wobei M und M' bezügliche Mittelwerthe der durchweg endlichen Function $\cos(\beta . l(x))$ bezeichnen; und analoges gilt für das zweite Integral.

Im Folgenden soll indess nur die Lösung der Aufgabe erzielt werden, die Gammafunction für reelle Argumente zu berechnen; wiewohl die folgenden Sätze zum Theil auch für ein complexes Argument gelten.

161. Erste Eigenschaft. Aus der Formel:

$$d(e^{-x} x^a) = a e^{-x} x^{a-1} dx - e^{-x} x^a dx$$

folgt durch Integration zwischen den Grenzen Null und ∞:

$$0 = a \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx - \int_0^\infty e^{-x} x^a dx \text{ oder II) } \Gamma(1 + a) = a\Gamma(a).$$

Darnach ist für die Reihe der ganzen Zahlen:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1, \quad \Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2 . 1,$$

$$\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3! \quad \Gamma(n) = n - 1!$$

Desgleichen ist, wenn man für a den Werth $a + n - 1$ substituirt und unter n eine ganze Zahl versteht:

II') $\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\ldots a\,\Gamma(a)$ *).

Diese Gleichung lehrt, dass die Gammafunction, sobald sie für alle echten Brüche bekannt ist, für jeden andern Werth von a ohne Schwierigkeit berechnet werden kann; so ist z. B.

$$\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}+3\right) = \tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Zweite Eigenschaft. Aus der Formel:

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a}$$

folgt, indem man $k = c + y$ setzt (c und $y > 0$):

$$\int_0^\infty e^{-(c+y)x}\,x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{(c+y)^a}.$$

Multiplicirt man beide Seiten mit $e^{-ky}\,y^{b-1}\,dy$, wo b und k positiv sind, so folgt durch Integration:

$$\int_0^\infty e^{-ky}\,y^{b-1}\,dy\int_0^\infty e^{-(c+y)x}\,x^{a-1}\,dx = \Gamma(a)\int_0^\infty \frac{e^{-ky}\,y^{b-1}}{(c+y)^a}\,dy.$$

Die Umkehr der Integration auf der linken Seite ist gestattet (§. 153), und es ist

$$\int_0^\infty e^{-cx}\,x^{a-1}\,dx\int_0^\infty e^{-(k+x)y}\,y^{b-1}\,dy = \Gamma(b)\int_0^\infty \frac{e^{-cx}\,x^{a-1}}{(k+x)^b}\,dx,$$

also:

III) $$\Gamma(b)\int_0^\infty \frac{e^{-cx}\,x^{a-1}\,dx}{(k+x)^b} = \Gamma(a)\int_0^\infty \frac{e^{-ky}\,y^{b-1}}{(c+y)^a}\,dy. \quad **)$$

Die beiden Seiten sind, falls $b > a$, stetige Functionen von c, einschliesslich des Werthes $c = 0$ (§. 152a). Für $c = 0$ und $k = 1$ erhält die Gleichung die Form:

$$\Gamma(b)\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^b} = \Gamma(a)\,\Gamma(b-a) \qquad (b > a),$$

die auch geschrieben werden kann:

IV) $$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}} \qquad (b > 0,\ a > 0).$$

Diese Formel lehrt ein neues Integral, das zu der Classe der binomischen gehört, vermittelst der Gammafunctionen zu berechnen.

---

*) Euler, a. a. O. Supplement III §. 10.

**) Dirichlet, Journal f. Math. B. 15.

Legendre bezeichnet dasselbe als das Euler'sche Integral erster Gattung. Setzt man

$$x = \frac{y}{1-y}, \quad dx = \frac{dy}{(1-y)^2}, \quad y = \frac{x}{1+x}, \quad 1 + x = \frac{1}{1-y},$$

so ist für $x = 0$ auch $y = 0$, für $x = \infty$ $y = 1$ und es verwandelt sich IV., wenn wiederum statt y x geschrieben wird, in:

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad *)$$

Setzt man $a + b = 1$, bedeutet also a einen echten Bruch, so folgt, weil $\Gamma(1) = 1$, nach Formel IV:

$$\text{V)} \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)} = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (\text{§. 159 Formel 3}).$$

Diese Formel lässt die Berechnung aller Werthe von Γ für Argumente grösser als $\frac{1}{2}$ auf Werthe zwischen Null und $\frac{1}{2}$ zurückführen.

Insbesondere ist für $a = \frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Setzt man statt x y^2, so erhält man das Integral des §. 158.

162. Darstellung der Gammafunction durch ein unendliches Product.

Das Integral I) kann nach dem Parameter a differentiirt werden (§. 152) und man erhält:

$$\frac{d\Gamma(a)}{da} = \Gamma'(a) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,l(x)\,dx.$$

Ersetzt man nach §. 154 Formel 3a $l(x)$ durch seinen Integralwerth:

$$l(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y}\,dy,$$

so ist

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,dx \int_0^\infty \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y}\,dy.$$

Die Folge der Integrationen kann auf der rechten Seite vertauscht werden, denn die Function: $f(x, y) = \frac{e^{-x}\,x^{a-1}\,(e^{-y} - e^{-xy})}{y}$ wird für $x = \infty$, $y = \infty$ von höherer Ordnung unendlich klein als jeder algebraische Ausdruck, für $x = 0$ von niederer als der ersten Ordnung unendlich gross; für $y = 0$ ist:

*) Euler a. a. O. §. 25.

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{e^{-y}-e^{-xy}}{y}\right]_{y=0} = \operatorname{Lim}\left[-e^{-y}+e^{-xy}\,x\right]_{y=0} = -1+x.$$

Demnach setze man zunächst:

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty \frac{dy}{y}\int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,(e^{-y}-e^{-xy})\,dx =$$

$$= \operatorname{Lim}_{\delta=0}\int_\delta^\infty \frac{dy}{y}\int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,(e^{-y}-e^{-xy})\,dx.$$

Es ist aber

$$\int_\delta^\infty \frac{dy}{y}\int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,e^{-y}\,dx = \Gamma(a)\int_\delta^\infty \frac{e^{-y}}{y}\,dy,$$

$$\int_\delta^\infty \frac{dy}{y}\int_0^\infty e^{-x(1+y)}\,x^{a-1}\,dx = \Gamma(a)\int_\delta^\infty \frac{dy}{y\,(1+y)^a}.$$

Also wird:

$$\Gamma'(a) = \Gamma(a)\operatorname{Lim}_{\delta=0}\int_\delta^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{1}{y\,(1+y)^a}\right)dy = \Gamma(a)\int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{1}{y\,(1+y)^a}\right)dy.$$

Denn dass dieses Integral für $a>0$ auch an der Grenze $y=0$ endlich und bestimmt bleibt, ersieht man daraus, dass

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{e^{-y}}{y}-\frac{1}{y(1+y)^a}\right]_{\text{für } y=0} = \operatorname{Lim}\left[\frac{e^{-y}(1+y)^a-1}{y(1+y)^a}\right] =$$

$$= \operatorname{Lim}\left[\frac{e^{-y}(1+y)^{a-1}}{(1+y)^{a-1}}\cdot\frac{-(1+y)+a}{(1+y)+ay}\right]_{y=0} = -1+a,$$

also endlich ist.

Diese Untersuchung war nothwendig, weil die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y}\,dy, \qquad \int_0^\infty \frac{dy}{y\,(1+y)^a}$$

einzeln betrachtet nicht endlich bleiben.

Mithin wird:

$$\text{VI)} \qquad \frac{d\log\Gamma(a)}{da} = \int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{1}{y\,(1+y)^a}\right)dy.$$

Durch Differentiation nach a folgt nun:

$$\text{VII)} \qquad \frac{d^2\,l\,\Gamma(a)}{da^2} = \int_0^\infty \frac{l(1+y)}{y\,(1+y)^a}\,dy = \int_0^\infty \frac{x\,e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx \qquad (a>0),$$

wenn $1+y=e^x$ gesetzt wird.

Dieses Integral eignet sich zu einer Integration durch Reihenentwickelung. Es ist:

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \cdots e^{-nx} + R_n, \quad R_n = \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}},$$

also:

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx = \int_0^\infty xe^{-ax}\,dx + \int_0^\infty xe^{-(a+1)x}\,dx + \cdots \int_0^\infty xe^{-(a+n)x}\,dx + {} + \int_0^\infty R_n\,xe^{-ax}\,dx.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty xe^{-(a+n)x}\,dx = \left[-\frac{xe^{-(a+n)x}}{(a+n)} - \frac{e^{-(a+n)x}}{(a+n^2)}\right]_0^\infty = \frac{1}{(a+n)^2},$$

und es wird

$$\int_0^\infty R_n\,xe^{-ax}\,dx = \int_0^\infty \frac{xe^{-(a+n+1)x}}{1-e^{-x}}\,dx$$

durch Wahl von n beliebig klein, (vergl. auch §. 131), weil

$$\int_0^1 \frac{xe^{-(a+n+1)x}}{1-e^{-x}}\,dx = M\int_0^1 e^{-(a+n+1)x}\,dx = M\left[-\frac{e^{-(a+n+1)x}}{a+n+1}\right]_0^1$$

$$\int_1^\infty \frac{xe^{-(a+n+1)x}}{1-e^{-x}}\,dx = M'\int_1^\infty xe^{-(a+n+1)x}\,dx = M'\left[-\frac{xe^{-(a+n+1)x}}{a+n+1} - \frac{e^{-(a+n+1)x}}{(a+n+1)^2}\right]_1^\infty,$$

wobei M einen Mittelwerth von $\frac{x}{1-e^{-x}}$ im Intervall von 0 bis 1, M' einen Mittelwerth von $\frac{1}{1-e^{-x}}$ im Intervall 1 bis ∞ bedeutet; sonach ist:

$$\text{VIII)} \quad \frac{d^2 l\Gamma(a)}{da^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \cdots \frac{1}{(a+n)^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+n)^2}.$$
$$(a > 0).$$

Integrirt man diese für jeden positiven Werth von a gleichmässig convergente Reihe zwischen den Grenzen 1 und a, so folgt

$$\text{IX)} \quad \frac{dl\Gamma(a)}{da} - \left[\frac{dl\Gamma a}{da}\right]_{\text{für } a=1} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{1}{1+n} - \frac{1}{a+n}\right) = (a-1)\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+n)(a+n)}$$
$$(a > 0),$$

oder

$$\frac{dl\Gamma(a)}{da} = (a-1)\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+n)(a+n)} + C,$$

wobei C, von Legendre die Euler'sche Constante genannt, den Werth von $\left[\frac{dl\Gamma(a)}{da}\right]_{\text{für } a=1} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$ also nach Gleichung VI) den Werth des Integrales

X) $$C = \int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y} - \frac{1}{y(1+y)}\right)dy = \Gamma'(1)$$

bedeutet. Integrirt man die Gleichung IX) nochmals zwischen den Grenzen a und 1, so folgt

$$l\Gamma(a) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\int_1^a\frac{(a-1)\,da}{(1+n)(a+n)} + C(a-1) \qquad (l\Gamma(1) = 0)$$

oder:

XI) $$l\Gamma(a) = \sum_0^\infty\left(\frac{a-1}{1+n} - l\,\frac{a+n}{1+n}\right) + C(a-1).$$

Die Constante C kann man eliminiren, indem man $a = 2$ setzt:

$$l\Gamma(2) = 0 = \sum_0^\infty\left(\frac{1}{1+n} - l\frac{2+n}{1+n}\right) + C \quad *).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $a - 1$ und subtrahirt sie von der vorigen, so ergiebt sich:

$$l\Gamma(a) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[(a-1)\,l\,\frac{2+n}{1+n} - l\,\frac{a+n}{1+n}\right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{m=\infty}\left[(a-1)\,l\left(1+\frac{1}{m}\right) - l\left(1+\frac{a-1}{m}\right)\right],$$

oder

XII) $$l\Gamma(a) = \sum_{m=1}^{m=\infty} l\,\frac{m\left(\frac{m+1}{m}\right)^{a-1}}{a+m-1}.$$

Demnach ist, wenn man vom Logarithmus zu dem Numerus übergeht, $\Gamma(a)$ durch ein unendliches Product für die Berechnung dargestellt:

---

*) Schreibt man $-C = \sum_0^\infty \frac{1}{1+n} - \sum_0^\infty l\,\frac{2+n}{1+n}$, wobei aber jede Reihe für sich betrachtet divergent ist, so erkennt man, dass $-C$ dieselbe Zahl ist, welche beim Integral-Logarithmus auftritt (§. 137), was man auch direct an dem Zusammenhang dieses Integrales mit der obigen Formel X) nachweisen kann.

$$\Gamma(a) = \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{m\left(\frac{m+1}{m}\right)^{a-1}}{(a+m-1)} = \frac{1.2.3\ldots m\,(m+1)^{a-1}}{a\,(a+1)\,(a+2)\ldots(a+m-1)} =$$
$$= \frac{(m+1)^{a-1}\,m}{a\,(1+a)\left(1+\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{m-1}\right)}$$
(für $m = \infty$),

oder, wie man diesen Ausdruck schreiben kann, indem man im Zähler m ersetzt durch den Werth $(m+1)\left[1-\frac{1}{m+1}\right]$ und beachtet, dass sich der Factor $1-\frac{1}{m+1}$ und ebenso $\left[1+\frac{1}{m}\right]^a$ von der Einheit bei beliebig wachsendem m beliebig wenig unterscheidet:

$$\text{XIII)}\quad \Gamma(a) = \frac{(m+1)^a}{a\,(1+a)\left(1+\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{m-1}\right)} = \frac{m^a}{a\prod\limits_{m=2}\left(1+\frac{a}{m-1}\right)}.$$
$(m = \infty)$.

Gauss*) hat dieses Product als Definition einer Function verwandt und alle Eigenschaften aus dieser unendlichen Productformel abgeleitet. Es zeigt sich, dass dieselbe für jeden endlichen Werth von a, für welchen kein Factor des Nenners verschwindet, convergirt, so dass diese Definition umfassender ist, als das Euler'sche Integral.

163. Wir wollen dieses beweisen, indem wir allgemein die Frage beantworten: Unter welcher Bedingung convergirt ein unendliches Product? Diese Frage ist wichtig; denn wie im §. 39 angedeutet und hier für eine bestimmte Function ausgeführt wurde, ist die Bildung eines unendlichen Productes ein zweites Mittel zu einer nicht symbolischen, sondern für die numerische Berechnung geeigneten Darstellung einer Function. Die folgenden Untersuchungen gelten auch bei complexen Factoren. Giebt man den Factoren eines unendlichen Productes, welche nach irgend einem Gesetze unbeschränkt fortgesetzt werden können, die Form

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)(1+u_{n+1})\ldots$$

so müssen die Werthe, welche man erhält, indem man zuerst n Factoren, sodann $n+1\ldots n+k\ldots$ multiplicirt:

$$P_n = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n),$$
$$P_{n+1} = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)(1+u_{n+1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{n+k} = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)(1+u_{n+1})\ldots(1+u_{n+k})$$

eine Folge von Zahlen mit bestimmtem endlichen Grenzwerth bilden.

*) Gauss: Disquisitiones generales circa seriem infinitam. Ges. W. Bd. 3.

Dazu ist erforderlich: erstlich dass keines der Glieder P, also auch keines der Glieder u über jeden Betrag hinaus wächst; zweitens, dass zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine Stelle n gefunden werden kann, so dass

$$\text{abs}\,[P_{n+k} - P_n] < \delta$$

für jeden Werth von k. Aus dieser Ungleichung folgt, dass (falls nicht P_n unter eine angebbare Grenze herabsinkt)

$$\text{abs}\left[\frac{P_{n+k}}{P_n} - 1\right] < \frac{\delta}{P_n} \quad \text{oder abs}\left[\frac{P_{n+k}}{P_n}\right] < 1 + \text{abs}\,\frac{\delta}{P_n}$$

ist; mit anderen Worten: Es muss sich eine Stelle n finden lassen, von der ab sich das Verhältniss der P-Werthe von der Einheit beliebig wenig unterscheidet; insbesondere muss dies auch für

$$P_{n+1} : P_n = 1 + u_{n+1}$$

gelten, d. h. die Glieder u müssen nothwendig nach Null convergiren.

Der Fall, dass die Grössen P unter jeden Betrag sinken, oder einzelne Factoren Null sind, dass also der Grenzwerth des Productes Null wird, muss hierbei sowie für die folgenden Untersuchungen ausgeschlossen werden.

Convergirt ein Product auch dann noch, wenn man allen Gliedern u den absoluten Werth giebt, so heisst es unbedingt convergent.

Diese Definition erfordert zunächst den Beweis, dass jedesmal aus der Convergenz des aus den absoluten Werthen v der Glieder u gebildeten Productes die Convergenz des Productes $\Pi(1 + u_n)$ nothwendig folgt; (der Fall, dass auch nur eine der Grössen u gleich -1 ist, wird ausgeschlossen).

Bezeichnet man die absoluten Beträge von u mit v, das Product $(1 + v_1)(1 + v_2)\ldots(1 + v_n)$ mit Q_n, so wird

$$\left(\frac{Q_{n+k}}{Q_n} - 1\right) = (1 + v_{n+1})(1 + v_{n+2})\ldots(1 + v_{n+k}) - 1,$$

$$\left(\frac{P_{n+k}}{P_n} - 1\right) = (1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2})\ldots(1 + u_{n+k}) - 1.$$

Werden die Producte der rechten Seite ausmultiplicirt, so erkennt man leicht, dass der absolute Betrag, der sich bei der ersten Gleichung ergiebt, nicht kleiner ist als der absolute Betrag der zweiten; also besteht die Beziehung:

$$\text{abs}\left[\frac{Q_{n+k}}{Q_n} - 1\right] \geqq \text{abs}\left[\frac{P_{n+k}}{P_n} - 1\right].$$

Der Voraussetzung nach wird der Betrag der linken Seite durch Wahl von n beliebig klein; es lässt sich also auch ein n finden, so dass

$$\text{abs}\left[\frac{P_{n+k}}{P_n} - 1\right] < \delta$$

wird. Daraus folgt, dass P_n einem bestimmten Grenzwerthe zustrebt, und zwar einem endlichen, der von Null verschieden ist. Denn wäre Null der Grenzwerth von P, so liesse sich zu jedem noch so grossen Werthe von n ein k ermitteln, für welches $\frac{P_{n+k}}{P_n}$ beliebig klein wird.

Ein nothwendiges und hinreichendes Kriterium für die unbedingte Convergenz des Productes

$$P = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \ldots$$

ist die Convergenz der aus den absoluten Beträgen gebildeten unendlichen Reihe

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots v_n + \ldots$$

Denn weil das Product

$$Q_n = (1 + v_1)(1 + v_2) \ldots (1 + v_n) > v_1 + v_2 + \ldots v_n$$

ist, so ist die Convergenz der unendlichen Reihe nothwendig, und weil

$$1 + v_1 < e^{v_1}, \quad 1 + v_2 < e^{v_2}, \ldots 1 + v_n < e^{v_n},$$

also

$$Q_n < e^{v_1 + v_2 + \ldots v_n}$$

ist, so ist die Convergenz der unendlichen Reihe hinreichend.

Der Werth eines unbedingt convergenten Productes ist von der Reihenfolge der Factoren unabhängig.

Denn sei

$$P_n = (1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_n),$$
$$P_m' = (1 + u_1')(1 + u_2') \ldots (1 + u_m'),$$

wobei dieses zweite Product aus den in P vorkommenden Factoren, nur in anderer Reihenfolge abgeleitet ist, so kann man m so gross wählen, dass sämmtliche in P_n enthaltene Factoren auch in P_m' auftreten. Alsdann ist

$$P_m' = P_n (1 + u_k)(1 + u_l) \ldots (1 + u_\nu),$$

wobei $k, l \ldots \nu$ Indices bezeichnen, die grösser als n sind; oder

$$\frac{P_m'}{P_n} = (1 + u_k)(1 + u_l) \ldots (1 + u_\nu).$$

Der Betrag der rechten Seite ist aber kleiner (höchstens gleich) als der Betrag von $(1 + v_k)(1 + v_l) \ldots (1 + v_\nu)$ und dieser ist kleiner als

$$e^{v_k + v_l + \ldots v_\nu}.$$

Da dieser Ausdruck lediglich durch Wahl von n der Einheit beliebig nahe kommt, so wird

$$\text{Lim } P_m' = \text{Lim } P_n.\text{*)}$$

*) Die Fundamentalsätze für die Theorie unendlicher Producte sind, wiewohl diese Formen fast gleichzeitig mit der Darstellung unendlicher Reihen benutzt

164. Die Convergenz der Gammafunction bei allen Werthen von a, für welche kein Factor verschwindet, wird nun folgendermassen erkannt. Man bilde

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{a\Pi\left(1+\frac{a}{m-1}\right)}{m^a} = a\,\frac{1+a}{(1+1)^a}\cdot\frac{1+\frac{a}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^a}\cdot\frac{\left(1+\frac{a}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^a}\,\frac{\left(1+\frac{a}{4}\right)}{\left(1+\frac{1}{4}\right)^a}\cdots$$

Schreibt man den Factor $\frac{1+\frac{a}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}$ in der Form $1-u_n$, so wird mit Anwendung der Binomialreihe (§. 46):

$$u = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a} = \frac{1+\frac{a}{n}+\frac{a(a-1)}{1.2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{\Theta}{n}\right)^{a-2}-\left(1+\frac{a}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a},$$

oder:

$$u_n = \frac{a(a-1)}{1.2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1+\frac{\Theta}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^a\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\Theta}{n}\right)^2} \qquad (0<\Theta<1).$$

Ist a eine positive Grösse, so ist $\left(\frac{1+\frac{\Theta}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^a\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\Theta}{n}\right)^2}$ sicherlich ein echter Bruch, und die Reihe

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots<\frac{a(a-1)}{1.2}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\right]$$

convergirt unbedingt.

Ist a eine negative Grösse, so kann man n so gross wählen, dass bei allen möglichen Werthen von Θ, $\left(\frac{1+\frac{\Theta}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^a\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\Theta}{n}\right)^2}$ kleiner ist als eine bestimmte Zahl, z. B. kleiner als 2, und die Reihe

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}\cdots<\frac{a(a-1)}{1.2}2\cdot\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}\cdots\right]$$

convergirt ebenfalls unbedingt.

Mithin ist bewiesen, dass das unendliche Product $\frac{1}{\Gamma(a)}$, also auch das Product $\Gamma(a)$, bei allen endlichen Werthen von a mit Ausnahme der ganzen negativen unbedingt convergirt.

---

wurden, zuerst von Weierstrass bewiesen worden: Ueber die Theorie der analytischen Facultäten. Journ. f. Math. Bd. 51.

165. Die Legendre'sche Reihe zur Berechnung von $l\Gamma(a)$. Schreibt man die Formel VIII) in der Form:

$$\frac{\partial^2 l\Gamma(1+a)}{da^2} = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \frac{1}{(a+3)^2} + \cdots \quad (a > -1)$$

und differentiirt dieselbe $n-2$ mal, was gestattet ist, da die abgeleiteten Reihen ebenfalls unbedingt convergiren, so folgt:

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n l\Gamma(1+a)}{da^n} = \frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{1}{(a+1)^n} + \frac{1}{(a+2)^n} + \frac{1}{(a+3)^n} + \cdots\right].$$

Es werde die Summe von $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$ mit S_n bezeichnet, (§. 47 Anmerkung), so ist

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n l\Gamma(1+a)}{da^n}\right]_{a=0} = (-1)^n \frac{S_n}{n},$$

ferner ist

$$\left[\frac{dl\Gamma(1+a)}{da}\right]_{a=0} = \Gamma'(1) = C \quad \text{und} \quad l\Gamma(1) = 0.$$

Also nach der Mac Laurin'schen Formel:

$$l\Gamma(1+a) = aC + \frac{a^2}{2}S_2 - \frac{a^3}{3}S_3 + \frac{a^4}{4}S_4 - \cdots \frac{a^n}{n!}\left[\frac{d^n l\Gamma(1+a)}{da^n}\right]_{\Theta a}.$$

Das Restglied convergirt nach Null, wenn der absolute Betrag von a kleiner ist als 1, und sonach wird mit Weglassung des Restgliedes die unendliche Reihe unbedingt convergent für alle Werthe von a zwischen -1 und $+1$.

Für eine numerische Berechnung ist aber diese Reihe noch nicht brauchbar, weil die Coefficienten S nicht rasch genug abnehmen, auch ist der Werth von C noch unbekannt. Man erhält eine rascher convergente Reihe, indem man den Werth von $l(1+a)$ entwickelt:

$$0 = -l(1+a) + a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \cdots$$

und addirt:

$$l\Gamma(1-a) = -l(1+a) + a(1+C) + \frac{1}{2}(S_2-1)a^2 - \frac{1}{3}(S_3-1)a^3 + \\ + \frac{1}{4}(S_4-1)a^4 + \cdots$$

ebenso:

$$l\Gamma(1+a) = -l(1-a) - a(1+C) + \frac{1}{2}(S_2-1)a^2 + \frac{1}{3}(S_3-1)a^3 + \\ + \frac{1}{4}(S_4-1)a^4 + \cdots$$

Weil nun

$$l\Gamma(1+a) + l\Gamma(1-a) = l\frac{\pi a}{\sin \pi a}$$

nach Gleichung V., so wird

XIV) $$l\Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\, l\, \frac{\pi a}{\sin \pi a} - \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+a}{1-a} +$$
$$+ a(1+C) - \frac{1}{3}(S_3 - 1)\, a^3 - \frac{1}{5}(S_5 - 1)\, a^5 + \cdots$$
$$(-1 < a < +1).$$

Aus dieser Formel lassen sich die Werthe von $l\Gamma$ für die Argumente 0 bis 2 berechnen, nachdem zuvor die Grössen $S_3, S_5 \ldots$ bestimmt sind. Legendre hat diese Werthe von S_3 bis S_{35} auf 16 Decimalstellen angegeben. Alsdann muss der Werth von C dargestellt werden, was durch die Substitution $a = \frac{1}{2}$ am raschesten gelingt, weil

$$l\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = l\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) = l\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)$$

bekannt ist. Man erhält durch die Reihe:

$$1 + C = l\,\frac{3}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2}(S_3 - 1) + \frac{1}{5 \cdot 2^4}(S_5 - 1) + \frac{1}{7 \cdot 2^6}(S_7 - 1) + \cdots$$
$$C = -0{,}577\,215\,664\,9 \cdots$$

Sonach lauten die numerischen Anfangsglieder der Reihe XIV:

$$l\Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\, l\, \frac{\pi a}{\sin \pi a} - \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+a}{1-a} +$$
$$+ 0{,}422\,784\,3\, a - 0{,}067\,353\,0\, a^3 - 0{,}007\,385\,5\, a^5 - \cdots$$

Achtes Capitel.

Allgemeine Sätze über das Doppelintegral.

166. Definition des Doppelintegrales.

Es sei $f(x, y)$ eine Function der beiden Variabelen, die für irgend ein Gebiet T irgendwie eindeutig definirt ist, doch bis auf weiteres so, dass sie überall endlich bleibt. Das Gebiet denke man sich in der xy-Ebene durch eine stetige und geschlossene Aufeinanderfolge von Punkten umschlossen, oder analytisch durch eine Curve mit der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ begrenzt. Das Gebiet kann auch durch mehrere geschlossene Linien begrenzt sein, wie z. B. ein Kreisring durch zwei Kreise. Der einfachste Fall der Begrenzung eines Gebietes ist ein Rechteck, dessen Seiten den rechtwinkligen Coordinatenaxen parallel laufen; dann erhält x alle Werthe von a bis b, y alle Werthe von α bis β. Soll die Function für die ganze unendliche Ebene definirt sein, so können wir das jedesmal so ausdrücken: sie ist für eine Fläche definirt, deren Begrenzung beliebig erweitert werden kann. Man zerlege das zunächst als endlich vorausgesetzte Gebiet T in n kleine Theile (Flächenelemente) und nenne dieselben $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$.

Alle diese Elemente sind als positive Grössen gedacht. Solch eine Zerlegung geschieht z. B. indem man das Gebiet mit einem Netze überdeckt, dessen Seiten den Coordinatenaxen in den Abständen Δx und Δy parallel laufen. In diesem Falle werden alle Flächenelemente einander gleich, Rechtecke von der Grösse $\Delta x \cdot \Delta y$. Nur an den Grenzstellen des Gebietes sind diese Rechtecke durch die Begrenzungslinie zerschnitten. Unter den Werthen, welche die Function im Innern oder an den Grenzen solch eines Flächenelementes besitzt, greife man einen beliebigen Werth heraus. Der Einfachheit halber werde solch ein Werth mit $f(\tau_1)$, $f(\tau_2)$, ... $f(\tau_n)$ bezeichnet; so entsteht die Frage:

Unter welchen Voraussetzungen nähert sich die Summe

$$S_n = f(\tau_1) \,.\, \tau_1 + f(\tau_2) \,.\, \tau_2 + \dots f(\tau_n) \,.\, \tau_n$$

einer bestimmten, von der Wahl der Flächenelemente und der Wahl der Functionswerthe in solch einem Elemente ganz unabhängigen Grenze, falls die Anzahl der Elemente nach irgend welchem Gesetze derart beliebig vermehrt wird, dass jedes derselben der Grenze Null zustrebt?

Die Antwort lautet ebenso wie beim einfachen Integrale:

Bezeichnet man die grösste Schwankung der Function, d. h. den positiven Unterschied ihres grössten und kleinsten Werthes, in dem Elemente τ_μ, oder an seinen Grenzen mit D_μ, so muss

$$\tau_1 D_1 + \tau_2 D_2 + \cdots \tau_n D_n$$

mit den Grössen τ nach Null convergiren.

Erstlich erkennt man: convergirt diese Summe bei irgend einem fortgesetzten Theilungsprocesse nach Null, so convergirt sie bei jedem anderen ebenfalls nach Null. Der Beweis ist derselbe wie beim einfachen Integrale, indem man nur überall statt des linearen Intervalles den Begriff des Flächenelementes festhält*).

Zweitens beweist man die Nothwendigkeit der behaupteten Bedingung, indem man, von einer bestimmten Theilung ausgehend, dieselbe dergestalt fortsetzt, dass jedes Element in weitere Elemente zerlegt wird. Die Summen, gebildet aus den grössten und kleinsten Werthen der Function: G_μ und g_μ im Intervalle τ_μ

$$\sum G_\mu \tau_\mu \text{ und } \sum g_\mu \tau_\mu$$

nähern sich bei diesem Processe, die erste bei fortwährender Abnahme

---

*) Es bleibt hier ebenso wie bei den linearen Intervallen ganz gleichgültig, nach welchem Gesetze die Folge der Summanden gebildet wird. Auch bei jenen war man, da es sich um endliche Summen handelt, deren Eigenschaft einen Grenzwerth zu besitzen nachgewiesen werden sollte, keineswegs genöthigt, die Intervalle eben nur in der Aufeinanderfolge zu nehmen, wie sie im Intervalle a bis b sich an einander reihen. Anders verhält sich dies bei dem Grenzübergange für Integrale, in denen die zu integrirende Function unendlich wird.

die zweite bei fortwährender Zunahme, je einer bestimmten Grenze, und diese beiden Grenzen werden einander nur dann gleich, wenn

$$\sum (G_\mu - g_\mu)\,\tau_\mu = \sum D_\mu\,\tau_\mu = 0$$

wird.

Drittens erkennt man, dass derselbe Grenzwerth erhalten wird bei einer anderen Theilung derselben Art, indem man zwei verschiedene Theilungen, deren jede schon so weit getrieben ist, dass sie sich von ihrem Grenzwerthe beliebig wenig unterscheidet, gleichzeitig betrachtet, und diese aus der Vereinigung hervorgegangene als eine Fortsetzung sowohl der einen wie der anderen Theilung ansieht.

Endlich sieht man ein, dass es auch, falls die obige Bedingung erfüllt ist, gestattet ist, den Theilungsprocess so zu vollziehen, dass dabei nicht die Grenzen einer früheren Theilung erhalten bleiben, weil auch die Reihe von Werthen, welche man auf diese Weise bildet, einen bestimmten Grenzwerth erhält, und jedes Glied dieser Reihe sich von dem nach dem früheren Verfahren gewonnenen Grenzwerthe schliesslich beliebig wenig unterscheidet.

167. Die nothwendige Bedingung ist erfüllt:

Erstens wenn $f(x, y)$ eine allenthalben stetige Function ist (§. 52).

Zweitens wenn $f(x, y)$ in einzelnen Punkten oder in einzelnen Linien (∞^1 Stellen) unstetig oder unbestimmt (zwischen endlichen Grenzen) wird, oder auch unendlich viele Maxima und Minima mit endlichen Schwankungen besitzt.

Drittens wenn $f(x, y)$ in unendlich vielen Linien (∞^2 Stellen) unstetig, unbestimmt oder unendlich oft schwankend wird, wenn aber die Summe der Flächenelemente, in denen die Schwankungen D_μ grösser als eine beliebig kleine Zahl σ sind, beliebig klein gemacht werden kann.

Diese dritte Forderung, welche die ersten beiden umfasst, führt zu einer Erweiterung der von Cantor begründeten Unterscheidung von Punktmengen in einem Gebiete von zwei Dimensionen, indem man von den linearen Mengen zu den ebenen Mengen aufsteigt. Unendlich viele Linien geben noch keine ebene Punktmenge, wenn ihre Anfangselemente eine discrete Punktmenge bilden; dagegen erhält man eine ebene Menge von Punkten, wenn die Anfangselemente selbst einer linearen Mannigfaltigkeit angehören. Doch beschränkt sich die folgende Untersuchung auf Functionen, welche der ersten oder zweiten Forderung genügen, und die dritte Möglichkeit wird nur gelegentlich angeführt werden.

Der Grenzwerth der Summe:

$$\text{Lim}\,[f(\tau_1)\,.\,\tau_1 + f(\tau_2)\,.\,\tau_2 + \ldots f(\tau_n)\,.\,\tau_n] \qquad \text{für } n = \infty$$

wird gewöhnlich mit

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy \text{ oder } \int_h^{(2)} f(x, y)\, dT$$

bezeichnet, und heisst das bestimmte Doppelintegral im Gebiete T.

Das bestimmte Doppelintegral ist ebenso wie das einfache einer geometrischen Deutung fähig. Trägt man den Werth der Function $z = f(x, y)$ senkrecht zur horizontalen Ebene auf, so stellt

$$\int^{(2)} f(x, y)\, dT$$

das Volumen des cylindrischen Körpers dar, dessen Basis die von der Curve $\varphi(x, y)$ umschlossene Fläche bildet, und der oberhalb der Horizontalebene von der Fläche $z = f(x, y)$ begrenzt ist*).

Unter den Sätzen, welche aus dieser Definition des Doppelintegrales hervorgehen, hebe ich nur die folgenden heraus.

1. Sind $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ endliche integrabele Functionen in einem Gebiete, so ist auch ihr Product integrabel in demselben Gebiete. (Beweis wie im §. 146.)

2. Der erste Mittelwerthsatz: Hat die Function φ überall im Integrationsgebiete dasselbe Zeichen, und bedeutet G den grössten, g den kleinsten Werth von f in demselben Gebiete, so ist

$$\int^{(2)} f(x, y) \cdot \varphi(x, y)\, dT = [g + \Theta(G - g)] \int^{(2)} \varphi(x, y)\, dT \qquad (0 \leq \Theta \leq 1).$$

Ist insbesondere f eine durchweg stetige Function, so ist der Werth von $g + \Theta(G - g)$ unter den Werthen, die f in Gebiete annimmt, jedenfalls enthalten.

168. Um den Werth des Doppelintegrales zu ermitteln, sucht man es auf zwei einfache Integrationen zurückzuführen.

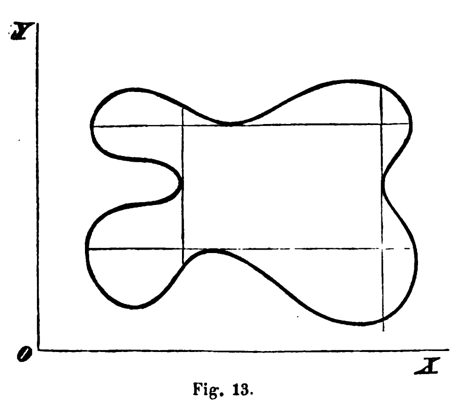


Fig. 13.

Da die Art der Theilung in Flächenelemente ganz gleichgültig ist, so denke man sich die Netztheilung parallel den Coordinatenaxen für die Zerlegung der Fläche ausgeführt. Jede Linie parallel der Abscissenaxe soll in einer endlichen (geraden) Anzahl von Stellen die Begrenzungscurve durchschneiden, desgleichen jede Linie paral-

*) Durch die geometrischen Probleme, die Volumbestimmung und die Ausmessung gekrümmter Flächen, wurde der analytische Begriff des Doppelintegrales eingeführt. Die Riemann'schen Untersuchungen über das bestimmte Integral stellten auch für das doppelte, sowie für die mehrfachen Integrale das grundlegende Princip fest.

lel der Ordinatenaxe. Dann kann man das Gebiet vermittelst einer endlichen Anzahl von Parallellinien in endliche Flächenstücke zerlegen, deren Begrenzung von den Linien des Netzes nur in zwei Stellen überschritten wird. Auf solch einen einfach gestalteten Theil, eine Elementarfläche, bezieht sich die folgende Untersuchung.

Es seien a und b die extremen Werthe von x, α und β die von y, welche zu Punkten der Begrenzungscurve gehören. Bezeichnet dann x_μ, y_ν eine beliebige Stelle im Bereiche, so ist, wenn $x_{\mu+1}-x_\mu, y_{\nu+1}-y_\nu$ die Längen der Seiten des Rechteckes ausdrücken, deren eine Ecke diese Stelle ist, die Doppelsumme zu bilden:

$$\sum\sum(x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu)f(x_\mu, y_\nu).$$

Man kann nun diese Summation in zweierlei Weise ausführen: entweder, indem man zuerst alle die Werthe summirt, welche denselben Factor $x_{\mu+1}-x_\mu$ haben, und alsdann diese Grössen addirt; oder indem man umgekehrt die Glieder mit dem gleichen Factor $y_{\nu+1}-y_\nu$ vereinigt, und alsdann diese Werthe summirt. Die beiden verschiedenen Processe werden symbolisch angedeutet durch:

$$\sum_\mu (x_{\mu+1}-x_\mu)\sum_\nu (y_{\nu+1}-y_\nu)f(x_\mu, y_\nu)$$

und

$$\sum_\nu (y_{\nu+1}-y_\nu)\sum_\mu (x_{\mu+1}-x_\mu)f(x_\mu, y_\nu).$$

Wenn man auch die Grenzprocesse in dieser Aufeinanderfolge vollzieht, indem die Differenzen $(y_{\nu+1}-y_\nu)$ und $(x_{\mu+1}-x_\mu)$ nach Null convergiren, so denke man sich im ersten Falle die Differenzen $(y_{\nu+1}-y_\nu)$ so klein gewählt, dass der Werth von

$$\sum(y_{\nu+1}-y_\nu)f(x_\mu, y_\nu)$$

sich von dem Werthe des bestimmten Integrales

$$\int_{y_0^{(\mu)}}^{y_1^{(\mu)}} f(x_\mu, y)\,dy$$

nur um eine Grösse $\Delta(x_\mu)$ unterscheidet, deren absoluter Betrag durch Verkleinerung der Abstände $y_{\nu+1}-y_\nu$ beliebig klein gemacht werden kann.

Indem nämlich die überall endliche Function f den Bedingungen des §. 167 unterworfen ist, ist sie im allgemeinen eine hinsichtlich y integrirbare Function, und es kann nur für einzelne Werthe von x_μ (oder auch für eine discrete Mannigfaltigkeit) das Integral seine Bedeutung verlieren. Also ist:

$$\sum_{\nu}(y_{\nu+1}-y_{\nu})f(x_{\mu},y_{\nu})=\int_{y_0^{(\mu)}}^{y_1^{(\mu)}}f(x_{\mu},y)\,dy+\Delta(x_{\mu}).$$

Die Grössen $y_0^{(\mu)}$ und $y_1^{(\mu)}$ bedeuten die Werthe von y an den Grenzen des Gebietes, welche zu x_μ gehören; man kann sie als Functionen von x_μ auch bezeichnen durch die Gleichungen: $y_0^{(\mu)}=\varphi(x_\mu)$ $y_1^{(\mu)}=\psi(x_\mu)$. Aus dieser Gleichung folgt weiter:

$$\sum_{\mu}(x_{\mu+1}-x_{\mu})\sum_{\nu}(y_{\nu+1}-y_{\nu})f(x_{\mu},y_{\nu})=\sum_{\mu}(x_{\mu+1}-x_{\mu})\int_{y_0^{(\mu)}}^{y_1^{(\mu)}}f(x_{\mu},y)\,dy+$$
$$+\sum_{\mu}(x_{\mu+1}-x_{\mu})\Delta(x_{\mu}).$$

Lässt man nun die Intervalle $x_{\mu+1}-x_\mu$ nach Null convergiren, so erhält die rechte Seite den Werth:

$$\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\,dy+\int_a^b\Delta(x)\,dx.$$

Da aber der absolute Betrag von Δ für alle Werthe von x mit Ausnahme vereinzelter (oder einer discreten Punktmenge), die auf den Werth des Integrales ohne Einfluss sind, beliebig klein gemacht werden kann, so ist auch der Werth dieses zweiten Integrales beliebig klein, d. h.

$$\text{Lim}\sum_{\mu}(x_{\mu+1}-x_{\mu})\sum_{\nu}(y_{\nu+1}-y_{\nu})f(x_{\mu},y_{\nu})=\int\int f(x,y)\,dx\,dy$$
$$=\int_a^b dx\int_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)}f(x,y)\,dy.\text{*)}$$

In gleicher Weise findet man durch den zweiten Process das Doppelintegral gleich

$$\int_\alpha^\beta dx\int_{x=\varphi_1(y)}^{x=\psi_1(y)}f(x,y)\,dx,$$

wenn $\varphi_1(y)$ und $\psi_1(y)$ die Werthe bezeichnen, die x an den Grenzen des Gebietes bei den verschiedenen Werthen von y annimmt.

Ist die Begrenzung des Gebietes z. B. eine Ellipse, deren Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

*) Es ist bei dieser Gleichung zu beachten, dass die Gültigkeit des bestimmten Doppelintegrales vorausgesetzt ist; und dass bei dieser Annahme seine Identität mit dem Werthe erwiesen ist, welcher sich bei den aufeinanderfolgenden Integrationen der rechten Seite ergiebt. Es ist nicht umgekehrt gestattet, von der rechten Seite auf die linke zu schliessen. (§. 171.)

so wird:

$$\int_{-a}^{+a} dx \int_{y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_{-b}^{+b} dy \int_{x=-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{x=+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} f(x,y)\,dx = \int\int f(x,y)\,dx\,dy.$$

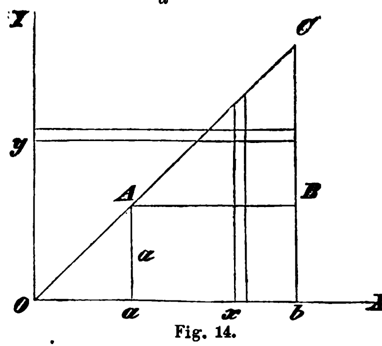


Fig. 14.

Ist die Begrenzung des Gebietes ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ABC derart, dass x von a bis b sich erstreckt, während bei jedem Werthe von x, y von a bis x läuft, so variirt umgekehrt x bei jedem Werthe von y zwischen den Grenzen y und b, und es ist

$$\int\int f(xy)\,d\tau = \int_a^b dx \int_a^x f(xy)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b f(xy)\,dx.$$

(Diese Regel kam in §. 146 VI zur Anwendung.)

Ist die Begrenzung des Gebietes ein Rechteck, so bekommt y für jeden Werth von x dieselben Grenzen α und β, x für jeden Werth von y die Grenzen a und b; und man erhält aus dem behandelten Theoreme den Specialsatz:

Ist $f(x,y)$ eine integrabele Function, so ist:

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Dieser Satz enthält eine Erweiterung der Bedingung für die Vertauschbarkeit der Integrationenfolge bei der Integration einer Function nach einem Parameter, wie sie im §. 153 gegeben wurde. Denn er verlangt nur als hinreichende Bedingung die Endlichkeit und doppelte Integrirbarkeit der Function $f(x,y)$, nicht mehr die völlige Stetigkeit in einem Gebiete.

169. Das Doppelintegral

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy$$

mit Grenzen die von einander unabhängig sind, ist, als Function der oberen Grenzen $\Phi(b,\beta)$ betrachtet, eine stetige Function dieser beiden Grössen. Denn es ist, vorausgesetzt dass b und β im Integrationsgebiete von f liegen:

$$\Phi(b+h,\beta+k)-\Phi(b,\beta)=\int_a^{b+h}dx\int_\alpha^{\beta+k}f(x,y)\,dy-\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x,y)dy$$

$$=\int_a^b dx\int_\beta^{\beta+k}f(x,y)\,dy+\int_b^{b+h}dx\int_\alpha^{\beta+k}f(x,y)dy$$

$$=\int_\beta^{\beta+k}dy\int_a^b f(x,y)\,dx+\int_b^{b+h}dx\int_\alpha^{\beta+k}f(x,y)dy,$$

da die Folge der Integrationen vertauscht werden darf. Diese Gleichung führt auf die Form

$$\Phi(b+h,\beta+k)-\Phi(b,\beta)=kM+hN.$$

wobei M und N endliche Grössen sind; demnach ist die Bedingung der Stetigkeit erfüllt.

Auch die partiellen Ableitungen nach b und β ergeben sich aus dieser Gleichung. Setzt man k gleich Null, so folgt:

$$\Phi(b+h,\beta)-\Phi(b,\beta)=\int_b^{b+h}dx\int_\alpha^\beta f(x,y)dy.$$

Ist nun $\int_\alpha^\beta f(x,y)dy$ im Intervall von x gleich b bis x gleich $b+h$ eine stetige Function von x, und bezeichnet man einen Mittelwerth mit

$$\left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy\right]_{x=b+\vartheta h},$$

so ist:

$$\operatorname*{Lim}_{h=0}\frac{\Phi(b+h,\beta)-\Phi(b,\beta)}{h}=\frac{\partial\Phi}{\partial b}=\left[\int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right]_{x=b}.$$

Ist f an der Stelle $x=b$ für alle Werthe von y gleich α bis y gleich β eine im allgemeinen gleichmässig stetige Function von x, so dass sich mit Ausnahme einzelner Werthe von y (oder einer discreten Mannigfaltigkeit) ein Werth h angeben lässt, für welchen unabhängig von dem Werthe y:

$$\text{abs}\,[f(b+\Theta h,y)-f(b,y)]<\delta$$

(vergl. §. 52) ist, so lässt sich diese Gleichung auch schreiben:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b}=\int_\alpha^\beta f(b,y)dy.$$

Desgleichen wird unter der analogen Bedingung:

$$\lim_{k=0} \frac{\Phi(b,\beta+k)-\Phi(b,\beta)}{k} = \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} = \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]_{y=\beta},$$

oder wenn f eine gleichmässig stetige Function von y an der Stelle β, im ganzen Intervall von x gleich a bis x gleich b

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} = \int_a^b f(x,\beta)\,dx.$$

In diesem Falle gilt auch, wie die obige Gleichung lehrt, der Satz vom totalen Differentiale:

$$d\Phi = d\beta\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} + db\frac{\partial\Phi}{\partial b}.$$

Auch wird

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta\partial b} = f(b,\beta) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial b\partial\beta}.$$

Mithin ist bewiesen: *Das bestimmte Doppelintegral mit constanten Grenzen ist eine stetige Function der oberen Grenze, für welche, falls die zu integrirende Function in der Umgebung von $x = b$ eine gleichmässig stetige Function von x bei allen Werthen von y und in der Umgebung von $y = \beta$ eine gleichmässig stetige Function von y bei allen Werthen von x ist, der Satz vom totalen Differentiale und von der Vertauschung der Differentiationsordnung besteht.*

Die angegebene Bedingung ist insbesondere für jede Stelle im Gebiete erfüllt, wenn die Function f im ganzen Gebiete ausnahmslos eine stetige Function der beiden Variabelen ist.

Es lässt sich mit Hülfe dieser Sätze auch die Bedingung für die Differentiirbarkeit einer Function nach einem Parameter unter dem Integral (§. 151) in neuer Form angeben. Damit das Integral $\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ nach dem Parameter α differentiirt für einen bestimmten Werth $\alpha = \alpha'$ gleich werde:

$$\left[\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx\right]_{\alpha=\alpha'}$$

für alle Werthe von α' zwischen β und γ, genügt es, dass $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ eine im Gebiete $x = a$ bis $x = b$, $\alpha = \beta$ bis $\alpha = \gamma$ integrabele Function und

$$\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$$

eine stetige Function von α sei. Denn dann ist

$$\iint \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx\,d\alpha = \int_a^b dx\int_\beta^\gamma \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,d\alpha = \int_\beta^\gamma d\alpha\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx,$$

oder, da:

$$\int_{\beta}^{\gamma} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha = f(x,\gamma) - f(x,\beta)$$

(mit Ausnahme einzelner Werthe von x oder einer discreten Menge), so wird:

$$\int_a^b f(x,\gamma)\,dx - \int_a^b f(x,\beta)\,dx = \int_{\beta}^{\gamma} d\alpha \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach γ, so ist unter den angegebenen Bedingungen:

$$\frac{\partial \int_a^b f(x,\gamma)\,dx}{\partial \gamma} = \left[\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx\right]_{\alpha=\gamma}.$$

Das Integral der rechten Seite braucht nicht ohne weiteres gleich

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\gamma} dx$$

zu sein; wird es aber, wenn $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$ im allgemeinen für die Werthe von $x = a$ bis $x = b$ eine gleichmässig stetige Function von α in der Umgebung der Stelle $\alpha = \gamma$ ist.

170. Substitution neuer Veränderlicher in das Doppelintegral.

Die Theilung in Flächenelemente kann man durch ein beliebiges Curvennetz vollziehen. Man setze:

$$x = \varphi(p,q) \quad y = \psi(p,q),$$

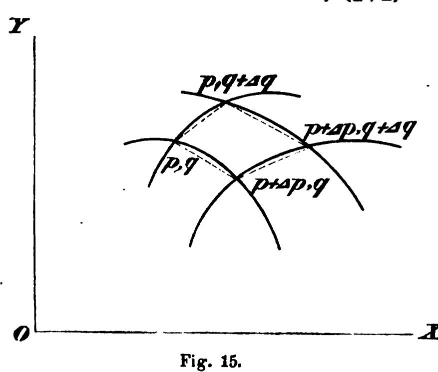


Fig. 15.

so gehört zu jedem constanten Werthe von p eine Curve, ebenso zu jedem Werthe von q. Man denke sich, dass jede p-Curve von jeder q-Curve innerhalb des für das Doppelintegral geltenden Gebietes in einem Punkte geschnitten wird, und betrachte das geradlinige Viereck, welches von den Schnittpunkten bestimmt wird, mit den Coordinaten:

$$x_1 = \varphi(p,q),\ x_2 = \varphi(p+\Delta p,q),\ x_3 = \varphi(p,q+\Delta q),\ x_4 = \varphi(p+\Delta p,q+\Delta q)$$
$$y_1 = \psi(p,q),\ y_2 = \psi(p+\Delta p,q),\ y_3 = \psi(p,q+\Delta q),\ y_4 = \psi(p+\Delta p,q+\Delta q).$$

Dieses Viereck bekommt den Flächeninhalt:

$$\tau = \frac{1}{2} \operatorname{abs} [(x_4 - x_1)(y_3 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_4 - y_1)].$$

Die verschwindende Grenze, welcher dieser Ausdruck zustrebt, wenn die Grössen Δp und Δq nach Null convergiren, ist zugleich die Grenze für das durch die Curven begrenzte Viereck, und wird, da:

$$x_4 - x_1 = \varphi(p + \Delta p, q + \Delta q) - \varphi(p,q) = \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp + \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq$$

$$x_2 - x_3 = \varphi(p + \Delta p, q) - \varphi(p, q + \Delta q) = \left[\varphi(p,q) + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp\right] -$$

$$-\left[\varphi(p,q) + \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq\right] = \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp - \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq$$

$$y_4 - y_1 = \psi(p + \Delta p, q + \Delta q) - \psi(p,q) = \frac{\partial \psi}{\partial p} dp + \frac{\partial \psi}{\partial q} dq$$

$$y_3 - y_2 = \psi(p, q + \Delta q) - \psi(p + \Delta p, q) = \frac{\partial \psi}{\partial q} dq - \frac{\partial \psi}{\partial p} dp,\text{*)}$$

durch das Differential dargestellt:

$$dT = \operatorname{abs}\left[dp\,dq \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial \psi}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\right].$$

Sonach ist

$$\int\!\!\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\!\!\int f(\varphi,\psi) \operatorname{abs}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial \psi}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\right] dp\,dq.$$

Bei Polarcoordinaten wird:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

also

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi,$$

$$dT = r\,dr\,d\varphi.$$

$$\int\!\!\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\!\!\int f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)\, r\,dr\,d\varphi.$$

Für die Substitution neuer Veränderlicher in das Doppelintegral ist es wichtig, einen rein analytischen Beweis zu führen, bei welchem keine geometrischen Vorstellungen benutzt werden, um eine Methode zu gewinnen, welche auch bei mehrfachen Integralen anwendbar bleibt.

Hat man das Doppelintegral in die Form successiver Integrationen gebracht

$$\int\!\!\int f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy,$$

so kann man mit Benutzung der Sätze für das einfache Integral folgendermassen verfahren.

*) Für die Functionen φ und ψ ist der Satz vom totalen Differentiale anwendbar, wenn in jedem der beiden Systeme auch die Tangentenrichtung continuirlich veränderlich von den Punkten der Ebene abhängt.

Erstlich: Ist $x = \varphi(p)$, $y = \psi(q)$, und entsprechen den Werthen y_0 und y_1 die Werthe q_0 und q_1 derart, dass, während y von y_0 bis y_1 wächst, q von q_0 bis q_1 ebenfalls wächst, so ist

$$\int_a^b dx \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy = \int_a^b dx \int_{q_0}^{q_1} f(x,\psi)\frac{\partial \psi}{dq}\,dq = \int_{p_0}^{p_1} \frac{\partial \varphi}{\partial p}\,dp \int_{q_0}^{q_1} f(\varphi,\psi)\frac{\partial \psi}{\partial q}\,dq$$

oder

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f(\varphi,\psi)\,\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial \psi}{\partial q}\,dp\,dq;$$

beide Integrale erstreckt über das nämliche Gebiet.

Zweitens: Ist $x = \varphi(p)$, $y = \psi(p,q)$, so kann man sich zunächst durch Elimination von p y als Function von x und q berechnet denken:

$$y = \chi(x,q)$$

und es sollen bei jedem Werthe von x zu wachsenden Werthen von y ebenfalls wachsende Werthe von q gehören; dann wird

$$\int_a^b dx \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy = \int_a^b dx \int_{q_0}^{q_1} f(x,\chi)\frac{\partial \chi}{\partial q}\,dq = \int_{p_0}^{p_1} \frac{\partial \varphi}{\partial p}\,dp \int_{q_0}^{q_1} f(\varphi,\psi)\frac{\partial \psi}{\partial q}\,dq$$

oder

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f(\varphi,\psi)\ \mathrm{abs}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial p}\,\frac{\partial \psi}{\partial q}\right]dp\,dq,$$

da χ durch die Substitution $x = \varphi(p)$ in ψ übergeht, und $\frac{\partial \chi}{\partial q} = \frac{\partial \psi}{\partial q}$ ist.

Daraus folgt drittens der allgemeine Fall, indem man an Stelle von p eine Function $p = \chi(p',q)$ einführt, q beibehält, und nun die im zweiten Falle gewonnene Transformationsgleichung benutzt. Man bezeichne.

$$x = \varphi(\chi) = \Phi(p',q), \qquad y = \psi(\chi,q) = \Psi(p',q),$$

so ist entsprechend dem zweiten Falle:

$$\int\int f(\varphi,\psi)\left[\frac{\partial \varphi(p)}{\partial p}\ \frac{\partial \psi(p,q)}{\partial q}\right]dp\,dq = \int\int f(\Phi,\Psi)\left[\frac{\partial \varphi(p)}{\partial p}\ \frac{\partial \psi(p,q)}{\partial q}\right]_{p=\chi(p',q)}\frac{\partial \chi}{\partial p'}\,dp'\,dq.$$

Da nun

$$\varphi(p) = \Phi(p',q), \qquad \psi(p,q) = \Psi(p',q),$$

wenn p als Function von p' und q betrachtet wird, so folgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p'} = \frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial p'}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial p'} = \frac{\partial \psi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial p'},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} = \frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial q}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial q} = \frac{\partial \psi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial q} + \frac{\partial \psi}{\partial q},$$

also ist als Function von p' und q

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial p'}\frac{\partial \Psi}{\partial q} - \frac{\partial \Psi}{\partial p'}\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial p'}\frac{\partial \psi}{\partial q}\right] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial q}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial p'}\right]_{p=\chi(p',q)},$$

mithin das obige Doppelintegral für $x = \Phi(p',q)$, $y = \Psi(p',q)$

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f(\Phi,\Psi)\ \text{abs}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial p'}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial q} - \frac{\partial\Psi}{\partial p'}\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right]dp'\,dq.$$

171. Wird die zu integrirende Function an einzelnen Stellen im Gebiete in bestimmter Weise unendlich gross oder unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen, so denke man sich jede dieser Stellen mit einer geschlossenen Begrenzungscurve umgeben. Es entsteht die Frage: unter welcher Bedingung bleibt die Function $f(x,y)$ in solch einem Gebiete mit einer Unendlichkeitsstelle integrabel? Heissen die Coordinaten der Stelle $x = a$, $y = b$ und umschliesst man dieselbe etwa mit einem beliebig kleinen Kreise, dessen Mittelpunkt diese Stelle und dessen Radius r_1 ist, so bekommt jeder Punkt auf dem Kreise oder im Inneren Coordinaten x, y, für welche:

$$x = a + r\cos\varphi, \qquad y = b + r\sin\varphi,$$
$$(0 < r \leqq r_1) \qquad (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi).$$

Damit nun das Doppelintegral in dem Gebiete von der äusseren Begrenzung an bis zu der Peripherie dieses Kreises einen endlichen bestimmten Werth liefert, wie klein auch der Radius r_1 genommen wird, muss die nothwendige und hinreichende Bedingung erfüllt sein, dass das Doppelintegral

$$\int\int f(a + r\cos\varphi,\ b + r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

ausgedehnt über das Innere des Kreises mit dem Radius r_1 gleichzeitig mit r_1 nach Null convergirt, oder anders ausgedrückt, es muss sich eine obere Grenze für r_1 ermitteln lassen, so dass das Doppelintegral ausgedehnt über einen concentrischen Kreisring mit den Begrenzungskreisen r_1 und $r_2 < r_1$ kleiner bleibt als irgendwelche Grösse δ, wie klein auch r_2 genommen wird.

Wird die Function $f(a + r\cos\varphi,\ b + r\sin\varphi)$ für $r = 0$ (bei allen Werthen von φ) in bestimmter Weise unendlich, so kann man eine Grenze für die Ordnung des Unendlichwerdens angeben, die nicht überschritten werden darf, soll das Integral endlich bleiben. *Es muss f von niederer als der zweiten Ordnung unendlich werden,* d. h. es muss in der Umgebung der Stelle bei allen Werthen von φ

$$f(x,y) < \frac{C}{r^\alpha}$$

sein, wobei C eine Constante, α eine Zahl kleiner als 2 bezeichnet. Denn wäre

$$f(x,y) \geqq \frac{C}{r^2}$$

so würde in einem Kreisringe

$$\iint f(x,y)\,dT > c\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r} = c2\pi\left[l(r_1)-l(r_2)\right],$$

und dieser Ausdruck wird für $r_1 = 0$ unendlich.

In solch einem Falle, wo das Doppelintegral einen bestimmten Werth hat, ist dieser Werth stets auch unabhängig von der Integrationsfolge.

Andererseits ist zu bemerken, dass, wenn das Doppelintegral bei unendlich werdender Function keinen endlichen Werth mehr hat, die successiven Integrationen endliche Werthe liefern können, doch brauchen dieselben nicht gleich zu sein. Man nennt in diesem Falle das durch successive Integrationen in bestimmter Reihenfolge definirte Doppelintegral ein singuläres.

So ist z. B. in dem §. 153 angegebenen Beispiel*)

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx = \int_0^1 dy \left[\frac{x}{y^2+x^2}\right]_0^1 = \int_0^1 \frac{dy}{y^2+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dy = \int_0^1 dx \left[\frac{-y}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \int_0^1 \frac{-dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4},$$

während das Doppelintegral

$$\iint \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx\,dy$$

in dem Rechtecke $x = 0$ bis $x = 1$, $y = 0$ bis $y = 1$ ohne Bedeutung ist; denn an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ wird die zu integrirende Function ganz unbestimmt und bekommt in der Umgebung dieser Stelle unendlich grosse Werthe von der zweiten Ordnung. In der That, setzt man

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

so wird

$$\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} = \frac{-\cos 2\varphi}{r^2},$$

also in einem Quadranten, welcher die Ecke umschliesst, wächst

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos 2\varphi\, d\varphi \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r}$$

logarithmisch über jede Grenze. Dagegen hat z. B.

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}\,dx\,dy = \iint -\cos 2\varphi\, r\,dr\,d\varphi$$

*) Cauchy: Leçons, redigées par Moigno. S. 85.

einen endlichen Werth, weil die zu integrirende Function zwar unstetig und unbestimmt im Punkte $x = 0$, $y = 0$ wird, jedoch endlich bleibt.

Auch hat das Doppelintegral

$$\int\int \frac{dx\,dy}{x^2+y}$$

für $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ einen endlichen Werth, wiewohl die Function in der Richtung der Abscissenaxe (aber nur in dieser) von der zweiten Ordnung an der Stelle $x = 0$ unendlich wird. Um dieses nachzuweisen, berechne man den Werth des Doppelintegrales für ein Rechteck von $x = 0$ bis $x = a$, $y = b$ bis $y = c$, es wird:

$$\int_0^a dx \int_b^c \frac{dy}{x^2+y} = \int_0^a dx\, l\frac{x^2+c}{x^2+b} = a\,l\frac{a^2+c}{a^2+b} + 2\sqrt{c}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a}{\sqrt{c}} - 2\sqrt{b}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a}{\sqrt{b}}\,.$$

Lässt man nun c und $b < c$ irgendwie nach Null convergiren, so convergirt die rechte Seite nach Null.

Die Werthe der successiven Integrationen brauchen nicht verschieden zu sein, wenn auch das Doppelintegral keine Bedeutung hat. Es ist in dem ersten Beispiel:

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}\, dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}\, dy = 0,$$

während das Doppelintegral für das Gebiet, das hier ein unendliches ist, nicht existirt.

Wird die Function f längs einer ganzen Curve im Gebiete unendlich, so nehme man dieselbe zur Linie $p =$ const. Das Product

$$f(p, q)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)(p - c)$$

darf dann in der Umgebung der Linie $p = c$ nicht gleich oder grösser sein als eine endliche Zahl A, denn sonst wäre

$$\int\int f\,dT \geqq A\int dq \int \frac{dp}{p-c}\,.$$

So hat z. B. das Doppelintegral $\int\int \frac{dx\,dy}{x^2+y}$ keinen endlichen Werth in einem Gebiete, in welchem die Parabel $x^2 + y = 0$ gelegen ist.

Umgekehrt, wenn f so beschaffen ist, dass in der Umgebung der Linie $p = c$

$$f(p, q)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)(p - c)^\alpha < A \quad \text{und} \quad (0 < \alpha < 1),$$

so hat das Integral einen endlichen Werth, denn es ist kleiner als

$$A\int dq\int\frac{dp}{(p-c)^a}.$$

Mit anderen Worten: *Wird die Function in bestimmter Weise längs einer ganzen Curve unendlich, so genügt es, dass sie von niederer als der ersten Ordnung unendlich wird, damit das Doppelintegral endlich bleibt.* Der Satz von der Vertauschbarkeit der Integrationenfolge bleibt dabei bestehen.

172. Ist das Integrationsgebiet unendlich, so versteht man unter dem Doppelintegral, ausgedehnt über die unendliche Fläche, den endlichen Grenzwerth, welchen dasselbe annimmt, indem zunächst das Doppelintegral für eine endliche Fläche ermittelt und dieses endliche Gebiet so erweitert wird, dass es in den unendlichen Bereich übergeht. Man hat dabei zu untersuchen, unter welchen Bedingungen sich ein endlicher Grenzwerth ergiebt.

Der Uebergang vom endlichen zum unendlichen Bereiche wird je nach der Definition des letzteren verschieden vollzogen. Soll derselbe die ganze Ebene umfassen, so bilde man das Doppelintegral für ein beliebiges Rechteck von x gleich a bis x gleich b, y gleich α bis y gleich β, und lasse a und α negativ, b und β positiv über alle Grenzen wachsen.

Ist das unendliche Gebiet nur ein unendlicher Ausschnitt der Ebene, der durch gerade Linien oder durch eine nicht geschlossene Curve begrenzt ist, so hat man sich bei dem Grenzübergange nach dieser Begrenzungscurve zu richten.

Soll z. B. das Doppelintegral erstreckt werden über das Innere der Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2px$ ist, so kann man

$$\int^{(2)} f(x,y)\,dT = \operatorname*{Lim}_{(a=\infty)}\int_0^a dx\int_{y=-\sqrt{2px}}^{y=+\sqrt{2px}} f(x,y)\,dy = \operatorname*{Lim}_{(b=\infty)}\int_{-b}^{+b} dy\int_{x=\frac{y^2}{2p}}^{x=\frac{b^2}{2p}} f(x,y)\,dx$$

setzen.

Ist das Doppelintegral zu bilden für das Innere eines Hyperbelastes, dessen Gleichung lautet: $x > 0$, $xy = k$, so lässt sich dasselbe definiren:

$$\int^2 f(x,y)\,dT = \operatorname*{Lim}_{(a=\infty,\ b=\infty)}\int_{x=\frac{k}{b}}^{a} dx\int_{y=\frac{k}{x}}^{b} f(x,y)dy = \operatorname*{Lim}_{(a=\infty,\ b=\infty)}\int_{y=\frac{k}{a}}^{b} dy\int_{x=\frac{k}{y}}^{a} f(x,y)\,dx.$$

Der Werth des Doppelintegrales wird ein singulärer, wenn er von der Art, wie a und b unendlich werden, abhängig ist.

Besitzt die zu integrirende Function $f(x,y)$ bei beliebig wachsenden Werthen von x und y schliesslich keine Maxima und Minima mehr, derart, dass $f(r\cos\varphi,\ y\sin\varphi)$ innerhalb des Integralgebietes bei jedem

Werthe von φ mit unendlich wachsendem Werthe von r nach Null convergirt, und zwar von höherer als der zweiten Ordnung, so dass von einem gewissen Werthe r_1 ab

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) < \frac{A}{r^\alpha} \qquad (\alpha > 2)$$

bleibt, so ist das Doppelintegral endlich und von der Art des Uebergangs zum unendlichen Bereich ganz unabhängig. Denn der auf ein Gebiet, für welches $r > r_1$, bezügliche Theil des Integrales $\int f(x, y)\,dT$ ist kleiner als $A\int d\varphi \int \frac{dr}{r^{\alpha-1}}$, und dieser Ausdruck wird bei beliebig wachsenden Werthen von r gleich Null.

Dagegen hat das Doppelintegral jedenfalls keinen endlichen Werth, wenn die Function $f(x, y)$ ohne Maxima und Minima bei wachsenden Werthen von x und y von niederer als der zweiten Ordnung unendlich klein wird, oder gar endlich bleibt.

In dem Falle, dass die Function bei wachsenden Werthen von x und y ohne Aufhören Oscillationen erleidet, lässt sich, wie bei dem einfachen Integrale, für die Ordnung des Unendlichwerdens keine Grenze angeben.

Wenn das Doppelintegral nicht existirt, so können doch singuläre Werthe bei einer bestimmten Aufeinanderfolge der Integrationen existiren. Ein Beispiel dafür ist schon im vorigen §. gegeben; ein anderes wichtiges ist das folgende: Die Function $f(x, y) = \cos(xy)$ ist in dem unendlichen Streifen $x = 0$ bis $x = b$, $y = 0$ bis $y = \infty$ nicht integrirbar, denn es ist:

$$\int_0^h dy \int_0^b \cos(xy)\,dx = \int_0^b dx \int_0^h \cos(xy)\,dy = \int_0^b \left[\frac{\sin xy}{x}\right]_0^h dx = \int_0^b \frac{\sin hx}{x}\,dx,$$

und lässt man zuerst h in der zu integrirenden Function beliebig wachsen, so wird dieselbe gänzlich unbestimmt; wohl aber hat

$$\int_0^h dy \int_0^b \cos(xy)\,dx = \int_0^h \frac{\sin by}{y}\,dy$$

für $h = \infty$ den bestimmten Werth $\pm\frac{\pi}{2}$, je nachdem $b >$ oder < 0 (§. 155). Indem also das Doppelintegral nicht existirt, wird auch

$$\int_0^b dx \lim_{h=\infty}\left[\int_0^h \cos(xy)\,dy\right]$$

unbestimmt, während

$$\lim_{h=\infty}\int_0^h dy \int_0^b \cos(xy)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}. \qquad (b \gtrless 0)$$

Man beachte, dass sonach aus der Gleichung:

$$\int_0^b dx \int_0^h \cos(xy)\, dy = \int_0^h dy \int_0^b \cos(xy)\, dx,$$

die für jeden endlichen Werth von h gilt, doch nicht geschlossen werden darf:

$$\int_0^b dx \lim_{h=\infty} \int_0^h \cos(xy)\, dy = \lim_{h=\infty} \int_0^h dy \int_0^b \cos(xy)\, dx\,^{*}),$$

weil die linke Seite keinen bestimmten Sinn hat.

173. Es ist noch schliesslich von Wichtigkeit, zu erkennen, dass das Product zweier einfacher Integrale stets als ein Doppelintegral betrachtet werden kann. Sind $f(x)$ und $\psi(x)$ zwei integrirbare Functionen, so ist

$$\int_a^b f(x)\, dx \int_\alpha^\beta \psi(y)\, dy = \int\int f(x)\, \psi(y)\, dx\, dy,$$

wenn dieses Doppelintegral ausgedehnt wird über das Rechteck zwischen den Grenzen x gleich a bis b, y gleich α bis β.

Denn es ist

$$\int_a^b f(x) dx = (x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) \ldots (b - x_{n-1}) f(x_{n-1}) + \Delta = S + \Delta,$$

$$\int_\alpha^\beta \varphi(y) dy = (y_1 - \alpha)\varphi(\alpha) + (y_2 - y_1)\varphi(y_1) \ldots (\beta - y_{m-1})\varphi(y_{m-1}) + \Delta' = S' + \Delta',$$

also

$$\int_a^b f(x)\, dx \int_\alpha^\beta \varphi(y)\, dy = \sum\sum f(y_\mu)\, \varphi(y_\nu)\, (x_{\mu+1} - x_\mu)\, (y_{\nu+1} - y_\nu) + \\ + S\Delta' + S'\Delta + \Delta\Delta'.$$

Da nun die Grössen Δ und Δ' mit wachsenden Werthen von m und n nach Null convergiren, so erkennt man, dass die linke Seite in der That den Grenzwerth der Doppelsumme darstellt. Dieser Satz gilt auch, wenn die Functionen $f(x)$ und $\varphi(y)$ im Integrationsintervalle unendlich werden, falls die Integrirbarkeit jeder einzelnen erhalten bleibt. Denn wird $f(x)$ für $x = c$, $\varphi(y)$ für $y = c'$ unendlich, so ist nach dem eben bewiesenen Theoreme:

---

*) In der Theorie der Fourier'schen Integrale und den allgemeineren, welchen sie angehören (Du Bois-Reymond: Journal f. Math. Bd. 69), sind die Festsetzungen über die Folge der Integrationen und den dazu gehörigen Grenzübergängen wesentlich.

$$\int\limits_a^{c-\delta} f(x)\,dx \int\limits_a^{c'-\delta'} \varphi(y)\,dy = \int\int f(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy.$$

Convergiren nun δ und δ' nach Null, so geht die linke Seite, der Voraussetzung zufolge, in einen bestimmten endlichen Werth über, der zugleich den Werth des Doppelintegrales im Rechteck bis zu den Grenzen $x = c$, $y = c'$ repräsentirt.

174. Für das einfache bestimmte Integral besteht der Satz: Kennt man eine stetige Function $F(x)$, deren Ableitung integrabel ist und im allgemeinen mit einer Function $f(x)$ übereinstimmt, so ist:

$$\int\limits_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Der Werth des bestimmten Integrals hängt also nur von den Werthen der Function F an den Endpunkten des Integrationsintervalles ab. Ein Analogon für das Doppelintegral liefert der Satz von Green*): Ueber die Zurückführung eines Doppelintegrales einer eindeutigen Function auf einfache Integrale längs der Begrenzungscurve.

Es sei in der xy-Ebene ein endliches zusammenhängendes Gebiet gegeben, welches durch eine oder mehrere geschlossene Curven begrenzt ist. (In der umstehenden Figur 16 soll das Gebiet aus dem von der äusseren Curve umschlossenen Theile der Ebene mit Weglassung der beiden von den Ovalen begrenzten Flächen bestehen; es sind hier also drei geschlossene Begrenzungs- oder Randcurven vorhanden.) Für alle Punkte im Innern und an den Rändern dieses Gebietes sei eine Function $f(x, y)$ gegeben, welche innerhalb des Gebietes integrabel ist. Diese Function ist dann (nach §. 167) stetig, doch kann sie in einer „discreten" Mannigfaltigkeit von Curven auch unstetig, unbestimmt, ja selbst unendlich werden; wir nennen die Function alsdann „im allgemeinen" stetig. Im letzteren Falle muss sie, wenn sie in bestimmter Weise unendlich wird, an jeder vereinzelten Stelle algebraisch von niederer als der zweiten Dimension und längs ganzer Curven algebraisch von niederer als der ersten unendlich werden.

Bei jedem Werthe von y stellt dann auch $\int\limits_a^x f(x, y)\,dx$ im allgemeinen eine stetige und endliche Function von x dar, die in Bezug auf y integrabel ist. Bezeichnet man:

---

*) Journal f. Math. Bd. 44. Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie etc. §. 7—9.

$$\int_a^x f(x, y)\, dx = F(x, y) - F(a, y),$$

so ist

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}.$$

Jede Parallele zur x-Axe soll die Randcurven in einer endlichen, und zwar geraden Anzahl von Punkten schneiden. In der vorliegenden Figur sind es zwei oder vier. Bezeichnet man die Werthe von x, welche bei einem bestimmten Werthe von y zu den Ein- und Austrittsstellen gehören, mit x_1, x_2, x_3, x_4, so ist das Doppelintegral:

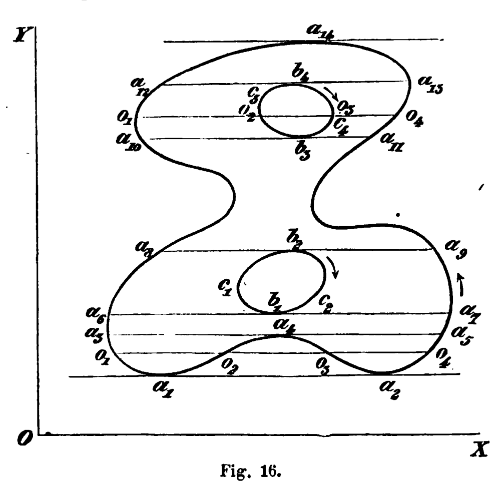


Fig. 16.

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int dy \int f(x, y)\, dx,$$

wenn bei der successiven Integration der rechten Seite das innere Integral nach x, bei jedem Werthe von y, zwischen den Grenzen x_1 bis x_2, x_3 bis x_4 erstreckt wird. Es ist aber:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx + \int_{x_3}^{x_4} f(x, y)\, dx = F(x_2, y) - F(x_1, y) + F(x_4, y) - F(x_3, y).$$

Also:

$$\int\int f(x,y)\, dx\, dy = \int dy\, F(x_2, y) - \int dy F(x_1, y) + \int dy F(x_4 y) - \int dy F(x_3 y).$$

In diesen Integralen sind die Werthe von x als Functionen von y entsprechend den Gleichungen der Randcurven zu substituiren, und die Integrationen nach x zwischen den extremen Werthen (denjenigen, an welchen je eine Eintritts- und Austrittsstelle der zur x-Axe Parallelen zusammenstösst) zu vollziehen.

Construirt man an jeder Stelle O die Normale der Randcurve und bezeichnet man die Winkel, welche die nach dem Innern des Gebietes sich erstreckende Richtung dieser Normalen mit der positiven Ordinatenaxe bildet, mit φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, diesen Winkel stets in derselben Drehrichtung von der positiven Ordinatenaxe zur negativen Abscissenaxe gemessen, so sind an den Eintrittsstellen O_1, O_3, φ_1 und φ_3 jedesmal Winkel im dritten oder vierten Quadranten, an den Austritts-

stellen O_2, O_4 dagegen φ_2, φ_4 im ersten oder zweiten Quadranten. Bezeichnet man also mit ds den positiven Werth des Bogenelementes einer Randcurve, so ist:

$$dy = -ds \sin\varphi_1, \quad dy = ds \sin\varphi_2, \quad dy = -ds \sin\varphi_3, \quad dy = ds \sin\varphi_4.$$

Demach:

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int F(x_2,y)\sin\varphi_2\,ds + \int F(x_1,y)\sin\varphi_1\,ds + \\ + \int F(x_4,y)\sin\varphi_4\,ds + \int F(x_3,y)\sin\varphi_3\,ds.$$

Alle diese Theilintegrale lassen sich unter einen Begriff zusammenfassen.

Von jedem der Integrale können wir sagen, dass es längs eines Stückes einer Randcurve hinerstreckt ist, indem jedesmal die zu integrirende Function

$$F(x,y)\sin\varphi\,ds$$

für die stetig auf einander folgenden Punkte der Randcurve, bei positiven Werthen von ds, zu bilden ist.

Es wird nun festgesetzt: Die Bogenlänge jedweder Randcurve soll eine positiv wachsende Grösse sein, wenn man die Curve von irgend einem ihrer Punkte an so durchläuft, dass die Fläche, zu deren Begrenzung sie gehört, zur Linken bleibt. Auf diese Weise erhält man die Theilintegrale, gebildet von den, Punkten O_2 oder O_4 über die Strecken: a_1a_4, a_2a_5, a_5a_7, a_7a_9, a_9a_{11}, $a_{11}a_{13}$, $a_{13}a_{14}$ und von b_1 über c_1 nach b_2, b_3 über c_3 nach b_4; dagegen von den Punkten O_1 oder O_3 über die Strecken: a_3a_1, a_4a_2, a_6a_3, a_8a_6, $a_{10}a_8$, $a_{12}a_{10}$, $a_{14}a_{12}$ und b_2 über c_2 nach b_1, b_4 über c_4 nach b_3. Man kann daher sagen, das Integral

$$\int F(x,y)\sin\varphi\,ds$$

ist für die Punkte sämmtlicher Randcurven zu bilden, wenn man dieselben so durchläuft, dass das Gebiet, welches sie begrenzen sollen, zur Linken bleibt.

Umgekehrt hat man die Definition: Unter einem einfachen Integral $F(x,y)\sin\varphi\,ds$, hinerstreckt über eine geschlossene Curve in positiver Richtung, versteht man, indem man dasselbe durch eine Variabele ausdrückt, den Werth von

$$\int F(x,y)dy,$$

indem man erstlich aus der Gleichung der Randcurve $\varphi(x,y) = 0$ zu jedem Werthe von y die Ein- und Austrittsstellen der Parallelen zur x-Axe als Functionen von y berechnet:

$$x_1 = \psi_1(y) < x_2 = \psi_2(y) < x_3 = \psi_3(y) < x_4 = \psi_4(y) \ldots$$

und alsdann die Integralsumme:

$$\int F(\psi_2(y),y)\,dy - \int F(\psi_1(y),y)\,dy + \int F(\psi_4(y),y)\,dy - \int F(\psi_3(y),y)\,dy \ldots$$

für wachsende Werthe von y bildet.

Vermittelst dieser Definition lässt sich der Green'sche Satz folgendermassen aussprechen:

Ist $f(x, y)$ eine innerhalb eines Gebietes integrabele Function, so ist

$$\int^x f(x, y)\,dx = F(x, y)$$

im allgemeinen bei jedem Werthe von y eine stetige Function von x und bei jedem Werthe von x eine integrabele Function in Bezug auf y. Das Doppelintegral

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy$$

ist gleich dem einfachen Integral

$$\int F(x, y)\sin\varphi\,ds,$$

wenn letzteres über die Randcurven des Gebietes in positivem Umlauf erstreckt wird.

Diese Gleichung bleibt selbst dann noch richtig, wenn die Functionen f und F an unendlich vielen Stellen willkürlich abgeändert werden, doch so, dass die Integrale dabei ungeändert bleiben.

Der Werth des Doppelintegrales hängt also nur von den Werthen F in den Punkten der Randcurven ab.

In anderer Reihenfolge kann man den Satz auch so fassen: Ist die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x}$ einer Function $F(x, y)$ integrabel über das ganze Gebiet (auch wenn es Stellen oder Curven giebt, an denen sie unstetig oder unendlich wird), so ist stets

$$\iint \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy = \int F(x, y)\sin\varphi\,ds.$$

Analog beweist man durch Vertauschung der Buchstaben x und y, indem man mit ψ den Winkel bezeichnet, welchen die nach Innen gerichtete Normale mit der positiven x-Axe einschliesst, wobei an den Eintrittsstellen der Parallelen zur y-Axe der positive Werth von dx gleich wird, $ds\sin\psi = ds\cos\varphi$, an den Austrittsstellen dagegen gleich $-ds\sin\psi = -ds\cos\varphi$, die Gleichung:

$$\iint \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = -\int F(x, y)\sin\psi\,ds = -\int F(x, y)\cos\varphi\,ds.$$

$-\int F(x, y) \cos\varphi \, ds$ ist nach der obigen Definition das Integral $-\int F(x, y)\, dx$, gebildet längs der Randcurven in positivem Umlaufe.

175. An dieses Resultat knüpfen sich noch einige bemerkenswerthe Folgerungen.

1. Es sei für ein irgendwie durch ein oder mehrere Randcurven begrenztes Gebiet eine eindeutige Function zweier Variabelen gegeben: $f(x, y)$; ihre partiellen Ableitungen seien

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = Q, \text{ und es sei } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Sind nun die Functionen $\frac{\partial P}{\partial y}$ und $\frac{\partial Q}{\partial x}$ innerhalb des Gebietes integrabel, so ist:

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int P \cos\varphi\, ds, \quad \int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int Q \sin\varphi\, ds,$$

also

$$\int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int (Q \sin\varphi + P \cos\varphi)\, ds = \int (Q dy + P dx).$$

Der Voraussetzung zufolge verschwindet aber die Function unter dem Doppelintegrale, und folglich erhält man den Satz:

Sind P und Q die partiellen Ableitungen einer eindeutigen Function zweier Variabelen, so verschwindet das Integral

$$\int (Q \sin\varphi + P \cos\varphi)\, ds = \int (Q dy + P dx),$$

wenn es in positivem Umlaufe für sämmtliche Randcurven eines Gebietes gebildet wird, in welchem die Functionen $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ integrabel sind und im allgemeinen (mit Ausnahme einer linearen Mannigfaltigkeit) der Gleichung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ genügen.

2. Aus diesem Satze folgt: Ist das Gebiet nur von einer einzigen geschlossenen Randcurve begrenzt (einfach zusammenhängend) und sind für das Innere derselben die eben genannten Bedingungen erfüllt, so hat das Integral, gebildet für diese eine geschlossene Randcurve, den Werth Null.

3. Sind $x_0 y_0$, $x_1 y_1$ die Coordinaten zweier Punkte, die im Innern solch eines (einfach zusammenhängenden) Gebietes liegen, und verbindet man dieselben durch beliebige Curven $s_1, s_2, s_3 \ldots$, die im Innern des Gebietes verlaufen, so ist der Werth des Integrales

$$\int (Q \sin\varphi + P \cos\varphi)\, ds = \int (Q dy + P dx)$$

immer derselbe, für welche Curve man es auch bilden mag. Denn je zwei Curven, s_1 und s_2 z. B., umschliessen einen Theil des Gebietes, und folglich ist die Summe der beiden Integrale, von denen das erste auf s_1 von $x_0 y_0$ nach $x_1 y_1$, das andere auf s_2 von $x_1 y_1$ nach $x_0 y_0$ geführt wird, Null; oder in Formeln:

$$\int\limits_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} (Q\,dy + P\,dx) = -\int\limits_{x_1 y_1}^{x_0 y_0} (Q\,dy + P\,dx) = \int\limits_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} (Q\,dy + P\,dx).$$
$$\text{(längs } s_1) \qquad\qquad \text{(längs } s_2) \qquad\qquad \text{(längs } s_2)$$

4. Die Integration, welche im Falle 3 zu vollziehen ist, gestaltet sich einfach, wenn dies Gebiet so geartet ist, dass das Rechteck parallel den Coordinatenaxen, dessen Ecken die beiden Punkte $x_0 y_0$ und $x_1 y_1$ sind, ganz im Gebiete liegt. Der Einfachheit halber werde dabei angenommen, dass innerhalb und auf den Grenzen solch eines Rechteckes die Functionen P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ausnahmslos stetig sind, und dass die Gleichung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ überall besteht. Alsdann kann man die Integration längs den Seiten dieses Rechteckes vollziehen und erhält entweder:

$$\int\limits_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} (Q\,dy + P\,dx) = \int\limits_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)\,dy,$$

oder

$$\int\limits_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} (Q\,dy + P\,dx) = \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y)\,dy + \int\limits_{x_0}^{x_1} P(x, y_1)\,dx.$$

Bezeichnet man das Integral als Function seiner oberen Grenze mit $F(x_1, y_1)$ — es ist, wie man sich leicht überzeugt, eine stetige Function, weil

$$F(x_1 + h, y_1 + k) - F(x_1, y_1) = \int\limits_{x_1}^{x_1+h} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_1}^{y_1+k} Q(x_1 + h, y)\,dy +$$
$$+ \int\limits_{y_0}^{y_1} \Big[Q(x_1 + h, y) - Q(x_1, y)\Big] dy$$

und $Q(x, y)$ eine stetige Function ist —, so erhält man durch Differentiation nach x_1 die Gleichung:

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x_1} = P(x_1, y_0) + \frac{\partial \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)\,dy}{\partial x_1}.$$

Weil nun $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ eine stetige Function, so ist die Differentiation

unter dem Integralzeichen gestattet (§. 169); ferner besteht die Gleichung

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y};$$

also ist:

$$\frac{\partial \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)\, dy}{\partial x_1} = \left[\int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dy\right]_{x=x_1} = \left[\int_{y}^{y_1} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy\right]_{x=x_1} = P(x_1, y_1) - P(x_1, y_0),$$

und folglich

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x_1} = P(x_1, y_1),$$

ebenso:

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y_1} = Q(x_1, y_1).$$

Die Integralfunction $\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} (Q dy + P dx)$ ist also definirbar als diejenige stetige Function von $x_1 y_1$, welche für $x_0 y_0$ verschwindet, und deren partielle Ableitungen nach x und y die Functionen P und Q sind.

Mit dieser Aussage ist die Function $F(x_1 y_1)$ vollständig definirt.

Denn alle stetigen Functionen zweier Variabelen, deren partielle Ableitungen in einem Gebiete übereinstimmen, können sich nur um eine additive Constante unterscheiden. Seien nämlich F und Φ zwei verschiedene Functionen, für welche

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y},$$

so wird zufolge der ersten Gleichung bei jedem Werthe von y

$$F(x, y) = \Phi(x, y) + C$$

sein, wobei C, eine von x unabhängige Grösse, nur eine stetige Function von y sein kann (§ 100); bezeichnet man dieselbe mit Y, so ist

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial y},$$

aber zufolge der zweiten Gleichung

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

Mithin ist (§. 100) Y eine Constante auch in Bezug auf y.

Es ist also das Problem gelöst: *Gegeben sind zwei stetige Functionen P und Q, welche in einem einfach zusammenhängenden Gebiete der Gleichung genügen*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Man soll diejenigen stetigen Functionen finden, deren partielle Ableitungen nach x und y mit den Werthen P und Q übereinstimmen. Die Gesammtheit dieser Functionen wird durch

$$\int_{x_0 y_0}^{x y} (Q dy + P dx) + \text{Const.}$$

dargestellt. Kennt man umgekehrt von vornherein solch eine stetige Function $F(x, y)$, so hat man damit das bestimmte Integral ermittelt; denn es ist

$$\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} (Q dy + P dx) + C = F(x, y) + C = F(x, y) - F(x_0 y_0),$$

weil die linke Seite für $x = x_0$, $y = y_0$ verschwindet, also $C = -F(x_0 y_0)$ sein muss.

Damit ist auch der Zusammenhang zwischen dem bestimmten und unbestimmten Integrale zweier Variabelen mit allen hier nöthigen Voraussetzungen entwickelt.

Anmerkung: Es ist zu beachten, dass der vorstehende Beweis des Satzes über die Herleitung einer stetigen Function $F(x, y)$ aus ihren partiellen Ableitungen P und Q nicht nur die Stetigkeit dieser Ableitungen, sondern auch ihre Differentiirbarkeit, bezüglich nach y und x, in dem Gebiete benutzt*); während ein Analogon dafür bei den Functionen einer Variabelen nicht vorhanden ist.

Es ist daher nicht unwichtig, einzusehen, dass die Bedingung für das exacte Differential in gewissen Fällen modificirt werden muss. Man formulire das Problem folgendermassen:

Gegeben sind in einem rechteckigen Gebiete (von $x = a$ bis $x = b$, $y = \alpha$ bis $y = \beta$) zwei stetige Functionen P und Q. Welche weiteren Bedingungen müssen dieselben erfüllen, damit es eine in dem Gebiete stetige Function $F(x,y)$ gebe, für welche

---

*) Es können Punkte vorhanden sein, an denen die Stetigkeit und Endlichkeit der Functionen P und Q aufhört. Diese Punkte können aber in beliebig kleine Umgebungen eingeschlossen werden; die Umschliessungscurven werden dann des Randcurven des Gebietes zugezählt, welches dadurch ein mehrfach zusammenhängendes wird. Sie kommen aber schliesslich bei der Bildung des einfachen Integrales nicht in Betracht, wenn für das Innere solch eines Bereiches das Doppelintegral $\int\int\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy$ verschwinden soll. Die abgeleiteten Sätze basiren auf der Gleichung $\int\int\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy = 0$, gebildet für jeden beliebigen Theil des gesammten Gebietes als der nothwendigen und hinreichenden Voraussetzung.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$$

ist und wie wird dieselbe bestimmt?

Die Gesammtheit aller stetigen Functionen, deren partielle Ableitung nach x mit P übereinstimmt, ist in der Form enthalten:

$$F(x, y) = \int_a^x P(x, y)\, dx + Y,$$

wobei Y eine stetige Function von y allein ist. Lässt man $x = a$ werden, so folgt:

$$F(x, y) - F(a, y) = \int_a^x P(x, y)\, dx.$$

Differentiirt man die Gleichung nach y, so ergiebt sich, weil

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y), \quad \frac{\partial F(a, y)}{\partial y} = Q(a, y)$$

sein soll, die Relation:

$$1) \qquad Q(x, y) - Q(a, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x P(x, y)\, dx.$$

Ebenso findet man die analoge Gleichung:

$$2) \qquad P(x, y) - P(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial x} \int_\alpha^y Q(x, y)\, dy.$$

Die Functionen P und Q können also nicht unabhängig von einander sein; sie müssen diesen Gleichungen genügen, von denen die eine eine Folge der anderen ist. Diese Bedingungen sind nothwendig. Folgt nun aus der Differentiirbarkeit der Integrale auch die Differentiirbarkeit der Functionen P und Q bezüglich nach y und x? An Stelle der Gleichung 1), in welcher a und x beliebige Werthe bedeuten, kann man schreiben:

$$\frac{Q(x+h, y) - Q(x, y)}{h} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(x,y)\, dx = \operatorname*{Lim}_{\Delta y = 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{P(x, y+\Delta y) - P(x,y)}{\Delta y}\, dx.$$

Die rechte Seite besitzt also für beliebig kleine Werthe von h einen Grenzwerth für $\Delta y = 0$. Das Integral der rechten Seite kann aber an jeder Stelle, wo P eine stetige Function von x ist, durch seinen Mittelwerth ersetzt werden, so dass man die Gleichung erhält:

$$\frac{Q(x+h,y)-Q(x,y)}{h} = \operatorname*{Lim}_{\Delta y=0} \frac{P(x+\Theta h, y+\Delta y) - P(x+\Theta h, y)}{\Delta y}.$$

Hier ist Θ eine von Δy abhängige Function, und das Intervall Θh kann durch Wahl von h beliebig verkleinert werden. Nichtsdestoweniger darf man nicht schliessen, dass der bestimmte Grenzwerth, welcher sich auf der rechten Seite ergiebt, der Differentialquotient der Function $P(x,y)$ an einer bestimmten Stelle in Bezug auf y ist. Denn jener Grenzwerth kommt nur so zu Stande, dass auch das Argument Θh variirt, während die Ableitung nach y durch die Gleichung

$$\operatorname*{Lim}_{\Delta y=0} \frac{P(x,y+\Delta y) - P(x,y)}{\Delta y}$$

definirt ist. Nur falls die Ableitung $\frac{\partial P}{\partial y}$ für alle Punkte im Gebiete existirt, und eine in Bezug auf die beiden Variabelen integrirbare Function ist, folgt nach dem im §. 169 geführten Beweise die Vertauschbarkeit der Differentiation und Integration bei der Gleichung 1) und daraus die Existenz von $\frac{\partial Q}{\partial x}$, sowie die Gleichung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Fälle, in denen die allgemeine Formulirung der Bedingung nothwendig wird, lassen sich angeben. Es sei $\psi(z)$ eine Function, die innerhalb eines bestimmten Intervalles zwar stetig ist, aber keine zweite Ableitung besitzt. Substituirt man dann $z = \varphi(x,y)$, so erhält man eine Function $\psi(\varphi(x,y)) = F(x,y)$, für welche die gemischte Ableitung $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ nicht existirt, obgleich diese Function ein totales erstes Differential besitzt, dessen Integral stets unabhängig bleibt vom Integrationswege.

Für den Beweis des Satzes 1) in diesem Paragraphen, dass die Summe der Integrale:

$$\int P dx + Q dy$$

gebildet in positivem Umlaufe für sämmtliche Randcurven eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes gleich Null wird, war die Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ wesentlich. Ob dieselbe nothwendig ist, darüber liegen keine Untersuchungen vor.

176. Die Bedingungen der Integrabilität bleiben bestehen, wenn an Stelle der Variabelen x und y zwei neue Variabele u und v eingeführt werden, deren erste und zweite Ableitungen existiren.

Sei $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, so verwandelt sich das Differential $P dx + Q dy$ vermöge der Gleichungen

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \qquad dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv$$

in die Form $P_1 du + Q_1 dv$, wobei:

$$P_1 = P\frac{\partial\varphi}{\partial u} + Q\frac{\partial\psi}{\partial u}, \qquad Q_1 = P\frac{\partial\varphi}{\partial v} + Q\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

und es wird

$$\frac{\partial P_1}{\partial v} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right] + \frac{\partial\psi}{\partial u}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right]$$
$$+ P\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + Q\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v},$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial v}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right] + \frac{\partial\psi}{\partial v}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right]$$
$$+ P\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + Q\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}.$$

Demnach ist

$$\frac{\partial P_1}{\partial v} = \frac{\partial Q_1}{\partial u}$$

und

$$\int(P_1\,du + Q_1\,dv) = \int(P\,dx + Q\,dy) + C.$$

Bei der Ableitung dieser Formel ist die Existenz sämmtlicher zweiter Differentialquotienten der ursprünglichen Function vorausgesetzt.

Viertes Buch.

Die Integrale complexer Functionen. Die allgemeinen Eigenschaften analytischer Functionen.

Erstes Capitel.

Das bestimmte Integral einer eindeutigen analytischen Function im complexen Gebiet.

177. Unter der Function $f(z)$ einer complexen Veränderlichen z wurde im §. 80 eine Grösse definirt, welche sich aus z durch eine endliche oder auch unendliche Anzahl von Rechnungsoperationen berechnen lässt. Analytisch wurde dann solch eine Function in einem zusammenhängenden Gebiete genannt (§. 84), in welchem sie, mit Ausnahme singulärer Stellen, überall eine bestimmte Ableitung $f'(z)$ unabhängig vom Differentiale $dz = dx + idy$ besitzt. Die beiden Bestandtheile u und v einer analytischen Function

$$f(z) = u + iv$$

sind, wie weiter gefolgert wurde, stetige Functionen der beiden Variabelen x und y, mit bestimmten Ableitungen nach x sowohl wie nach y, welche die Gleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Auch wurde gezeigt, dass diese Gleichungen zusammen mit der Stetigkeit der Ableitungen auch die hinreichenden Bedingungen dafür sind, dass die Function $f(x + iy) = u + iv$ eine vom Differentiale unabhängige Ableitung besitzt, also eine analytische Function von z in dem ursprünglich definirten Sinne ist.

Die folgenden Untersuchungen, durch welche der Integralbegriff im complexen Gebiete festgestellt werden soll, behandeln zuerst die Function einer complexen Veränderlichen überhaupt und gehen dann zu den analytischen Functionen über, deren allgemeine Eigenschaften das Endziel bilden.

In der complexen Ebene seien zwei Punkte z_0 und Z gegeben und durch eine beliebige Curve von endlicher Länge mit einander verbunden. Die Gleichung der Curve kann man sich in der Form

$\varphi(x, y) = 0$ oder auch in der Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben denken. Jedem Werthe von t soll alsdann eindeutig ein Werth von x und einer von y entsprechen, continuirlich auf einander folgenden Werthen der Variabelen t, von welcher wir annehmen, dass sie keinen Wechsel der Zu- oder Abnahme zwischen den Grenzen t_0 und t erleidet, entsprechen die continuirlich auf einander folgenden Punkte von z_0 bis Z. Schaltet man nun zwischen z_0 und Z beliebig viele auf der Curve gelegene Punkte ein, $z_1, z_2 \ldots z_{n-1}$, und bildet die Summe:

$$f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + f(z_2)(z_3 - z_2) \ldots f(z_{n-1})(Z - z_{n-1}),$$

so heisst der complexe Grenzwerth, dem diese Summe bei beliebig wachsendem Werthe n zustrebt, *das bestimmte Integral der Function $f(z)$, gebildet von z_0 bis Z auf dem durch die Curvengleichung vorgeschriebenen Wege**).

Unter welchen Bedingungen ist ein bestimmter Grenzwerth vorhanden? Nimmt man zunächst an, dass die Function $f(z)$ in allen Punkten der Curve endlich bleibt, also eine obere Grenze angebbar ist, die ihr Modul nicht überschreitet, und dass die Punkte, an denen der reelle und der imaginäre Theil von $f(z)$ endliche Discontinuitäten oder unendlich viele Oscillationen mit endlichen Schwankungen erleiden, eine discrete Menge bilden, so ist das Vorhandensein einer bestimmten Grenze vermittelst der Sätze über das reelle Integral leicht zu erkennen. Denn verwandelt man durch die Substitution

$$z = x + iy = \varphi(t) + i\psi(t), \quad f(z) \text{ in } f_1(t) + if_2(t),$$

und sind $t_0, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}, T$ die Werthe, welche den Punkten z_0, $z_1, z_2 \ldots z_{n-1}, Z$ entsprechen, so geht die obige Summe über in:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} [f_1(t_k) + if_2(t_k)]\,[\varphi(t_{k+1}) + i\psi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) - i\psi(t_k)],$$

die sich in einen reellen Theil:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f_1(t_k)\,[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)] - \sum_{k=0}^{k=n-1} f_2(t_k)\,[\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]$$

und einen imaginären:

$$i\sum_{k=0}^{k=n-1} f_2(t_k)\,[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)] + i\sum_{k=0}^{k=n-1} f_1(t_k)\,[\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]$$

---

*) Cauchy: Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires. 1825. Compts rendus 1846. — Riemann: Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. 1851.

zerlegt. Der ersten Summe und analog den drei übrigen kann man die Form geben:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f_1(t_k) \frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)}{t_{k+1} - t_k} (t_{k+1} - t_k).$$

Die Curve, welche als Integrationsweg gewählt ist, soll eine endliche Länge haben; sie hat daher auch sicherlich überall (mit Ausnahme einer discreten Punktmenge) einen vorwärts genommenen Differentialquotienten, der selbst im allgemeinen eine stetige Function und mit dem rückwärts genommenen identisch ist (geometrisch: die Curve hat nur in discreten Punkten Ecken). Es lassen sich daher (§. 100) die Intervalle so klein annehmen, dass im allgemeinen bei jedem Werthe von t

$$\frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \varphi'(t_k) + \delta,$$

wo δ eine beliebig kleine Grösse bedeutet. Mithin erhält jede der vier Summen eine Form wie:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f_1(t_k)\, \varphi'(t_k)\, (t_{k+1} - t_k) + \delta \sum_{k=0}^{k=n-1} f_1(t_k)\, (t_{k+1} - t_k),$$

die bei beliebig wachsendem Werthe von n in das bestimmte Integral

$$\int_{t_0}^{T} f_1(t)\, \varphi'(t)\, dt$$

übergeht. *Es ist also*

$$\text{I. } \operatorname{Lim} \sum f(z_k)\,(z_{k+1} - z_k) = \int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz = \int_{t_0}^{T} [f_1(t)\,\varphi'(t) - f_2(t)\,\psi'(t)]\, dt +$$
$$+\, i \int_{t_0}^{T} [f_2(t)\,\varphi'(t) + f_1(t)\,\psi'(t)]\, dt = \int_{t_0}^{T} [f_1(t) + i f_2(t)][\varphi'(t) + i\psi'(t)]\, dt$$

eine bestimmte endliche Grösse.

Ist z. B. das Integral vom Punkte $z_0 = x_0 + iy_0$ zum Punkte $Z = X + iY$ auf geradlinigem Wege zu bilden, so ist:

$$x = x_0 + (X - x_0)\,t, \quad y = y_0 + (Y - y_0)\,t,$$

also

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz = [X - x_0 + i(Y - y_0)] \int_{t=0}^{t=1} f(x_0 + iy_0 + t(X - x_0) + it(Y - y_0))\, dt.$$

Ist das Integral über den Bogen eines Kreises zu führen, dessen Mittel-

punkt der Punkt $x_0 + iy_0$, so hat man, wenn r den Radius bedeutet, zufolge der Gleichungen:

$$x = x_0 + r\cos t,\quad y = y_0 + r\sin t,\quad dx = -r\sin t\,dt,\quad dy = r\cos t\,dt,$$

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{t_0}^{T} f(x_0 + iy_0 + re^{it})\, ire^{it}dt = ir\int_{t_0}^{T} f(x_0 + iy_0 + re^{it})\, e^{it}\,dt,$$

wobei t_0 und T die zu dem Anfangs- und zu dem Endpunkte gehörigen Werthe von t bezeichnen.

178. Auch für das complexe Integral gelten, wie aus der Gleichung I. hervorgeht, die Sätze:

1) $$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = -\int_{Z}^{z_0} f(z)\,dz,$$

nur müssen beide Integrale sich auf dieselbe Curve beziehen.

2) $$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_k} f(z)\,dz + \int_{z_k}^{Z} f(z)\,dz,$$

nur müssen die Integrationswege von z_0 über z_k nach Z oder von z über Z nach z_k in allen Integralen dieselben sein.

Desgleichen besteht hier ein Mittelwerthsatz; doch hat derselbe nicht die einfache Form wie beim reellen Integrale.

Aus der Gleichung:

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{t_0}^{T} f_1(t)\,[\varphi'(t) + i\psi'(t)]\,dt + i\int_{t_0}^{T} f_2(t)\,[\varphi'(t) + i\psi'(t)]\,dt$$

folgt:

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = M_1\,(Z - z_0) + i\,M_2\,(Z - z_0),$$

wobei M_1 einen Mittelwerth von $f_1(t)$, M_2 einen Mittelwerth von $f_2(t)$ bedeutet. Sind diese Functionen auf dem Integrationswege stetig, so kann man dieser Gleichung die Form geben:

3) $$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = [f_1(t_0 + \Theta(T - t_0)) + if_2(t_0 + \Theta'(T - t_0))]\,[Z - z_0].$$

Die Werthe Θ und Θ' werden aber im allgemeinen verschieden sein.

Aus dieser Gleichung lässt sich weiter folgern, dass das Integral in allen Punkten des Integrationsweges eine Function der complexen Veränderlichen darstellt, und zwar im allgemeinen eine analytische Function. Denn bedeutet z einen beliebigen Punkt auf dem Integrationswege, so wird der Differentialquotient des Integrales

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

genommen nach der oberen Grenze, in beliebiger Richtung abgeleitet, indem man den Quotienten

$$\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)\, dz$$

bildet, wobei h irgend welche nach Null convergirende Grösse bedeutet und das Integral auf irgend einem Wege zwischen den Punkten z und $z + h$ geführt wird. Entsprechen diesen Punkten die Werthe t und $t + k$ derart, dass auf dem Integrationswege mit $h = 0$ auch k nach Null convergirt, so ist nach Gleichung 3)

$$4)\qquad \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)\, dz = f_1\,(t + \Theta k) + i f_2\,(t + \Theta' k),$$

also

$$\operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)\, dz = f_1(t) + i f_2(t) = f(z).$$

Das bestimmte Integral, als Function der oberen Grenze betrachtet, besitzt also im allgemeinen in den Punkten des Integrationsweges die Ableitung $f(z)$. Insbesondere ist auch

$$\frac{\partial \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz}{\partial x} = f(z), \qquad \frac{\partial \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz}{\partial y} = i f(z),$$

womit gemäss §. 84 ausgedrückt ist, dass das Integral eine Function der complexen Veränderlichen $x + iy = z$ ist.

Ist längs des Integrationsweges eine eindeutige analytische Function $F(z)$ bekannt, deren Ableitung gleich $f(z)$ ist, so ist auch

$$5)\qquad \int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz = F(Z) - F(z_0).$$

Denn geht vermittelst der Substitution $z = \varphi(t) + i\psi(t)$, $f(z)$ über in $f_1(t) + i f_2(t)$ und $F(z)$ über in $F_2(t) + i F_2(t)$, so ist

$$F'(z) = f(z) = [F_1'(t) + i\, F_2'(t)]\, \frac{dt}{dz},$$

also

$$[f_1(t) + i f_2(t)]\, [\varphi'(t) + i\psi'(t)] = F_1'(t) + i F_2'(t),$$

folglich:

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{t_0}^{T} [f_1(t) + i f_2(t)]\,[\varphi'(t) + i\psi'(t)]\,dt = \int_{t_0}^{T} [F_1'(t) + i F_2'(t)]\,dt$$

$$= [F_1(T) + i F_2(T)] - [F_1(t_0) + i F_2(t_0)] = F(Z) - F(z_0).$$

Die Definition des bestimmten Integrales lässt sich ebenso wie früher erweitern:

Wird die Function $f(z)$ in discreten Punkten $c_1, c_2 \ldots$ unendlich, so lautet die Definitionsgleichung:

$$\int_{z_0}^{c_1} f(z)\,dz = \operatorname*{Lim}_{\delta=0} \int_{z_0}^{c_1-\delta} f(z)\,dz.$$

Auch hier besteht das Kriterium:

Das Integral rechts besitzt einen bestimmten Grenzwerth für $\delta = 0$, falls der Betrag von $(c - z)^{\nu} f(z)$ für $z = c$ eine endliche Grösse bleibt, unter ν einen positiven Werth kleiner als 1 verstanden, wie auch immer der Werth von z nach c convergirt. (Vgl. §. 181, 3.)

Verläuft der Integrationsweg in bestimmter Weise ins Unendliche, so ist

$$\int_{z_0}^{\infty} f(z)\,dz = \operatorname{Lim} \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz, \qquad \text{für } z = \infty$$

wenn der Punkt z auf der vorgeschriebenen Linie ins Unendliche übergeht.

Das Integral besitzt dann sicherlich eine bestimmte Grenze, wenn bei diesem Processe der Betrag von $z^{\nu} f(z)$ endlich bleibt und ν eine Zahl grösser als 1 ist. (Siehe §. 181, 4.)

179. Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Integrale einer complexen Function und dem einer reellen liegt, trotz der Gleichartigkeit der Sätze des vorigen §. mit den früheren, noch immer vor; denn ein complexes Integral kann zwischen zwei bestimmten Grenzen z_0 und Z auf sehr verschiedenen Wegen genommen werden, während für das reelle Integral eben durch die Forderung, dass es reell sein soll, auch immer zugleich nur ein Weg zwischen den Grenzen vorgeschrieben ist. Es kann daher das complexe Integral einer und derselben Function zwischen denselben Grenzen verschiedene Werthe je nach dem Integrationswege annehmen.

Erstreckt man z. B. $\int \frac{dz}{z}$ vom Punkte $+1$ bis zum Punkte -1 auf dem oberen Halbkreise um den Coordinatenanfangspunkt, so wird, indem man $z = \cos(t) + i\sin(t)$, $dz = [-\sin(t) + i\cos(t)]\,dt$ setzt,

$$\int_{+1}^{-1} \frac{dz}{z} = i \int_{0}^{\pi} dt = i\pi.$$

Dagegen wird auf dem unteren Halbkreise:

$$\int_{+1}^{-1} \frac{dz}{z} = i \int_{0}^{-\pi} dt = -i\pi .$$

Es entsteht also die Frage: *Unter welchen Bedingungen ist das Integral einer complexen Function selbst eine eindeutige Function seiner oberen Grenze, unabhängig vom Integrationswege?* Diese Frage wird, wie Riemann gezeigt hat, vermittelst des Green'schen Satzes und seiner Folgesätze (§. 174—176) beantwortet.

Es sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet gegeben und für dasselbe die eindeutige Function $f(z) = u + iv$ definirt. Die Functionen u und v seien in diesem Gebiete durchweg stetig. Sollten Punkte vorhanden sein, an denen dieses nicht zutrifft, so umschliesse man dieselben mit Curven und zähle dieselben den Randcurven des Gebietes zu. Von der Integration in solch einem mehrfach zusammenhängenden Gebiete wird im folgenden später die Rede sein. Ferner werde

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = F(Z) - F(z_0) = (U + iV) - (U_0 + iV_0) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} (u + iv)(dx + idy)$$

gesetzt, wobei ebenfalls U und V reelle und zwar stetige Functionen von x und y bedeuten.

Die Function $U + iV$ soll die Eigenschaft haben, dass sie in jedem Punkte des Gebietes unabhängig vom Integrationswege ist und den Gleichungen genügt:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\,\frac{\partial V}{\partial x} = f(z) = u + iv, \quad \frac{\partial U}{\partial y} + i\,\frac{\partial V}{\partial y} = if(z) = i\,(u + iv),$$

also muss:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -v, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = u$$

sein. Mithin wird man auf das früher behandelte Problem zurückgeführt, dessen Lösung (§. 175) aussagt:

In dem einfach zusammenhängenden Gebiete ist U eine stetige Function, deren partielle Ableitungen nach x und y überall bezüglich u und $-v$ sind, und ebenso V eine stetige Function mit den Ableitungen v und u, wenn die Functionen u und v die Eigenschaft haben, bestimmte partielle Ableitungen nach x sowohl wie nach y zu besitzen, zwischen denen die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Die Functionen U und V werden alsdann, durch die Integrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} (u\,dx - v\,dy) \quad \text{und} \quad \int_{x_0, y_0}^{x, y} (v\,dx + u\,dy)$$

gebildet, auf beliebigem Wege erhalten. Das sind aber die Gleichungen, welche aussagen, dass die Function $f(z)$ eine analytische Function mit der bestimmten Ableitung

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

ist.

Sonach ist bewiesen: *Ist in einem einfach zusammenhängenden endlichen Gebiete $f(z)$ ausnahmslos eine analytische Function, so ist $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ eine vom Integrationswege völlig unabhängige im ganzen Gebiete analytische Function mit der Ableitung $f(z)$.*

180. Führt man in das Integral $\int f(z)\,dz$ eine neue Veränderliche ein, durch die Substitution $z = \psi(z')$, wobei $\psi(z')$ in dem ganzen Gebiete, in welchem das Integral gebildet werden soll, eine analytische Function ist, so wird nach §. 176 die Eigenschaft der Integrabilität in Bezug auf die neue Variabele z' nicht gestört, und es ist:

$$\int f(z)\,dz = \int f(\psi(z'))\cdot\psi'(z')\,dz'$$

eine analytische Function von z' mit der Ableitung $f(\psi(z'))\,.\,\psi'(z')$.

Hat man das Integral über ein Gebiet zu erstrecken, welches ins Unendliche verläuft, so kann man durch die Transformation vermittelst reciproker Radien (§. 79) dasselbe in ein Integral verwandeln, das innerhalb eines endlichen Bereiches zu untersuchen ist. Aus der Substitution

$$z = \frac{1}{z'},\ dz = -\frac{dz'}{z'^2} \ \text{folgt:} \ \int f(z)\,dz = -\int f\left(\frac{1}{z'}\right)\frac{dz'}{z'^2},$$

und beliebig wachsenden Werthen von z entsprechen die Werthe von z' mit beliebig kleinem Modul. Soll also das Integral $\int f(z)\,dz$ auf einer Curve geführt werden, bei welcher z unendlich wird, so ist

$$\lim_{\text{für } z = \infty} \int^{z} f(z)\,dz = \lim_{\text{für } z' = 0} -\int^{z'} f\left(\frac{1}{z'}\right)\frac{dz'}{z'^2}.$$

181. An den Lehrsatz des §. 179 schliesst sich eine Reihe von Folgesätzen:

1. *Bildet man das Integral längs einer geschlossenen Curve, welche innerhalb des einfach zusammenhängenden Gebietes liegt, so ist der Werth desselben Null.*

Denn ist der Weg von z_0 über z_1 nach z der eine Theil dieser Curve, und der Weg von z_0 über z_2 nach z der andere, so sind die Integrale auf diesen Wegen einander gleich; und weil

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = -\int_{z}^{z_0} f(z)\,dz \qquad (§. 178, I),$$

so wird für den geschlossenen Weg die Summe der beiden Integrale von z_0 nach z und von z nach z_0 Null.

2. Ist das Gebiet kein einfach zusammenhängendes, so sind die beiden Integrale

$$\int (u + iv)(dx + idy) = \int (udx - vdy) + i\int (vdx + udy)$$

gebildet für sämmtliche Randcurven des Gebietes in positivem Umlaufe gleich Null (§. 175, 1). *Bildet man also* $\int f(z)\,dz$ *in positivem Umlaufe für sämmtliche Randcurven eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes, in welchem* $f(z)$ *eine analytische Function ist, so erhält es den Werth Null.*

Längs jeder einzelnen Randcurve besitzt es einen bestimmten Werth. Zieht man im Gebiete eine geschlossene Curve, welche für sich allein ein einfach zusammenhängendes Gebiet umschliesst z. B. α, so verschwindet das Integral längs dieser Curve; zieht man aber eine Curve, welche mit einer Randcurve zusammen ein Gebiet umschliesst z. B. β, so ist das Integral längs dieser Curve gleich dem Werthe, den es für die Randcurve erhält.

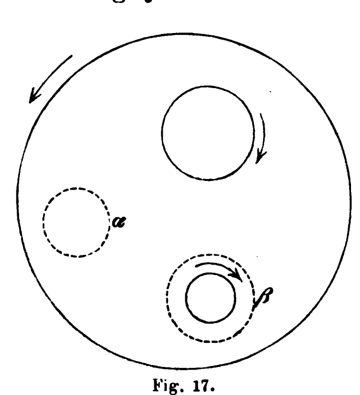


Fig. 17.

Daraus bildet man sich die Regel:

3) Verliert die zu integrirende Function $f(z)$ an einzelnen Stellen (discreter Mannigfaltigkeit) eines einfach zusammenhängenden endlichen Gebietes die Eigenschaft einer analytischen Function (indem sie an solch einer Stelle unstetig oder unendlich wird, oder keine Ableitung besitzt), so umschliesse man dieselben in beliebiger Nähe mit Curven, rechne diese den Randcurven des Gebietes zu, und führe die Untersuchung in dem mehrfach zusammenhängenden Gebiete. Verschwindet das Integral für die Randcurve um solch eine Stelle, so kann die Begrenzung dieser Stelle aufgehoben werden, immerhin kann jedoch die Integralfunction hingeleitet in solch einen Punkt ebenfalls die Eigenschaft einer analytischen Function verlieren. Denn dass auch die Integralfunction

analytisch ist, wurde nur bewiesen für die Stellen an denen $f(z)$ stetig bleibt.

Es ist also zweierlei zu entscheiden: erstlich ob das Integral um eine singuläre Stelle verschwindet, zweitens ob es hingeleitet bis in die singuläre Stelle endlich oder überhaupt analytisch bleibt.

Man kann zunächst einsehen: Verschwindet das Integral um die singuläre Stelle nicht, so ist die Integralfunction eine mehrdeutige Function, und die singuläre Stelle ein Verzweigungspunkt derselben; längs eines von diesem Punkte ausgehenden Verzweigungsschnittes differiren die Werthe des Integrales um eine constante Grösse.

Denn hat das Integral, geführt um eine Begrenzungscurve des Punktes α den Werth A, so hat es für jede Begrenzungscurve um den Punkt α denselben Werth, weil zwei Begrenzungscurven eine Ringfläche bestimmen, in welcher die Function ausnahmslos analytisch ist. Zu beiden Seiten einer vom singulären Punkte ausgehenden Curve differiren die Integralwerthe um A; das Integral ist also mehrdeutig.

Von einem bestimmten Werthe des Integrales geführt bis in den singulären Punkt kann hier nicht die Rede sein; derselbe hängt vielmehr davon ab, auf welchem Wege man bis zum singulären Punkte geht; wie oft man z. B. dabei den Verzweigungsschnitt durchschneidet.

Verschwindet dagegen das Integral um die Begrenzung einer Stelle α, so bleibt das Integral zwar eine eindeutige Function in noch so kleinem Gebiete um die Stelle α, aber dieser Punkt kann selbst ein singulärer für das Integral sein.

Eine nothwendige Bedingung dafür, dass das Integral bis in den Punkt α endlich bleibt (stetig ist es dann sicher), besteht darin, dass zu jeder noch so kleinen Zahl δ ein Kreis mit dem Radius r um die Stelle α angegeben werden kann, so dass für alle Werthe von

$$z - \alpha = \varrho\,(\cos\psi + i\sin\psi),$$

bei denen $\varrho \leqq r$ ist, der Betrag des Integrales

$$\int_r^0 f(\alpha + \varrho e^{i\psi})\, e^{i\psi}\, d\varrho$$

unabängig von ψ kleiner wird als δ. Das wird z. B. sicherlich dann der Fall sein, wenn die Function $f(z)$ so beschaffen ist, dass für $\varrho < r$ und $0 < \nu < 1$

$$\operatorname{abs}\,[f(\alpha + \varrho e^{i\psi}) \cdot \varrho^{\nu}]$$

kleiner bleibt als eine endliche Grösse G. Denn es ist

$$\operatorname{abs}\int_r^0 f(\alpha + \varrho e^{i\psi}) e^{i\psi}\, d\varrho < \int_0^r \operatorname{abs}\,[f(\alpha + \varrho e^{i\psi})]\, d\varrho < G\int_0^r \frac{d\varrho}{\varrho^{\nu}} = G\,\frac{r^{1-\nu}}{1-\nu}$$

und diese Grösse kann durch Wahl von r kleiner gemacht werden als

δ. Es lässt sich auch eine Bedingung angeben, welche genügt, damit das Integral um die Begrenzung einer Stelle verschwindet. Dieselbe besteht darin, dass

$$\lim_{z=\alpha} [(z-\alpha) f(z)] = 0$$

wird, dass sich also ein Gebiet um den Punkt α abgrenzen lässt, in welchem der Betrag des Productes $(z-\alpha) f(z)$ gleich oder kleiner ist als eine beliebig kleine Zahl δ.

Denn alsdann ist geführt um den Kreis mit dem Radius r

$$\text{abs} \int f(z)\, dz < \int_0^{2\pi} \text{abs} \left[f(\alpha + re^{i\psi})\, ire^{i\psi} \right] d\psi < 2\pi\delta$$

und dieser Werth ist beliebig klein; es ist also nicht möglich, dass das Integral um die Begrenzung einen endlichen Werth besitzt, vielmehr muss dieser Werth, da er ein bestimmter und für alle Begrenzungscurven der gleiche ist, Null sein.

Nunmehr können wir uns orientiren über den Einfluss etwaiger Singularitäten.

a) Verliert die Function $f(z)$ die Eigenschaft einer analytischen Function in einem Punkte dadurch, dass sie zwar endlich bleibt, aber unstetig wird oder der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ nicht mehr genügt, so hat dieser Punkt gar keinen Einfluss auf das Integral. Denn es ist

$$\lim_{z=\alpha} [(z-\alpha)^{\nu} f(z)] = 0$$

für ν gleich sowohl wie kleiner als 1. Das Integral bleibt eine analytische Function im Punkte α, seine Ableitung ist $\lim f(z)$ für $z = \alpha$. (Siehe übrigens die Bemerkung c.)

b) Wird aber die Function $f(z)$ an einer Stelle unendlich, wobei die Stelle eine wesentliche oder ausserwesentliche singuläre sein kann, so ist dieselbe stets auch eine singuläre für das Integral, denn

$$\lim_{z=\alpha} (z-\alpha)^{\nu} f(z)$$

wird hier nicht endlich für ein ν kleiner als 1; weil bei dem ausserwesentlichen singulären Punkte

$$\lim (z-\alpha)^{m} f(z)$$

nur für m gleich oder grösser als 1 endlich wird, bei dem wesentlichen aber überhaupt kein m angebbar ist. Dieses und die Entscheidung, ob der singuläre Punkt ein Verzweigungspunkt ist oder nicht, wird an den Beispielen des folgenden Paragraph näher erörtert werden.

c) Es ist nothwendig auch die Möglichkeit zu erwägen, ob die Function $f(z)$ die Eigenschaft einer analytischen Function **längs einer ganzen im Innern des Gebietes gelegenen Curve** c dadurch verlieren

kann, dass sie in der Umgebung dieser Curve zwar stetig ist, jedoch in allen Punkten derselben nicht mehr der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ genügt; während die Ableitungen endlich bleiben. Indessen involvirt diese Annahme, wie später bewiesen werden wird, einen Widerspruch.

Umschliesst man nämlich die Curve mit einer Begrenzung l in beliebiger Nähe, so wird das Integral um diese Begrenzung verschwinden, weil die Functionswerthe auf dem rechts von c gelegenen Theile von l sich von dem links beliebig wenig unterscheiden, wenn l dem c beliebig nahe rückt; die Summe der Integrale, die in entgegengesetzter Richtung geführt sind, wird also beliebig klein. Auch bleibt für jeden Punkt der Curve c das Integral endlich. Es würde also solch eine Curve nicht singulär sein für das Integral. Daraus folgt, dass auch in den Punkten der Curve die Gleichungen gelten:

$$U + iV = \int^{x,y} (u + iv)(dx + idy),$$

wobei

$$U = \int^{x,y} (udx - vdy), \qquad V = \int^{x,y} (vdx + udy).$$

Es ist also das Integral $U + iV$ eine analytische Function, deren Ableitung $f(z) = u + iv$ ist. Später wird gezeigt werden, dass auch die Ableitung einer analytischen Function differentiirbar ist, und unabhängig wird von dem Quotienten $\frac{dy}{dx}$; es müssen folglich auch für die Punkte der Curve die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

bestehen bleiben, dass heisst die ursprüngliche Annahme ist unmöglich.

d) Wird die Function $f(z)$ zu beiden Seiten einer im Innern des Gebietes gelegenen Curve unstetig, so führen auch die Integrationswege zu beiden Seiten solch einer Curve zu verschiedenen Werthen; d. h. auch das Integral ist in dem Gebiet keine analytische Function mehr.

4. Enthält das Gebiet des Integrales den unendlich fernen Punkt, so verwandelt man es durch die Substitution $z = \frac{1}{z'}$ in ein endliches. Dem Integrale

$$-\int f\left(\frac{1}{z'}\right)\frac{dz'}{z'^2}$$

geführt beliebig nahe um den Nullpunkt in positivem Umlauf, entspricht ein Integral in z auf einer beliebig weit gelegenen den Nullpunkt gleichfalls umschliessenden Curve, welche so zu durchlaufen ist, dass das Unendliche zur Linken bleibt, und welche eine den Unendlichkeitspunkt umschliessende Curve heisst. Der Werth dieses Integrales ist sicherlich Null falls

$$\lim_{z'=0}\left[z' f\left(\frac{1}{z'}\right)\frac{1}{z'^2}\right] = \lim_{z=\infty}[f(z)\,.\,z] = 0$$

wird. Die Integralfunction wird auch für den unendlich fernen Punkt endlich bleiben, wenn nach dem eben bewiesenen Satze:

$$\lim_{z'=0} z'^{\nu} f\left(\frac{1}{z'}\right)\cdot\frac{1}{z'^2} = \lim_{z'=0} f\left(\frac{1}{z'}\right)\cdot\frac{1}{z'^{2-\nu}} = \lim_{z=\infty} f(z)\,.\,z^{2-\nu} = G$$

wird, wobei $2-\nu > 1$ oder $\nu < 1$ ist.

182. Als explicite Darstellung eindeutiger analytischer Functionen haben wir nur die rationalen algebraischen und die Potenzreihe innerhalb ihres Convergenzkreises kennen gelernt. Ihre Integrale sollen gebildet werden. Dabei sind insbesondere die singulären Punkte zu berücksichtigen.

1. Das Integral einer rationalen ganzen Function.

Die Function z^n ist innerhalb der gesammten Ebene ausnahmslos eine analytische Function, falls n eine positive ganze Potenz ist. Es ist daher auf jedem Integrationswege:

$$\int^z z^n\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C.$$

Erstreckt sich das Integral ins Unendliche, so wird auch die Integralfunction unendlich. Der Unendlichkeitspunkt ist ein ausserwesentlich singulärer.

Mit Hülfe des leicht zu beweisenden Satzes, dass auch das complexe Integral einer Summe von Functionen gleich der Summe aus den Integralen gebildet von den einzelnen Summanden ist, gewinnt man hieraus die Formel für die Integration jeder ganzen rationalen Function:

$$\int^z (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n)\,dz = a_0 z + \frac{1}{2}a_1 z^2 + \frac{1}{3}a_2 z^3 + \cdots \frac{1}{n+1}a_n z^{n+1} + C.$$

2. Das Integral einer gebrochenen rationalen Function.

Jede gebrochene rationale Function lässt sich in eine ganze Function und in Partialbrüche zerlegen, deren Zähler constant, deren Nenner eine ganze Potenz ist; denn die in §. 111 entwickelten Identitäten gelten auch für die complexe Variabele. Demnach erfordert die Integration einer gebrochenen Function nur die Untersuchung der Integrale: $\int \frac{dz}{z-a}$ und allgemeiner $\int \frac{dz}{(z-a)^n}$, statt deren man auch, indem man statt $z-a$ z schreibt, also den Punkt a zum Nullpunkt wählt, die einfacheren Integrale

$$\int^z \frac{dz}{z},\quad \int \frac{dz}{z^n}$$

zu behandeln hat.

Betrachtet man zuerst den Fall: n ganzzahlig positiv grösser als 1; so erkennt man, dass die Function $\frac{1}{z^n}$ an der singulären Stelle Null den Charakter einer analytischen Function verliert; in der ganzen übrigen Ebene einschliesslich des Unendlichkeitspunktes ist sie regulär. Man umgebe die singuläre Stelle mit einem Kreise vom Radius r. Das bestimmte Integral bekommt längs der Peripherie dieses Kreises, da

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad dz = r(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi$$

wird, den Werth:

$$\int\frac{dz}{z^n} = \frac{1}{r^{n-1}}\int\frac{-\sin\varphi + i\cos\varphi}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi}\,d\varphi = \frac{i}{r^{n-1}}\int\limits_0^{2\pi}[\cos(n-1)\varphi - i\sin(n-1)\varphi]\,d\varphi.$$

Da $n > 1$, so wird dieser Werth gleich Null. Es verschwindet also das Integral um die Begrenzung des Nullpunktes geführt; demnach braucht die Randcurve nicht berücksichtigt zu werden. Auf jedem Wege in der Ebene, auch solche die den Unendlichkeitspunkt überschreiten, denn für diesen ist $\lim\limits_{z=\infty}\left[z\,\frac{1}{z^n}\right] = 0$, ist das Integral

$$\int^z\frac{dz}{z^n} = \frac{z^{-n+1}}{-n+1} + C$$

und verschwindet auf jedem geschlossenen Wege. Der Nullpunkt aber ist ein ausserwesentlich singulärer Punkt des Integrales.

Der Fall $n = 1$, welcher schon im §. 179 als Beispiel diente, erfordert eine besondere Behandlung; denn hier wird für einen den Nullpunkt umschliessenden Kreis:

$$\int\frac{dz}{z} = i\int\limits_0^{2\pi}d\varphi.$$

Das Integral wird also unabhängig vom Radius r gleich $2\pi i$. Um den Unendlichkeitspunkt hat das Integral gleichfalls einen endlichen Werth; denn führt man das Integral auf einem Kreise mit beliebig grossem Radius R, so dass der Nullpunkt zur Rechten bleibt, so verwandelt es sich durch die Substitution $z = \frac{1}{z'}$, $dz = -\frac{dz'}{z'^2}$ in

$$-\int\frac{dz'}{z'}$$

hinerstreckt auf einem Kreise vom Radius $\frac{1}{R}$ so, dass der Nullpunkt zur Linken bleibt; es erhält also den Werth $-2i\pi$. Demnach wird der Werth des Integrales abhängig von dem Integrationswege sein; es bekommt auf einer im Endlichen geschlossenen Curve geführt den Werth Null oder auch den Werth $2i\pi k$, je nachdem die geschlossene Curve

den Nullpunkt keinmal oder k-mal umschliesst. Das Integral $\int\limits_{z_0}^{z}\frac{dz}{z}$ ist eine eindeutige Function seiner oberen Grenze z, wenn die Wege, welche von der unteren Grenze z_0 nach z führen, einen vom Nullpunkt zum Unendlichkeitspunkte führenden Schnitt nicht überschreiten; nur in dieser zerschnittenen Ebene sind die auf solchen Curven berechneten Integralwerthe stetig; in beliebiger Nähe des Verzweigungsschnittes unterscheiden sich die Werthe des Integrales um die constante Grösse $2i\pi$.

Die vieldeutige Function aber, welche durch das Integral geliefert wird, ist der im §. 82, 5 behandelte Logarithmus; denn $l(z)$ ist diejenige Function, deren Ableitung $\frac{1}{z}$ ist. Die Art, wie dort vermittelst beliebig vieler Blätter die Function zu einer eindeutigen gemacht ist, gilt auch für das Integral. Für jeden den Verzweigungsschnitt nicht überschreitenden Weg ist

$$\int\limits_{z_0}^{z}\frac{dz}{z} = l(z) - l(z_0), \quad \text{also insbesonders} \int\limits_{1}^{z}\frac{dz}{z} = l(z).$$

Aber indem man diese Gleichung schreibt, muss man beachten, dass nun links eine bestimmte Grösse, rechts dagegen noch eine vieldeutige steht. Welcher Werth rechts gehört zu einem bestimmten Wege? Eine bestimmte Art des Weges kann erst dadurch charakterisirt werden, dass man einen bestimmten Verzweigungsschnitt wählt, z. B. die positive Ordinatenaxe; (die positive Abscissenaxe wird deshalb nicht genommen, damit die untere Grenze $+1$ nicht auf dem Verzweigungsschnitte liegt, denn sonst müsste man die beiden Ufer unterscheiden).

Von 1 nach z gehen in demselben Blatte, heisst einen im übrigen beliebigen Weg nehmen, der diesen Schnitt nicht überschreitet. Von 1 nach z gehen und zugleich vom ersten ins $k+1^{\text{te}}$ Blatt gelangen, heisst einen beliebigen Weg nehmen, welcher diese Linie $k+k'$-mal in der Richtung von der rechten nach der linken Seite und k'-mal in umgekehrter durchschneidet; ins $-(k+1^{\text{te}})$ Blatt vom ersten kommen, heisst den Schnitt $k'+k$-mal von links nach rechts, und k'-mal von rechts nach links überschreiten.

Bleibt man im ersten Blatte, so kann man, falls z nicht im zweiten Quadranten ($x < 0$, $y > 0$) liegt, das Integral von 1 nach $z = x + iy$ insbesondere so führen, dass man zuerst von 1 parallel der Ordinatenaxe nach y und alsdann parallel der Abscissenaxe bis zum Werthe x geht.

Setzt man:

$$\int\limits_{1}^{z}\frac{dz}{z} = \int\limits_{1}^{x_0+iy_0}\frac{dx+idy}{x+iy} = \int\frac{(x-iy)\,dx}{x^2+y^2} + i\int\frac{(x-iy)\,dy}{x^2+y^2},$$

so ist (wie in §. 175, 4) das erste Integral der rechten Seite auf dem ersten Theil, des Integrationsweges Null, auf dem andern gleich

$$\int_1^{x_0} \frac{(x-iy_0)\,dx}{x^2+y_0^2} = \frac{1}{2}\,l(x_0^2+y_0^2) - \frac{1}{2}\,l(1+y_0^2) + i\left[\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0} - \operatorname{arctg} y_0\right],$$

oder gleich

$$= \frac{1}{2}\,l(x_0^2+y_0^2) - \frac{1}{2}\,l(1+y_0^2) + i\left[\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0} - \operatorname{arctg} y_0\right] - i\pi,$$

je nachdem x_0 positiv oder negativ ist; der arctg bedeutet hierbei immer einen Werth zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Denn im zweiten Falle wird $\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x}$, indem x durch Null hindurchgeht, stetig in den Werth $\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x} - \pi$ übergeführt.

Für das zweite Integral erhält man auf dem Integrationswege parallel der Ordinatenaxe:

$$i\int_0^{y_0} \frac{(1-iy)\,dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\,l(1+y_0^2) + i \operatorname{arctg} y_0.$$

Der arctg bedeutet hierbei immer einen Werth zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, also ist, im ersten Blatte, (falls nicht $y_0 > 0$, $x_0 < 0$)

$$\int_1^{z=x_0+iy_0} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\,l(x_0^2+y_0^2) + i \operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0} \cdot + 0 \text{ oder } -i\pi;$$

je nachdem $x_0 >$ oder < 0.

Für einen Punkt des zweiten Quadranten gehe man zuerst von $x = 1$ parallel der Ordinatenaxe nach dem Punkte $1 - iy_0$, von dort parallel der Abscissenaxe in den Punkt $x_0 - iy_0$, und schliesslich wieder parallel der Ordinatenaxe nach $x_0 + iy_0$; so wird

$$\int_1^{z} \frac{dz}{z} = \int_1^{x_0-iy_0} \frac{dz}{z} + \int_{x_0-iy_0}^{x_0+iy_0} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\,l(x_0^2+y_0^2) - i \operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0} - i\pi + \int_{x_0-iy_0}^{x_0+iy_0} \frac{dz}{z}.$$

Das letzte Integral ist aber gleich:

$$\int_{x_0-iy_0}^{x_0+iy_0} \frac{i\,dy}{x+iy} = i\int_{-y_0}^{+y_0} \frac{(x_0-iy)\,dy}{x_0^2+y^2} = 2i \operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0},$$

also ist für die Punkte des 2ten Quadranten

$$\int_1^{z} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\,l(x_0^2+y_0^2) + i \operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0} - i\pi.$$

Auf der rechten Seite der positiven Ordinatenaxe betragen die Werthe

des Integrales $\frac{1}{2}\, l\,(y_0{}^2) + i\,\frac{\pi}{2}$, auf der linken dagegen $\frac{1}{2}\, l(y_0{}^2) - \frac{3i\pi}{2}$; sie unterscheiden sich um $2i\pi$.

3. Das Integral einer complexen Potenzreihe.

Innerhalb des Kreises um den Punkt α, in welchem die complexe Potenzreihe

$$a_0 + a_1\,(z - \alpha) + a_2\,(z - \alpha)^2 + \cdots a_n\,(z - \alpha)^n + \cdots$$

convergirt, stellt sie eine eindeutige und stetige Function $f(z)$ dar, ohne singuläre Punkte; für jeden Punkt $z = Z$ im Innern des Convergenzkreises convergirt die Reihe unbedingt; und folglich convergirt sie auch gleichmässig; d. h. es lässt sich ein n angeben, von dem ab der Betrag des Restes kleiner bleibt als eine beliebige Zahl δ, für jeden Werth von z, der die Eigenschaft hat, dass abs $(z - \alpha) <$ abs$(Z - \alpha)$. Denn

$$\text{abs}\,[a_n\,(Z - \alpha)^n + a_{n+1}\,(Z - \alpha)^{n+1} + \cdots] < A_n R^n + A_{n+1} R^{n+1} + \cdots$$

wenn $A =$ abs a, $R =$ abs $(Z - \alpha)$ bedeutet.

Da aber die Reihe:

$$A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + \cdots$$

convergirt, so kann ein n angegeben werden, für welches die rechte Seite der obigen Ungleichung kleiner bleibt als δ; um so mehr wird also auch

$$\text{abs}\,[a_n\,(Z - \alpha)^n + a_{n+1}\,(Z - \alpha)^{n+1} \ldots] < A_n r^n + A_{n+1} r^{n+1} + \cdots < \delta$$

wenn abs $[Z - \alpha] = r < R$.

Daraus ergiebt sich der Satz:

Das Integral der complexen Potenzreihe hingeleitet vom Punkte z_0 bis zum Punkte Z, die beide im Innern des Convergenzkreises liegen, ist eine analytische Function und wird durch die Differenz der Potenzreihen für die Werthe z_0 und Z geliefert, welche aus der gegebenen durch gliedweise Integration hervorgehen:

$$\int_{z}^{Z} f(z)\,dz = \left[a_0\,(Z - \alpha) + \frac{a_1}{2}\,(Z - \alpha)^2 + \frac{a_2}{3}\,(Z - \alpha)^3 + \cdots\right] -$$

$$- \left[a_0 (z_0 - \alpha) + \frac{a_1}{2}\,(z_0 - \alpha)^2 + \frac{a_2}{3}\,(z_0 - \alpha)^3 + \ldots\right].$$

Insbesondere ist:

$$\int_{\alpha}^{Z} f(z)\,dz = a_0(Z - \alpha) + \frac{a_1}{2}(Z - \alpha)^2 + \frac{a_2}{3}(Z - \alpha)^3 + \cdots \frac{a_n}{n+1}(Z - \alpha)^{n+1} + \ldots$$

Der Convergenzkreis dieser neuen Reihe kann weder kleiner noch grösser sein als der der ursprünglichen. Wohl aber ist es möglich, dass diese zweite Reihe noch auf dem Kreise selbst (bedingt oder un-

bedingt) convergirt, während die ursprüngliche in den Punkten des Kreises divergirt. In diesem Falle stellt die Reihe auch für den Punkt des Convergenzkreises das Integral der Function $f(z)$ dar. Denn bezeichnet Z solch einen Punkt, so ist:

$$\int_\alpha^Z f(z)\,dz = \operatorname*{Lim}_{\delta=0}\int_\alpha^{Z-\delta} f(z)\,dz =$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\delta=0}\left[a_0(Z-\delta-\alpha)+\frac{a_1}{2}(Z-\delta-\alpha)^2+\frac{a_2}{3}(Z-\delta-\alpha)^3+\cdots\right].$$

Da eine Potenzreihe stetig bleibt, falls sie in den Punkten des Grenzkreises convergirt (§. 83), so geht die rechte Seite stetig in die Reihe:

$$a_0(Z-\alpha)+\frac{a_1}{2}(Z-\alpha)^2+\frac{a_2}{3}(Z-\alpha)^3+\cdots$$

über.

Ist das Convergenzgebiet der Reihe die unendliche Ebene, so wird der Werth des Integrales für noch so grosse Beträge von Z durch die Potenzreihe dargestellt. Für den Punkt $Z=\infty$ kann das Integral, wenn man darunter den Grenzwerth eines bestimmten Weges versteht, endlich bleiben, nur kann der Werth nicht mehr durch eine Potenzreihe ausgedrückt werden.

Letzteres ist z. B. der Fall bei dem Integrale $\int e^z\,dz$, welches für jeden endlichen Werth von Z den Werth erhält:

$$\int_0^Z e^z\,dz = \int_0^Z\left[1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\frac{z^n}{n!}+\cdots\right]dz =$$

$$= Z+\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^3}{3!}+\cdots\frac{Z^{n+1}}{\overline{n+1}!}+\cdots = e^z-1.$$

Führt man dieses Integral auf einem Wege ins Unendliche, auf welchem die Abscisse x negativ, die Ordinate y positiv beliebig wächst, so kann man diesen Process so vollziehen, dass man erst auf der Abscissenaxe den Integrationsweg bis $-a$, alsdann auf der Parallelen zur Ordinatenaxe den Weg b zurücklegt; a und b sollen schliesslich beliebig wachsen. Man denke sich z. B. als Integrationsweg die Parabel $y=x^2$, und betrachte den Punkt $z=-a+ia^2$, welcher auf der Parabel liegt. Das Integral, hinerstreckt bis zu diesem Punkte, erhält den Werth:

$$\int_0^z e^z\,dz = \int_0^{-a} e^x\,dx + i\int_0^{a^2} e^{-a+iy}\,dy =$$

$$= [e^{-a}-1]+e^{-a}[e^{ia^2}-1] = -1+e^{-a+ia^2}.$$

Convergirt a nach unendlich, so geht die rechte Seite über in den

Werth -1. Aber nur auf einem bestimmten Wege wird ein bestimmter Werth des Integrales erzielt.

Um das Verhalten des wesentlichen singulären Punktes bei der Integration überhaupt an diesem Beispiele zu erkennen, verlegen wir ihn durch die Substitution $z = \frac{1}{z'}$ in den Nullpunkt und betrachten das Integral

$$-\int e^{\frac{1}{z'}} \frac{1}{z'^2}\, dz' = -\int \left[\frac{1}{z'^2} + \frac{1}{1 z'^3} + \frac{1}{2!z'^4} + \frac{1}{3!z'^5} + \cdots \frac{1}{n!\, z'^{n+2}} + \cdots\right] dz'$$

geführt um den Nullpunkt in negativem Umlauf.

Wir haben hier eine Potenzreihe, die nach Potenzen der Variabelen $\frac{1}{z'}$ fortschreitet, und wollen daher zunächst allgemein den Satz beweisen:

Das Integral einer Reihe $F(z)$, welche nach Potenzen einer Function $f(z)$ fortschreitet, wird in einem Gebiete, in welchem die Reihe convergirt und $f(z)$ eine analytische Function ist, durch Integration der einzelnen Glieder erhalten.

Zu dem Zwecke hat man nachzuweisen, dass die Reihe

$$F(z) = a_0 + a_1 [f(z)] + a_2 [f(z)]^2 + \cdots a_n [f(z)]^n + \cdots$$

innerhalb ihres Convergenzgebietes gleichmässig convergirt. Man sieht ein: Convergirt die Reihe für einen bestimmten Werth von Z, so convergirt sie für jeden Werth von z, für welchen $\text{abs}\, f(z) < \text{abs}\, f(Z)$ ist, unbedingt. Denn indem die Reihe für $f(Z)$ convergirt (bedingt oder unbedingt), müssen die Glieder ihrem Betrage nach abnehmen, derart, dass für $A_n = \text{abs}\, [a_n]$, $R = \text{abs}\, [f(Z)]$

$$A_{n+1} R^{n+1} < A_n R^n \text{ und } \lim_{n=\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} R$$

höchstens gleich 1 wird.

Demnach ist

$$F(z) = a_0 + a_1 \frac{f(z)}{F(z)} F(z) + a_2 \left[\frac{f(z)}{F(z)}\right]^2 [F(z)]^2 + \cdots a_n \left[\frac{f(z)}{F(z)}\right]^n [F(z)]^n + \cdots$$

eine Reihe, welche unbedingt convergirt; denn es convergirt die Modulreihe:

$$A_0 + A_1 \frac{r}{R} \cdot R + A_2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 R^2 + \cdots A_n \left(\frac{r}{R}\right)^n R^n + \cdots,$$

weil

$$\lim \frac{A_{n+1}}{A_n} \cdot \frac{r}{R} \cdot R < 1. \qquad (\text{für } r < R).$$

So lange die Reihe unbedingt convergirt, convergirt sie aber auch gleichmässig; denn es bleibt für jeden Werth von z, $a_n f(z)^n + a_n f(z)^{n+1} + \cdots$ seinem Betrage nach kleiner als δ, falls man n so gross wählt, dass $A_n R^n + A_{n+1} R^{n+1} + \cdots < \delta$ ist und $R > \text{abs}\, f(z)$ ist. Folglich wird

$$\int_{z_0}^{z_1} F(z)\,dz = a_0\int_{z_0}^{z_1} dz + a_1\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz + a_2\int_{z_0}^{z_1} f(z)^2\,dz + \cdots a_n\int_{z_0}^{z_1} f(z)^n\,dz + \cdots$$

Die Integrale der rechten Seite sind, da $f(z)$ eindeutige analytische Functionen sein sollen, selbst analytische Functionen unabhängig vom Integrationswege.

Die vorstehende Reihe ist in ihrem Convergenzgebiete gleichmässig convergent.

Mit Hülfe dieses eingeschalteten Satzes wird das Integral

$$-\int\left[\frac{1}{z'^2} + \frac{1}{1}\frac{1}{z'^3} + \frac{1}{2!\,z'^4} + \cdots \frac{1}{n!}\frac{1}{z'^{n+2}} + \cdots\right] dz',$$

geführt um den Nullpunkt in negativem Umlaufe, da die Reihe für alle endlichen Werthe von z', die von Null verschieden sind, convergirt, durch die Substitution $z' = \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ erhalten:

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{\varrho^2}e^{-2i\varphi} + \frac{1}{1\,\varrho^3}e^{-3i\varphi} + \frac{1}{2!\,\varrho^4}e^{-4i\varphi} + \cdots \frac{1}{n!\,\varrho^{n+2}}e^{-(n+2)i\varphi}\right]\varrho\, i\, e^{+i\varphi}\,d\varphi = 0.$$

Der wesentlich singuläre Punkt der Exponentialfunction ist also kein Verzweigungspunkt der Integralfunction; wohl aber ist er selbst ein wesentlich singulärer; denn es wird:

$$-\int_a^z e^{\frac{1}{z'}}\frac{1}{z'^2}\,dz' = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots \frac{1}{n!\,z^n} + \cdots + C$$

eine Potenzreihe mit dem singulären Punkt $z = 0$.

Betrachtet man aber z. B. die Function $e^{\frac{1}{z}}$ oder auch $e^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z}$, so wird der wesentlich singuläre Punkt $z = 0$ zugleich ein Verzweigungspunkt des Integrales. Auch wenn man einen ausserwesentlichen singulären Punkt in der allgemeinen Form betrachtet:

$$f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^m}\,[a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots],$$

wobei die Potenzreihe in der Umgebung der Stelle α convergent sein soll, wird für $\int f(z)\,dz$ der Punkt α immer ein ausserwesentlicher singulärer bleiben (wenn $m > 1$), und zugleich ein Verzweigungspunkt sein, falls in dem Gliede $a_{m-1}(z-\alpha)^{m-1}$ der Coefficient a_{m-1} nicht verschwindet.

Die vorstehenden Beispiele lehren also, dass der Charakter eines singulären Punktes für das Integral nur insofern sich ändern kann, als derselbe möglicherweise zugleich ein Verzweigungspunkt wird.

Zweites Capitel.

Die Entwickelung der eindeutigen analytischen Functionen in Potenzreihen. Allgemeine Eigenschaften.

183. Die Definition der Functionen vermittelst der Rechnungsoperationen liess (mit Ausnahme der rationalen algebraischen), wie mehrfach hervorgehoben wurde, das Problem ihrer Berechnung doch noch ungelöst; für die reellen Functionen ergab sich als Lösung dieses Problemes der Taylor'sche Satz: Kennt man die Werthe einer irgendwie definirten Function und aller ihrer Ableitungen an einer Stelle, und weiss man, dass diese innerhalb eines Intervalles sämmtlich stetig sind, so kann der Werth der Function und aller ihrer Ableitungen vermittelst der Taylor'schen Potenzreihe für jede Stelle des Intervalles berechnet werden, vorausgesetzt, dass diese Reihe convergirt.

Nunmehr handelt es sich um die Berechnung einer Function in einem complexen Gebiet; dieselbe wird, wie die folgenden Untersuchungen zeigen sollen, durch folgenden einfachen Satz geleistet:

Kennt man von einer irgendwie definirten Function den Werth der Function und aller ihrer Ableitungen an einer Stelle, und weiss man, dass die Function innerhalb eines endlichen einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes eine analytische Function, also eindeutig stetig und mit einer bestimmten endlichen ersten Ableitung begabt ist, so convergirt die Taylor'sche Reihe um diese Stelle innerhalb eines Kreises, der von dem Gebiete umschlossen ist. Um jede Stelle im Gebiete lässt sich solch eine Reihenentwickelung angeben, und die Berechnung der Function und aller ihrer Ableitungen wird für jeden Werth der Variabelen auf diese Weise geleistet.

Während also bei der Beschränkung auf das reelle Intervall die Stetigkeit der Ableitungen und die Convergenz der Taylor'schen Reihe noch zu den Voraussetzungen gehörten, die für die Lösbarkeit des Problemes bewiesen werden mussten, erscheint hier einfach der Charakter der analytischen Function als die hinreichende Voraussetzung, so dass man den Satz auch in der prägnanten Form aussprechen kann:

Jede in einem zusammenhängenden Gebiete ausnahmslos analytische Function ist für die Umgebung jeder Stelle durch eine nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende Reihe darstellbar.

Damit gewinnen diese Potenzreihen, die in den Untersuchungen bisher auch immer besonders berücksichtigt wurden, ihre fundamentale Bedeutung. Sie liefern nicht nur die einfachste Weise eine Function, die nicht eine rationale algebraische ist, zu berechnen, sondern sie definiren überhaupt alle stetigen Functionen einer complexen Variabelen mit bestimmter erster Ableitung.

Der Weg, auf dem man zur Erkenntniss des Satzes gelangt, ist durch Cauchy vorgezeichnet.

184. Ist in einem einfach zusammenhängenden Gebiete (einschliesslich der Begrenzung) $f(z)$ ausnahmslos eine analytische Function, und bedeutet $t=u+iv$ eine im Innern gelegene Stelle, so ist der Quotient

$$\frac{f(z)}{z-t}$$

im Gebiete ebenfalls eine analytische Function, nur die eine Stelle $z=t$ ist eine ausserwesentlich singuläre. Umgiebt man t mit einem beliebig kleinen Kreise vom Radius ϱ, so entsteht ein durch zwei Curven begrenztes Gebiet, in welchem der obige Quotient ausnahmslos analytisch ist. Integrirt man den Quotienten sowohl auf der äusseren Begrenzungscurve als auf dem Kreise ϱ, indem bei der Integrationsbewegung die Ringfläche zur Linken bleibt, so ist die Summe dieser beiden Integrale Null. (§. 181.)

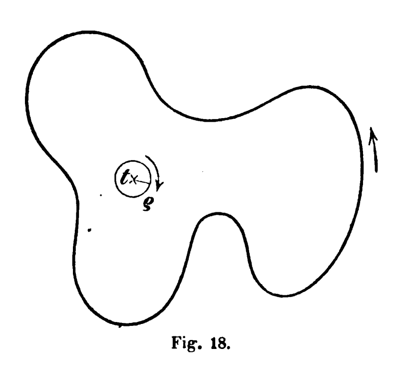


Fig. 18.

Den Werth des Integrales, geführt um den beliebig kleinen Kreis mit dem Radius ϱ in negativem Umlauf, d. h. so, dass das Innere des Kreises rechts bleibt, ermittelt man wie folgt: Für einen Punkt auf der Peripherie dieses Kreises ist

$$z-t=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\varrho e^{i\varphi},\quad dz=\varrho i e^{i\varphi}d\varphi=\varrho i(\cos\varphi+i\sin\varphi)d\varphi,$$

also wird:

$$\int\frac{f(z)}{z-t}\,dz=-i\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}f(t+\varrho e^{i\varphi})d\varphi.$$

Die Function f ist in der Umgebung der Stelle $z=t$ stetig. Es lässt sich also ϱ so klein wählen, dass die Differenz der Werthe $f(t)$ und $f(t+\varrho e^{i\varphi})$ bei allen Werthen von φ kleiner bleibt als eine Zahl δ, deren Modul beliebig klein ist. Demnach unterscheidet sich auch

$$i\int\limits_0^{2\pi}f(t+\varrho e^{i\varphi})d\varphi\quad\text{und}\quad i\int\limits_0^{2\pi}f(t)d\varphi=2i\pi f(t)$$

von einander um eine Grösse, deren Modul kleiner ist als der Modul der beliebig kleinen Zahl $2\pi\delta$; d. h.

$$i\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}f(t+\varrho e^{i\varphi})\,d\varphi$$

ist unabhängig vom Werthe ϱ gleich $2i\pi f(t)$.

Es besteht mithin für das Integral geführt um die äussere Begrenzung (und überhaupt auf jeder den Punkt t umschliessenden Curve), in positivem Umlauf die Gleichung:

$$\text{I.}\qquad \int\frac{f(z)}{z-t}\,dz - 2i\pi f(t) = 0 \quad\text{oder}\quad f(t) = \frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)}{z-t}\,dz.$$

Diese Gleichung besagt: Kennt man die Werthe der Function $f(z)$ längs einer geschlossenen Curve, und weiss man, dass die Function innerhalb dieser Curve ausnahmslos analytisch ist, so kann man den Werth von $f(z)$ für jede im Inneren gelegene Stelle t durch ein bestimmtes Integral ermitteln*).

185. Dass die Function $f(z)$ allenthalben im Inneren und auf dem Rande eine erste Ableitung besitzt, bildete die Voraussetzung; in der That kann man nun auch leicht diese erste Ableitung vermittelst eines bestimmten Integrales ausdrücken. Denn es wird:

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2i\pi}\int f(z)\cdot\frac{dz}{(z-t-\Delta t)(z-t)}.$$

Convergirt Δt nach Null, so erhält man, da auch die rechte Seite eine stetige Function von Δt ist, die Gleichung:

$$\text{II.}\qquad f'(t) = \frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)}{(z-t)^2}\,dz,$$

wobei das Integral auf jedem beliebigen Wege um t geführt werden kann, der innerhalb des anfangs definirten Gebietes bleibt. Daraus folgt aber weiter, dass die Ableitung $f'(t)$ allenthalben im I n n e r e n selbst eine analytische Function ist; denn es wird:

$$\frac{f'(t+\Delta t)-f'(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2i\pi}\int f(z)\,\frac{2(z-t)-\Delta t}{(z-t-\Delta t)^2(z-t)^2}\,dz,$$

also

$$\text{III.}\qquad f''(t) = \frac{2!}{2i\pi}\int\frac{f(z)}{(z-t)^3}\,dz.$$

In gleicher Weise ergeben sich alle höheren successiven Ableitungen der Function für jede im Inneren des Gebietes gelegene Stelle und es wird:

$$\text{IV.}\qquad f^n(t) = \frac{n!}{2i\pi}\int\frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}}\,dz.$$

---

*) Dieser Satz ist keineswegs so zu verstehen, dass man die Werthe der Function $f(z)$ längs der Begrenzung willkürlich annehmen und nun vermittelst der Gleichung I. den Werth für jede Stelle im Inneren berechnen kann. Es müssen vielmehr die Functionswerthe an der Begrenzung, wie man sich leicht überlegt, bereits Bedingungen genügen, damit eine analytische Function für das Innere zu Stande kommt. Die Untersuchungen über diese Frage — Definition einer Function durch Grenz- und Stetigkeitsbedingungen — fasst man unter dem Namen das Dirichlet'sche Princip zusammen.

Eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiete analytische Function ist also nicht nur nebst ihrer ersten Ableitung endlich und stetig, sondern sie behält auch für jeden Punkt im Inneren des Gebietes höhere Ableitungen, und diese alle, wie viele man auch bilden mag, sind analytische Functionen.

186. Aus der Gleichung I. folgt aber auch die Entwickelung der Function $f(t)$ in eine Potenzreihe.

Ein im übrigen beliebiger Punkt a werde so gewählt, dass der grösstmögliche Kreis, welchen man um a beschreiben kann, ohne die Randcurve des Gebietes zu überschreiten, den Punkt t, für welchen die Functionswerthe berechnet werden sollen, umfasst. Diesen Kreis wähle man zur Integrationscurve der Gleichung I., so ist für jeden Punkt z auf der Peripherie des Kreises

$$\text{abs}\,[t-a] < \text{abs}\,[z-a].$$

Demnach ist

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{t-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a}\left[1+\frac{t-a}{z-a}+\frac{(t-a)^2}{(z-a)^2}+\cdots\frac{(t-a)^n}{(z-a)^n}\cdots\right]$$

eine convergente Reihe. Nach dem in §. 182, 3 bewiesenen Hülfsatze wird also

$$\int\frac{f(z)}{z-t}\,dz = \int\frac{f(z)}{z-a}\,dz + (t-a)\int\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz +$$
$$+ (t-a)^2\int\frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz + \cdots (t-a)^n\int\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\cdots$$

und man erhält die Gleichung:

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi}\left[\int\frac{f(z)}{z-a}\,dz + (t-a)\int\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz +\right.$$
$$\left.+ (t-a)^2\int\frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz\cdots(t-a)^n\int\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\cdots\right],$$

die man zufolge der Gleichungen I. bis IV. auch in der Form schreiben kann:

$$\text{V.}\qquad f(t) = f(a) + (t-a)f'(a) + \frac{(t-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots\frac{(t-a)^n}{n!}f^n(a)\cdots$$

Diese Potenzreihe convergirt sicher und zwar unbedingt, für alle Werthe von t, welche innerhalb des um den Punkt a beschriebenen Kreises, der über die Randcurven des ursprünglichen Gebietes nicht hinausgeht, gelegen sind. Sie ist die Taylor'sche Entwickelung für eine complexe Function.

Der Inhalt der Gleichung V. kann in die Worte gefasst werden:

Kennt man den Werth einer Function und aller ihrer Ableitungen an einer Stelle, und weiss man, dass die Function innerhalb eines den Punkt a umschliessenden Kreises analytisch ist, so wird der Werth der

Function für jeden Punkt im Inneren dieses Kreises durch die Potenzreihe V. *berechnet,*
oder: Eine nebst allen ihren Ableitungen an einer Stelle bekannte Function ist in der Umgebung dieser Stelle nur dann analytisch, wenn sich ein Kreis von beliebig kleinem aber endlichem Radius angeben lässt, innerhalb welchem die Reihe V. convergirt.

Die Reihe V. wird im allgemeinen nicht für alle Werthe t convergiren, die innerhalb des anfänglich angenommenen Bereiches liegen, in welchem $f(z)$ als analytisch vorausgesetzt wurde. Man kann aber den Mittelpunkt a so variiren, dass man zu einem Kreise und damit zu einer Reihenentwickelung gelangt, welcher den verlangten Punkt umfasst. Denn ist dieser Punkt t von den Grenzen des Kreises um eine endliche (übrigens noch so kleine) Grösse entfernt, so ziehe man vom Punkte a bis t eine beliebige Curve, die stets in endlicher Entfernung von den Randcurven bleibt. Der Kreis um den Punkt a wird diese Curve in einem Punkte a' zwischen a und t treffen. Für einen auf der Curve und im Inneren des Kreises beliebig nahe zu a' gelegenen Punkt kann man aus der Reihe V. die Function f und beliebig viele Ableitungen berechnen; und sonach denselben zum Mittelpunkte einer neuen Reihenentwickelung mit lauter bekannten Coefficienten machen. Der neue Convergenzkreis schneidet in einem Punkte a'', der bereits sicherlich näher bei t liegt; und die Fortsetzung dieses Processes muss schliesslich, da die Radien unter eine angebbare endliche Grösse nicht herabgehen können (weil sich der Weg $a a' a'' \dots t$ in angebbarer Entfernung von den Randcurven hält), zu einem Kreise führen, der den Punkt t umfasst.

Dieses Verfahren kann auch dazu dienen, um eine nur durch eine Potenzreihe definirte analytische Function ausserhalb des Convergenzkreises fortzusetzen in ein Gebiet, welches keinen singulären Punkt umschliesst. (§. 87.)

Jede Potenzreihe definirt die Function für ein bestimmtes kreisförmiges Convergenzgebiet und heisst ein Functionselement. Man erhält je nach Wahl des Mittelpunktes der Potenzentwickelung verschiedene Functionselemente, und auch dieselbe Stelle des Argumentes gehört verschiedenen Functionselementen an. Ist aber die Function eindeutig, so müssen die verschiedenen Elemente für dieselbe Stelle auch denselben Werth liefern. Kommt man bei dieser Fortsetzung der Function aus einem irgendwie begrenzten (einfach oder mehrfach) zusammenhängenden Gebiete nicht heraus, so ist die Function nur für dieses Gebiet vorhanden.

Zwei oder mehrere innerhalb gegebener Gebiete irgendwie definirte analytische Functionen der complexen Veränderlichen sind nur dann als zu der nämlichen Function gehörig zu betrachten, wenn sich die Functionselemente der einen aus denen der anderen ableiten lassen.

In diesem Sinne ist eine analytische Function vollkommen bestimmt, wenn man die Werthe der Function und aller ihrer Ableitungen an einer Stelle kennt, oder was dasselbe bedeutet, wenn die Functionswerthe längs einer noch so kleinen Linie gegeben sind. Denn alsdann lassen sich die Ableitungen bestimmen. Functionen, welche nicht in diesem Zusammenhange stehen, sind als von einander unabhängig zu betrachten*).

187. Weiss man von einer Function, dass sie an gewissen Stellen der Ebene $c_1, c_2 \ldots$ die Eigenschaft einer eindeutigen analytischen Function verliert, und will man dieselbe in der Umgebung einer Stelle a in eine Potenzreihe entwickeln, so wird der Radius des Convergenzkreises nur so gross sein dürfen, dass einer der Punkte c oder auch mehrere auf der Peripherie, keiner aber im Inneren des Kreises liegt. Denn die Potenzreihe ist im ganzen Kreise eine eindeutige analytische Function, während die Function der Voraussetzung zufolge in den Punkten c diese Eigenschaft verliert.

Man ist also, sobald man die Eigenschaften einer Function kennt, im Stande die Grösse der Convergenzgebiete für die Potenzreihen von vornherein anzugeben. Es soll dies an den bisherigen Functionen erläutert werden.

I. Von der Exponentialfunction $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ ist bekannt, dass sie in der ganzen Ebene (für jeden endlichen Werth von $x + iy$) analytisch ist. Es existirt um jeden Punkt a eine Reihenentwickelung mit beliebig grossem Radius, dieselbe ist

$$e^z = e^a \left[1 + \frac{z-a}{1} + \frac{(z-a)^2}{2!} \cdots \right].$$

II. Die Function $l(z)$, welche als Umkehr der Exponentialfunction definirt wurde, ist eine vieldeutige Function von z. Eindeutig lässt sie sich den Punkten einer Windungsfläche mit unendlich vielen Blättern zuordnen, die längs Verzweigungsschnitten vom Punkte 0 nach ∞ zusammenhängen. Beschreibt man um einen (in irgend einem Blatte gelegenen) Punkt a einen Kreis, welcher den Nullpunkt umfasst, so ist innerhalb dieses Gebietes der Logarithmus keine eindeutige analytische Function; auch ist das Gebiet selbst nach der Vorstellung, die wir uns über die Windungsfläche gebildet haben, kein geschlossenes; denn die Kreisperipherie überschreitet den Verzweigungsschnitt in einer ungeraden Anzahl und man gelangt nicht in den Anfangspunkt zurück, sondern in ein anderes Blatt. Beschreibt man dagegen um den Punkt a einen Kreis, der allenfalls durch den Verzweigungspunkt hindurch-

*) Hankel, Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen, S. 44 ff. 49 ff. Weierstrass: Monatsberichte der Berliner Akademie. 1870 August.

geht, so ist innerhalb dieses Kreises die Function durchaus analytisch, und der Kreis selbst, wiewohl ein Theil desselben in ein anderes Blatt fallen kann, geschlossen. Die Function $l(z)$ muss sich also in eine Reihe nach Potenzen von $z - a$ darstellen lassen, und diese Reihe lautet, weil die Ableitungen bezüglich $\frac{1}{z}, \frac{-1}{z^2}, \frac{2!}{z^3}, \frac{-3!}{z^4}$ u.s.w. sind:

$$l(z) = l(a) + \frac{z-a}{a} - \frac{(z-a)^2}{2a^2} + \frac{(z-a)^3}{3a^3} - \frac{(z-a)^4}{4a^4} \pm \cdots (\text{abs}(z-a) < \text{abs}\, a).$$

Durch die Reihe wird derjenige Werth des Logarithmus dargestellt, welcher durch continuirliche Aenderung des für $l(a)$ angenommenen Werthes hervorgeht, auf jedem Wege, der in das Innere des Convergenzkreises fällt. Setzt man die Function $l(z)$ über den Convergenzkreis hinaus fort, indem man einen neuen Punkt a', der im Inneren des früheren Kreises liegt, zum Mittelpunkte der Entwickelung

$$l(z) = l(a') + \frac{z-a'}{a'} - \frac{(z-a')^2}{2a'^2} + \frac{(z-a')^3}{3a'^3} + \cdots (\text{abs}\, z - a' < \text{abs}\, a')$$

macht, so kann man für jeden Punkt der Ebene den zugehörigen Logarithmus berechnen, und zwar erhält man denjenigen Werth, welcher in demselben Blatte wie $l(a)$ liegt, wenn man den Punkt a und z durch eine Curve verbindet, welche den Verzweigungsschnitt nicht überschreitet, und nun successive Punkte dieser Curve zu Mittelpunkten der Entwickelung wählt, bis man zu einem Kreise gelangt, welcher den Punkt z umfasst, und bei welchem die vom Mittelpunkte nach z gezogene Curve durch den Verzweigungsschnitt nicht zerschnitten wird.

III. Das Binom $(1 + z)^n$ wird, wenn n eine rational gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$ ist, eine q-deutige Function, deren Verzweigungspunkte $z = -1$ und $z = \infty$ sind. Durch eine Fläche von q Blättern, welche längs eines von -1 nach ∞ geführten Verzweigungsschnittes zusammenhängen, ist die Function als eindeutige Function von z dargestellt. Wählt man einen beliebigen Punkt a, indem man zugleich ein Blatt fixirt, zum Mittelpunkte einer Reihenentwickelung, so convergirt dieselbe innerhalb eines Kreises, der höchstens durch den Verzweigungspunkt $z = -1$ geht, denselben aber nicht umfasst; es wird:

$$(1+z)^n = (1+a)^n + \frac{n}{1}(z-a)(1+a)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}(z-a)^2(1+a)^{n-2} +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(z-a)^3(1+a)^{n-3} + \cdots \text{abs}(z-a) < \text{abs}(-1-a).$$

Durch diese Reihe wird derjenige Werth der Wurzel an der Stelle z dargestellt, welcher aus dem für $(1 + a)^n$ angenommenen auf jedem Wege, welcher in das Innere des Convergenzkreises fällt, durch continuirliche Aenderung hervorgeht. Ist a insbesondere der Nullpunkt, und wählt man für 1^n den einfachen Werth 1, so ist

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1} z + \frac{n(n-1)}{2!} z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} z^3 \cdots \text{ (abs } z < 1).$$

Ist der Exponent n eine complexe Zahl, so bleibt diese Reihe unverändert bestehen; es ist dann

$$(1+z)^n = e^{n\,l(1+z)}$$

eine unendlich vieldeutige Function; wählt man für $z = 0$ den Werth 1, so stellt die obige Reihe denjenigen Werth von $e^{n\,l(1+z)}$ dar, welcher aus der Zahl 0 durch continuirliche Aenderung hervorgeht, wenn sich der Punkt z z. B. auf einem vom Nullpunkte ausgehenden Radius bewegt. Man kann diesen Werth in der Form

$$e^{n\left(\frac{1}{2} l[(1+x)^2+y^2] + i \operatorname{arctg} \frac{y}{1+x}\right)}$$

eindeutig fixiren; unter arctg eine zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegende Grösse verstanden.

188. Von der impliciten algebraischen Function w, welche durch die Gleichung $f(z^m, w^n) = 0$ definirt ist, wurde im zweiten Buche Capitel 4 nachgewiesen, dass sie eine n-deutige Function mit einer gewissen endlichen Anzahl von kritischen Punkten und ausserwesentlichen singulären Punkten ist. Kritisch heissen dabei zunächst alle diejenigen Punkte z, für welche auch $\frac{\partial f(z,w)}{\partial w}$ gleich Null wird; weil hier der zugehörige Werth von w eine mehrfache Wurzel ist. In der Umgebung jedes anderen regulären Punktes ist jeder Zweig von w eine analytische Function, und folglich muss sich um jeden regulären Punkt a eine Reihenentwickelung angeben lassen, deren Convergenzradius jedenfalls so gross ist, dass keiner der singulären oder der kritischen Punkte von diesem Kreise umschlossen wird. Bezeichnet man mit $w_a{}^1$ einen der zum Punkte a gehörigen Werthe, der für diesen Punkt ein einfacher Werth sein muss, so lautet die Reihenentwickelung

$$w = w_a{}^1 + (z-a)\left(\frac{dw}{dz}\right)_{a,w_a{}^1} + \frac{(z-a)^2}{2!}\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)_{a,w_a{}^1} + \cdots \frac{(z-a)^n}{n!}\left(\frac{d^nw}{dz^n}\right)_{a,w_a{}^1} + \cdots,$$

wobei mit $\left(\frac{d^nw}{dz^n}\right)_{a,w_a{}^1}$ der Werth der n^{ten} Ableitung, gebildet an der Stelle $z = a$, $w = w_a{}^1$ bezeichnet ist. Man kennt von dieser Reihe einen Convergenzkreis, wenn man sämmtliche singuläre und kritische Punkte vorausbestimmt hat.

Es handelt sich nur darum, die n^{te} Ableitung zu finden. Im §. 94 ist gezeigt worden, wie man die erste Ableitung der impliciten Function berechnet:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial w}$$

und dass diese erste Ableitung für jeden regulären Punkt einen end-

lichen bestimmten Werth hat, weil hier $\frac{\partial f}{\partial w}$ von Null verschieden ist. Alle höheren Ableitungen ergeben sich aus dieser durch successive Differentiation: die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial w}$ sind selbst wieder algebraische Ausdrücke in z und w, und folglich solange w eine eindeutige analytische Function von z ist, selbst wieder eindeutige analytische Functionen von z. Also ist auch der Quotient eine analytische Function von z, und es wird nach der nämlichen Differentiationsregel erhalten:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial w}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z}\frac{dw}{dz}\right) - \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\frac{dw}{dz}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2}.$$

Es gilt hier der Satz von der Vertauschung der Differentiationsordnung, denn die algebraischen Functionen $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w}, \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z}$ sind stetige Functionen der Variabelen z und w; setzt man also für $\frac{dw}{dz}$ seinen Werth ein, so folgt:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^3}.$$

Man hat dann in dem Ausdrucke rechts für z den Werth a, für w den Werth $w_a{}^1$ zu substituiren.

Die successive Differentiation dieses Quotienten, die keine schwierige Rechnung ist, aber zu grösseren Formeln führt, liefert der Ableitungen, so viele man bilden will. Wesentlich ist, dass in allen diesen Formeln nur die Grösse $\frac{\partial f}{\partial w}$ im Nenner auftritt, welche nicht verschwindet, solange man sich in einem Gebiete von regulären Punkten befindet, so dass sämmtliche Ableitungen endliche und bestimmte Werthe erhalten, da auch die Punkte ausgeschlossen sind, in denen w unendlich wird.

Wiewohl hiermit auf den wesentlichen Punkt der zur Berechnung der Ableitungen dienenden Gleichungen hingewiesen ist, so ist es doch für eine spätere Verwerthung der Formeln wichtig, einige abgekürzte Bezeichnungen einzuführen, durch welche man eine gewisse Uebersicht über die zu bildenden Gleichungen gewinnt*). Man bezeichne den Differentialquotienten $\frac{d^k w}{dz^k}$ mit w_k, ferner die partielle Ableitung $\frac{\partial^k f(z,w)}{\partial z^{k-p}\,\partial w^p}$ mit $f_{k-p,p}$ und setze:

---

*) Plücker: Theorie der algebraischen Curven. Bonn 1839, S. 156. Liouville: Mémoire sur quelques propositions générales de géométrie et sur la théorie de l'élimination dans les équations algébriques. Journal de math. T. VI.

$$\frac{1}{k!}\sum_{p=0}^{p=k} k_p f_{k-p,p} w_1{}^p = .\Phi_k,$$

so besteht für das Verhältniss $\frac{w - w_a}{z-a} = w_1$, welches für $z = a$ in die Ableitung $\frac{dw}{dz}$ übergeht, die nach Potenzen von z geordnete Gleichung:

$$0 = \Phi_1 + (z-a)\Phi_2 + (z-a)^2\Phi_3 + \cdots,$$

welche, je nachdem m grösser oder kleiner ist als n, mit dem Gliede $(z-a)^m$ oder $(z-a)^n$ abschliesst.

Aus der Gleichung $w - w_a = w_1(z-a)$ geht hervor, dass

$$\frac{d^k w}{dz^k} = (z-a)\frac{d^k w_1}{dz^k} + k\frac{d^{k-1}w_1}{dz^{k-1}};$$

es besteht also für $z = a$ die Relation $\left(\frac{d^k w}{dz^k}\right)_a = k\frac{d^{k-1}w_1}{dz^{k-1}}$. Mithin werden die höheren Ableitungen w_2, w_3 . . . u. s. f. erhalten, indem man die obige Gleichung total nach z differentiirt, und in den abgeleiteten Gleichungen $z = a$, $\frac{d^{k-1}w_1}{dz^{k-1}} = \frac{1}{k}\cdot w_k$ setzt. Um die Recursionsformel für die k^{te} Ableitung zu erhalten, sind in der Gleichung nur die Glieder bis zur Potenz $(z-a)^{k-1}$ zu berücksichtigen. Für die ersten Werthe von k erhält man die Gleichungen:

$$\Phi_1 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_1}w_2 + \Phi_2 = 0,$$

$$\frac{1}{3!}\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_1}w_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial w_1}w_2 + \Phi_3 = 0,$$

$$\frac{1}{4!}\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_1}w_4 + \frac{1}{3!}\frac{\partial\Phi_2}{\partial w_1}w_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial w_1^2}\left(\frac{w_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_3}{\partial w_1}w_2 + \Phi_4 = 0,$$

$$\frac{1}{5!}\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_1}w_5 + \frac{1}{4!}\frac{\partial\Phi_2}{\partial w_1}w_4 + \frac{1}{3!2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial w_1^2}w_2 w_3 + \frac{1}{3!}\frac{\partial\Phi_3}{\partial w_1}w_3 +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial w_1^2}\left(\frac{w_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_4}{\partial w_1}w_2 + \Phi_5 = 0.$$

. . . .

Man erkennt auch in dieser Form, dass für den regulären Punkt, in welchem $\frac{\partial\Phi}{\partial w_1} = f_{0,1} = \frac{\partial f}{\partial w}$ nicht verschwindet, sämmtliche Differentialquotienten, wie viele man auch bilden mag, endlich bleiben.

Wir kehren zu dem Hauptresultate der Untersuchung der algebraischen Function im regulären Punkte zurück, und formuliren dasselbe in dem Satze:

Kennt man von einer gegebenen algebraischen Function $f(z^m, w^n) = 0$

einen einzigen Werth von w an einer regulären Stelle $z = a$, so kann man den zu irgend einer anderen Stelle z, welche innerhalb des regulären Gebietes um a liegt, zugehörigen Functionswerth berechnen, indem man durch eine bestimmte Folge von ausführbaren Rechnungsoperationen beliebig viele Glieder der Potenzreihe entwickelt.

Vollständiger noch kann man den Satz so fassen: *Kennt man von einer gegebenen algebraischen Function $f(z^m, w^n) = 0$ sämmtliche kritische und singuläre Stellen und ausserdem an einer regulären Stelle einen Functionswerth, so kann man durch eine bestimmte Folge von endlichen Rechnungsoperationen die n-deutige Function vermittelst Verzweigungsschnitten in n Zweige zerlegen, von denen jeder nur längs den Verzweigungsschnitten unstetig ist und in ausserwesentlichen singulären Punkten unendlich wird; und zu jeder beliebigen Stelle können die Werthe sämmtlicher Zweige vermittelst beliebig vieler Glieder einer Potenzreihe berechnet werden.*

Dieser Satz wird vermittelst der in den vorigen Beispielen wiederholt besprochenen Methode der stetigen Fortsetzung einer Function über ihren Convergenzkreis hinaus erkannt. Den zu a gegebenen Functionswerth bezeichne man als dem ersten Blatte zugehörig. Vom Punkte a ziehe man Curven bis in beliebige Nähe jedes kritischen Punktes, die in endlicher Entfernung von jedem anderen kritischen Punkte verlaufen, und umschliesse den betreffenden Punkt mit einem beliebig kleinen Kreise. Solch eine Curve mit dem kleinen Kreise nennt man eine Schleife. Man kann durch Reihenentwickelung feststellen, ob das Durchlaufen der ganzen Schleife eine Aenderung des zu a gehörigen Functionswerthes herbeiführt; wenn dieses nicht der Fall ist, so ist der Punkt kein Verzweigungspunkt für das erste Blatt; wenn es der Fall ist, so stelle man durch wiederholte Reihenentwickelung, indem man den neuen für die Stelle $z = a$ gefundenen Werth benutzt, fest, wie viele Blätter im Punkte mit dem ersten zusammenhängen. Heissen dieselben $1, 2 \ldots p$, so kann für jedes dieser Blätter die Bedeutung jedes anderen kritischen Punktes vermittelst der Schleifen bestimmt werden. Dabei wird man in einem anderen Verzweigungspunkte auch den Werth eines neuen Blattes für $z = a$ kennen lernen, der unter den Werthen $1, 2 \ldots p$ noch nicht vorhanden war.

Sollte der Fall eintreten, dass das Umlaufen aller Schleifen aus den Blättern 1 bis p nicht herausführt (oder allgemeiner, dass man bei diesem Processe nicht alle n Werthe, welche zu $z = a$ gehören, erhält), so bedeutet das, wie später (§. 195) bewiesen werden soll, dass die algebraische Function $f(z^m, w^n) = 0$ sich in Factoren zerlegen lässt, welche in Bezug auf z und w rational sind. Bei einer irreducibelen Function kommt dieses nicht vor, und für sie gilt der ausgesprochene Satz.

189. Nachdem festgestellt ist, dass die analytischen Functionen durch Potenzreihen ausdrückbar sind, ist noch die Discussion der singulären Punkte derselben nothwendig, um zu ermitteln, wie sich die analytischen Functionen je nach der Beschaffenheit der singulären Punkte in der Umgebung derselben entwickeln lassen.

Man muss allem zuvor erkennen, dass eine in einem Gebiete im allgemeinen eindeutige analytische Function keine anderen Singularitäten haben kann, als die ausserwesentlichen und wesentlichen, in denen sie unendlich wird.

Denn ist $f(z)$ eine analytische Function, welche in einzelnen Punkten α eines Gebietes endliche Discontinuitäten erleidet, so ist $(z-\alpha)f(z)$ in der Umgebung der Stelle α eine analytische Function, einschliesslich der Stelle α an welcher sie Null, und ihre erste Ableitung gleich $\operatorname{Lim} f(z)$ für $z=\alpha$ ist. Demnach besteht eine Reihenentwickelung von der Form:

$$(z-\alpha)f(z) = \operatorname*{Lim}_{z=\alpha} f(z)\,.\,(z-\alpha) + a_2\,(z-\alpha)^2 + a_3\,(z-\alpha)^3 + \cdots$$

Ertheilt man also der Function $f(z)$ an der Stelle α den Werth $\operatorname*{Lim}_{z=\alpha} f(z)$, so ist diese Stelle eine reguläre.

Desgleichen ist es nicht möglich (siehe §. 181, 4), dass eine analytische Function in einem Gebiet in einzelnen Punkten oder längs einer ganzen Curve dadurch eine Singularität bekommt, dass sie zwar selbst endlich und stetig bleibt, ihre partiellen Ableitungen aber nicht mehr der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ genügen. Alsdann wäre $\int f(z)\,dz$ auch hingeleitet bis in irgend einen Punkt α der irregulären Curve eine analytische Function; denn das Integral ist stetig und seine Ableitung wird $\operatorname{Lim} f(z)$ für $z=\alpha$. Die analytische Function besitzt aber, wie bewiesen wurde, beliebig viele Ableitungen, und alle diese sind selbst wieder stetige Functionen. Es muss also $f(z)$ eine bestimmte Ableitung auch an der Stelle α haben, und sonach muss die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ erfüllt sein.

Es sind also nur die wesentlichen und ausserwesentlichen Punkte zu betrachten und diese sind auch wie sich zeigen wird singulär für alle Ableitungen.

Es sei ein um den Punkt α mit dem Radius R beschriebener Kreis gegeben. Man wisse, dass eine Function $f(z)$ im Punkte α regulär und innerhalb des ganzen Gebiets einschliesslich der Grenzen analytisch ist, mit Ausnahme der im Kreise gelegenen Punkte $c_1, c_2 \ldots c_n$, welche singuläre Punkte (wesentliche oder ausserwesentliche) sein sollen. Beschreibt man um den Punkt α einen Kreis, welcher die Punkte c sämmtlich ausschliesst, so lässt sich innerhalb dieses kleineren Kreises

eine nach ganzen positiven Potenzen von $z - \alpha$ fortschreitende Reihe angeben, deren Coefficienten die Ableitungen an der Stelle α sind. Es soll nun aber gezeigt werden, dass auch eine für das ganze Gebiet mit dem Radius R gültige Reihenentwickelung existirt, welche freilich nicht mehr blos ganze positive Potenzen von z enthält, und deren Coefficienten nicht mehr die Ableitungen an der Stelle α sind, welche aber für jeden Punkt z im Inneren des Kreises R die Berechnung der Function liefert, ohne dass also, wie im ersten Falle, Fortsetzungen der Potenzreihen nöthig werden.

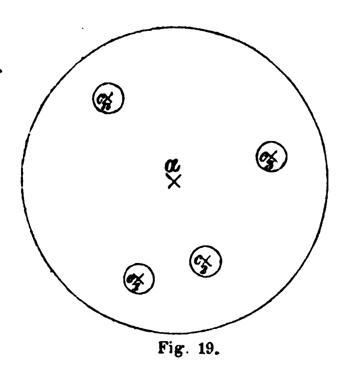


Fig. 19.

Man umschliesse die Punkte $c_1, c_2 \ldots c_n$ mit Kreisen von beliebig kleinem Radius ϱ; so ist innerhalb der zwar eindeutigen, aber mehrfach zusammenhängenden Fläche $f(z)$ eine analytische Function; und die Summe der Integrale, geführt um den Kreis α, und um die Kreise $c_1, c_2 \ldots c_n$, so dass die Fläche zur linken bleibt, ist Null. Man kann dies ausdrücken durch die Gleichung

$$\int_{(\alpha)} f(z)\,dz = \int_{(c_1)} f(z)\,dz + \int_{(c_2)} f(z)\,dz \cdots + \int_{(c_n)} f(z)\,dz,$$

wobei dann die rechts stehenden Integrale so zu führen sind, dass die Kreisflächen um c zur linken bleiben.

Bedeutet t einen beliebigen Punkt im Inneren der mehrfach zusammenhängenden Fläche, so ist $\frac{f(z)}{z-t}$ in dieser Fläche ebenso wie $f(z)$ eine analytische Function, und nur der Punkt $z = t$ ist ein ausserwesentlicher singulärer. Mithin ist auch

$$\int_{(\alpha)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz = \int_{(t)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz + \int_{(c_1)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz + \int_{(c_2)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz \cdots + \int_{(c_n)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz$$

oder

$$\int_{(t)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz = \int_{(\alpha)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz - \int_{(c_1)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz - \int_{(c_2)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz \cdots - \int_{(c_n)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz.$$

Nun ist

$$\int_{(t)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz = 2i\pi f(t).$$

Die Integrale rechts aber lassen sich durch Potenzreihen ausdrücken. Da für das erste derselben z einen Punkt auf dem Kreise R bedeutet, so ist mod $(z - \alpha) >$ mod $(t - \alpha)$; mithin

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-\alpha} \cdot \frac{1}{1-\frac{t-\alpha}{z-\alpha}} = \frac{1}{z-\alpha}\left[1 + \frac{t-\alpha}{z-\alpha} + \frac{(t-\alpha)^2}{(z-\alpha)^2} + \frac{(t-\alpha)^3}{(z-\alpha)^3} \cdots\right]$$

eine unbedingt convergente Reihe. Demnach wird

$$\text{VI.} \int\limits_{(\alpha)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz = \int\limits_{(\alpha)} \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz + (t-\alpha)\int\limits_{(\alpha)} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz + (t-\alpha)^2 \int\limits_{(\alpha)} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^3}\,dz + \cdots$$

Die Coefficienten dieser Potenzreihe sind aber nicht mehr die Ableitungen an der Stelle α, wiewohl sie die nämliche Form haben, wie früher; denn der Kreis, für welchen die Integrale gebildet sind, kann nicht mehr beliebig um den Punkt α zusammengezogen werden.

Für jedes Integral um einen Punkt c ist

$$\mod (t-c) > \mod (z-c),$$

weil t ein Punkt ausserhalb der Kreisperipherie ist; folglich ist

$$\frac{1}{z-t} = \frac{-1}{t-c} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-c}{t-c}} = -\frac{1}{t-c}\left[1 + \frac{z-c}{t-c} + \frac{(z-c)^2}{(t-c)^2} + \frac{(z-c)^3}{(t-c)^3} + \cdots\right]$$

eine unbedingte convergente Reihe; und es wird:

$$\text{VII.} \quad -\int\limits_{(c)} \frac{f(z)}{z-t}dz = +\frac{1}{t-c}\int\limits_{(c)} f(z)dz + \frac{1}{(t-c)^2}\int\limits_{(c)} f(z)(z-c)dz + \frac{1}{(t-c)^3}\int\limits_{(c)} f(z)(z-c)^2 dz.$$

Bezeichnet man die Coefficienten der Reihe VI. dividirt durch $2i\pi$ kurz mit $A_0, A_1, A_2 \ldots$, ebenso die der Reihe VII., wenn sie sich auf den Punkt c_k bezieht, mit $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$, $C_3^{(k)} \ldots$ (bei dieser können die bestimmten Integrale auf einem Kreise von beliebig kleinem Radius ermittelt werden), so hat man das Resultat: Für alle Punkte t im Inneren des Kreises R, in welchem die Punkte $c_1, c_2 \ldots c_n$ singuläre Punkte für die analytische Function $f(z)$ sind, besteht die Entwickelung:

$$\text{VIII.} \quad \begin{aligned} f(t) &= A_0 + A_1(t-\alpha) + A_2(t-\alpha)^2 + A_3(t-\alpha)^3 + \cdots \\ &\quad \frac{C_1'}{t-c_1} + \frac{C_2'}{(t-c_1)^2} + \frac{C_3'}{(t-c_1)^3} + \frac{C_4'}{(t-c_1)^4} + \cdots \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad \frac{C_1^{(n)}}{t-c_n} + \frac{C_2^{(n)}}{(t-c_n)^2} + \frac{C_3^{(n)}}{(t-c_n)^3} + \frac{C_4^{(n)}}{(t-c_n)^4} + \cdots \end{aligned}$$

also eine Reihenentwickelung, welche sowohl nach positiven wie nach negativen ganzen Potenzen von t fortschreitet.

Aus dieser Entwickelung erkennen wir auch, wie sich die beiden Arten der singulären Punkte in der Art der Potenzentwickelung unterscheiden.

Der ausserwesentliche wurde dadurch charakterisirt, dass für denselben eine positive ganze Zahl m angebbar ist, für welche $f(z)(z-c)^m$ gleich einer endlichen Grösse ist. Daraus folgt: Ist der Punkt c ein ausserwesentlicher, so verschwinden für denselben alle Coefficienten C_{m+1},

$C_{m+2} \ldots C_{m+k} + \cdots$. In der That wird das Integral $\int\limits_c f(z)(z-c)^{m+k}dz$, weil sich der Radius ϱ so klein wählen lässt, dass sich $f(z)(z-c)^m$ von einer endlichen Zahl G beliebig wenig unterscheidet, von dem Integral $G\int\limits_c (z-c)^k dz$ beliebig wenig differiren, und dieses Integral hat den Werth Null. Umgekehrt erkennt man, dass, wenn für einen Punkt C die Coefficienten C_{m+1}, $C_{m+2} \ldots$ sämmtlich verschwinden, er ein ausserwesentlicher singulärer sein muss, weil dann $(z-c)^m f(z)$ für $z=c$ endlich bleibt.

Jeder andere Punkt, in welchem $f(z)$ unendlich wird, ist ein wesentlich singulärer, und man sieht nun, dass der wesentlich singuläre sich bei allen analytischen Functionen ebenso verhält wie bei der Exponentialreihe, wo wir ihn zuerst erkannten: es existirt für seine Umgebung eine nach negativen Potenzen fortschreitende unendliche Reihe.

Bildet man die Function $\frac{1}{f(z)}$, so wird dieselbe an der Stelle, wo $f(z)$ eine ausserwesentliche Singularität hat, verschwinden. Denn wenn $(z-c)^m f(z) = G$ ist für $z=c$, so ist $\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-c)^m}{G} = 0$ für $z=c$. Dagegen bleibt ein wesentlich singulärer Punkt auch ein eben solcher für die reciproke Function. Denn würde in dem Bereiche eines wesentlich singulären Punktes $\frac{1}{f(z)}$ regulär sein, so müsste dasselbe auch mit $f(z)$ der Fall sein; und würde $\frac{1}{f(z)}$ eine nur ausserwesentliche Singularität bekommen, so müsste $f(z)$ regulär bleiben. Der Punkt ist gleichfalls ein wesentlich singulärer für die Function $\frac{1}{f(z)-C}$, wobei C eine beliebige Constante bedeutet; daraus erschliesst man: Um den wesentlichen singulären Punkt lässt sich ein Kreis vom Radius ϱ angeben, in welchem sicherlich Stellen gelegen sind, an denen der Betrag von $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$, $\frac{1}{f(z)-C}$ grösser wird als eine beliebig vorgegebene noch so grosse Zahl K; d. h. Stellen an denen der Betrag von $f(z)$ grösser wird als K, aber auch Stellen, an denen er sich von Null und von jeder Zahl C um die beliebig kleine Grösse $\frac{1}{K}$ beliebig wenig unterscheidet. Mit anderen Worten: **Eine Function ist im wesentlich singulären Punkte völlig unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen, sie convergirt in der Nähe des Punktes nach jedem beliebigen Werthe.** (Bei der Exponentialfunction wurde diese Eigenschaft bereits hervorgehoben. §. 82, 4.)

Das Integral von $f(z)$, geführt um die beliebig nahe Begrenzung einer wesentlichen oder ausserwesentlichen singulären Stelle c, wird

nur dann gleich Null, wenn in der auf den Punkt c bezüglichen Entwickelung der Coefficient des Gliedes $\frac{1}{z-c}$ Null ist. Das Integral, hingeleitet in den singulären Punkt, wird immer unendlich, und zwar beim ausserwesentlichen von der Ordnung m wird die Integralfunction von der Ordnung $m-1$ unendlich, beim ausserwesentlichen von der Ordnung 1 wird das Integral logarithmisch unendlich.

190. Fragt man nun, wie sich das Gebiet von $f(z)$ ausserhalb des Gebietes R fortsetzen lässt, so findet man folgendes: Es sei $R' > R$ ein Kreis um den Radius α, in demselben möge $f(z)$ im allgemeinen eine analytische Function sein, nur sollen die Punkte $c_{n+1} \ldots c_{n+k}$ als singuläre hinzutreten. Dann ändern sich in der Reihenentwickelung VIII. die Coefficienten $A_0, A_1 . A_2$; während die Coefficienten C sämmtlich erhalten bleiben und neue Glieder durch die Punkte $c_{n+1} \ldots c_{n+k}$ hinzukommen.

Nehmen wir zuerst an, dass die Function $f(z)$ im Unendlichen nicht singulär ist, sondern für $z = \infty$ nach einem bestimmten endlichen Werthe convergirt und überhaupt eine endliche Anzahl von m singulären Punkten in der gesammten Ebene hat, so convergiren die Integrale der Reihe VI., welche die Coefficienten A bestimmen, sämmtlich nach Null, denn es lässt sich R so gross wählen, dass $f(z)$ sich von einer endlichen Zahl beliebig wenig unterscheidet; demnach ist auch:

$$\operatorname{mod} \int \frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^n} < \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{mod} G}{R^{n-1}}\, d\varphi$$

beliebig klein. Nur

$$A_0 = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz$$

wird gleich G.

Eine Function also, welche in der ganzen Ebene m singuläre Punkte besitzt und sich im Endlichen regulär verhält, ist von der Form:

$$f(t) = \frac{C_1'}{t-c_1} + \frac{C_2'}{(t-c_1)^2} + \frac{C_3'}{(t-c_1)^3} + \cdots + \frac{C_1^{(m)}}{t-c_m} + \frac{C_2^{(m)}}{(t-c_m)^2} + \frac{C_3^{(m)}}{(t-c_m)^3} + \cdots G.$$

Eine Function, welche im Endlichen nur ausserwesentliche singuläre Punkte besitzt und im Unendlichen regulär ist, ist eine rationale echt gebrochene Function. Denn dann brechen die Glieder, welche sich auf die verschiedenen Punkte c beziehen, sämmtlich ab, und bringt man den Ausdruck auf einen gemeinsamen Nenner, so wird die Ordnung des Zählers mindestens um eine Einheit kleiner als die des Nenners.

Hat die Function $f(z)$ im Unendlichkeitspunkte eine ausserwesentliche singuläre Stelle, und ist im übrigen die Anzahl der singulären Punkte in der ganzen Ebene eine endliche, so verwandele man dieselbe durch die Substitution $z - \beta = \frac{1}{z'}$, oder wenn der Nullpunkt von z

kein singulärer ist, durch die Substitution $z = \frac{1}{z'}$ in eine Function von z', welche sich im Unendlichen regulär verhält. Für diese Function gilt dann in der gesammten Ebene, da auch der Nullpunkt ein ausserwesentlicher singulärer ist, die Entwickelung:

$$f\left(\frac{1}{t'}\right) = \frac{C_1^1}{\frac{1}{t'} - c_1} + \frac{C_2^1}{\left(\frac{1}{t'} - c_1\right)^2} + \frac{C_3^1}{\left(\frac{1}{t'} - c_1\right)^3} + \dots \frac{C_1^{(m)}}{\frac{1}{t'} - c_m} +$$

$$+ \frac{C_2^{(m)}}{\left(\frac{1}{t'} - c_m\right)^2} + \frac{C_3^{(m)}}{\left(\frac{1}{t'} - c_m\right)^3} + \dots G + \frac{K_1}{t'} + \frac{K_2}{t'^2} + \dots \frac{K_n}{t'^n},$$

d. h.

$$f(z) = \frac{C_1'}{z - c_1} + \frac{C_2'}{(z - c_1)^2} + \frac{C_3'}{(z - c_1)^3} + \dots \frac{C_1^{(m)}}{z - c_m} + \frac{C_2^{(m)}}{(z - c_m)^2} + \frac{C_3^{(m)}}{(z - c_m)^3} +$$

$$+ \dots G + K_1 z + K_2 z^2 + \dots K_n z^n.$$

Hieraus folgt: *Eine Function, welche im Unendlichen eine ausserwesentliche singuläre Stelle besitzt, und im Endlichen eine endliche Anzahl eben solcher Punkte, ist eine unecht gebrochene rationale Function.* Hat sie im Endlichen gar keinen singulären Punkt, so ist sie eine ganze Function.

Ist endlich der Unendlichkeitspunkt ein wesentlich singulärer, so bricht in der vorigen Reihe die Entwickelung

$$\frac{K_1}{t'} + \frac{K_2}{t'^2} + \dots \frac{K_n}{t'^n} + \dots$$

nicht ab; es bleibt also auch

$$K_1 z + K_2 z^2 + \dots K_n z^n + \dots$$

eine endliche Reihe, die für jeden endlichen Werth von z convergirt. Damit ist die allgemeinste Form der Entwickelung gewonnen:

Ist $f(z)$ eine analytische Function, welche in der endlichen Ebene die (wesentlichen oder ausserwesentlichen) singulären Punkte $c_1, c_2 \dots c_m$ besitzt, und für welche der Unendlichkeitspunkt ebenfalls ein wesentlich singulärer ist, so gilt für j e d e n e n d l i c h e n Werth von z die Entwickelung:

$$f(z) = \frac{C_1'}{z - c_1} + \frac{C_2'}{(z - c_1)^2} + \frac{C_3'}{(z - c_1)^3} + \dots \frac{C_1^{(m)}}{(z - c_m)} + \frac{C_2^{(m)}}{(z - c_m)^2} +$$

$$+ \frac{C_3^{(m)}}{(z - c_m)^3} + \dots + G + K_1 z + K_2 z^2 + K_3 z^3 + \dots,$$

wobei die Coefficienten C und K vermittelst bestimmter Integrale zu berechnen sind, K insbesondere aus der Form:

$$K_n = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\text{um } z'=0} f\left(\frac{1}{z'}\right) z'^{n-1}\, dz' = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Lim} \int f\left(\frac{1}{r}\, e^{-i\varphi}\right) r^n e^{in\varphi}\, d\varphi, \quad (\text{für } r = 0)$$

oder auch gleich

$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz, \qquad \text{um den Punkt } z = \infty.$$

Existiren im Endlichen gar keine singulären Punkte, so ist

$$f(z) = G + K_1 z + K_2 z^2 + K_3 z^3 + \ldots$$

durch eine Potenzreihe darstellbar, welche in der gesammten Ebene convergirt. *In diesem Falle heisst $f(z)$ eine ganze transscendente Function* *). Zu dieser Classe gehört die Exponentialfunction. Die Berechnung der Coefficienten K kann dann auch auf jede Curve um den Nullpunkt reducirt werden, und es ist, da keine singulären Punkte eingeschlossen sind:

$$K_n = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{n!} f^n(0).$$

Die Sätze, welche aus der Entwickelung der analytischen Function in eine Reihe von der Form VIII. folgen, finden ihre Vervollständigung noch durch die folgenden:

Eine analytische Function, welche gar keine singuläre Stelle hat, also für keinen Punkt unendlich wird, ist eine Constante.

Sie kann weder eine ganze rationale, noch eine ganze transscendente Function sein, weil die ersteren im Unendlichen eine ausserwesentliche, die anderen eine wesentliche singuläre Stelle haben.

Weiter: *Eine analytische Function ohne wesentlichen singulären Punkt, welche an keiner Stelle Null wird, ist eine Constante.*

(Die Exponentialfunction wird im Endlichen nicht Null, ihr Nullpunkt fällt mit dem wesentlichen singulären zusammen.)

Eine analytische Function muss jeden beliebigen Werth mindestens einmal annehmen; oder sie ist eine Constante.

Der Werth kann auch dem wesentlich singulären Punkte angehören.

Eine analytische Function ist bestimmt, sobald sie längs eines noch so kleinen aber endlichen Curvenstückes gegeben ist.

Denn alsdann lassen sich alle Ableitungen der Function an einer Stelle berechnen; mithin wird die Potenzreihe in der Umgebung dieser Stelle erhalten, und diese kann ausserhalb ihres Convergenzbezirkes fortgesetzt werden (§. 186).

---

*) Die Classification der transscendenten analytischen Functionen in ganze und gebrochene, und die weitere Eintheilung derselben nach der Anzahl der wesentlichen singulären Punkte ist von Weierstrass: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, Abhandlungen der k. Akad., Berlin 1876, gegeben worden. Dort wird auch gezeigt, wie sich die Functionen analytisch entwickeln lassen, wenn die Anzahl der ausserwesentlichen singulären Stellen unbeschränkt ist.

Eine analytische Function ist constant, sobald sie längs eines noch so kleinen aber endlichen Curvenstückes constant ist.

Denn dann sind alle Ableitungen an einer Stelle Null.

191. Umkehr der eindeutigen analytischen Function.

Hat in einem endlichen Gebiete $f(z)$ keinen singulären Punkt, so ist vermöge der Gleichung $w=f(z)$ auch die inverse Function $z=\varphi(w)$ eine analytische. Denn da ein bestimmter Differentialquotient

$$\frac{dw}{dz}=f'(z)$$

vorhanden ist, so existirt auch eine Ableitung von z nach w, nämlich

$$\frac{dz}{dw}=\frac{1}{f'(z)},$$

an jeder Stelle im Innern des Bereiches, und zwar ist, wenn $w=u+iv$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial z}{\partial u}+i\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

Diese Ableitung kann nur an einzelnen Stellen, wo $f'(z)=0$ wird, unendlich werden, und diese Stellen werden Verzweigungspunkte für die Function $z=\varphi(w)$.

Man kann dasselbe genauer folgendermassen prüfen, um zweifellos zu erkennen, dass die Ableitung $\frac{dz}{dw}$ in eindeutiger Weise von w abhängt. Zu einem bestimmten Werthe $z=\alpha$ gehört ein bestimmter Werth $w=\beta$. Umgekehrt können demselben Werthe $w=\beta$ verschiedene Werthe von z in endlicher Anzahl entsprechen. Nimmt man nun für w einen bestimmten Werth an, und betrachtet einen der dazu gehörigen Werthe $z=\alpha$, so entsteht die Frage, wie sich z ändert, falls der Werth von β beliebig wenig verändert wird. Es soll gezeigt werden, dass diese Aenderung stetig und eindeutig ist, derart, dass auch der Differentialquotient $\frac{dz}{dw}$ einen bestimmten Werth hat, so lange man w nicht eine Stelle überschreiten lässt, an welcher der entsprechende Werth von z der Gleichung $f'(z)=0$ angehört. Wiederum ist zu bemerken, dass diese Gleichung eine endliche Anzahl von Lösungen in jedem geschlossenen Gebiete besitzt; dass zu jeder Lösung ein bestimmter Werth von w gehört, dass aber umgekehrt jedem der so ermittelten Werthe von w verschiedene z-Werthe angehören können, von denen aber im allgemeinen nur einer die Gleichung $f'(z)=0$ befriedigen wird.

Die eindeutige und stetige Aenderung von w sieht man folgendermassen ein. α soll eine Stelle sein, für welche nicht $f'(\alpha)$ verschwindet. Dann bezeichne man einen benachbarten Werth von w mit $\beta+\Delta w$, ihm entspreche der Werth $\alpha+\Delta z$, so folgt aus der Glei-

chung $\beta + \Delta w = f(\alpha + \Delta z)$, wenn die rechte Seite nach Potenzen von Δz geordnet wird:

$$\Delta w = \Delta z f'(\alpha) + \frac{\Delta z^2}{2!} f''(\alpha) + \frac{\Delta z^3}{3!} f'''(\alpha) + \dots$$

Diese Gleichung kann bei gegebenem Werthe von Δw innerhalb eines endlichen Gebietes für Δz möglicherweise durch verschiedene Werthe von Δz befriedigt werden; aber da $f'(\alpha)$ nicht Null ist, so hat nur einer dieser Werthe die Eigenschaft, gleich Null zu werden, falls Δw nach Null convergirt. Die übrigen Δz convergiren nach den Werthen, für welche

$$f'(\alpha) + \frac{\Delta z}{2!} f''(\alpha) + \frac{\Delta z^2}{3!} f'''(\alpha) + \dots = 0$$

wird (jede Wurzel dieser Gleichung liefert zu α addirt die übrigen Werthe von z, welche zur Stelle $w = \beta$ gehören).

Diese eine Wurzel hängt von Δw stetig ab, derart, dass der Quotient $\frac{\Delta z}{\Delta w}$ einer bestimmten Grösse zustrebt, denn es ist

$$1 = \frac{\Delta z}{\Delta w}\left[f'(\alpha) + \frac{\Delta z}{2!} f''(\alpha) + \frac{\Delta z^2}{3!} f'''(\alpha) + \dots\right],$$

also, wenn Δz nach Null convergirt, so wird

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Dies gilt für jede Stelle, an welcher $f'(\alpha)$ nicht verschwindet. Die Grösse z ist in bestimmter eindeutiger Weise fortsetzbar.

Anders wird es, wenn wir an eine Stelle α kommen, für welche diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist; alsdann ist

$$\Delta w = \frac{\Delta z^2}{2!} f''(\alpha) + \frac{\Delta z^3}{3!} f'''(\alpha) + \dots,$$

oder allgemeiner

$$= \frac{\Delta z^m}{m!} f^m(\alpha) + \frac{\Delta z^{m+1}}{(m+1)!} f^{m+1}(\alpha) + \dots,$$

und es gehört zur Stelle $w = \beta$ ein doppelt (resp. m-fach) zählender Werth $z = \alpha$ derart, dass es zur benachbarten Stelle $\beta + \Delta w$ zwei Werthe, $z = \alpha + \Delta_1 z$ und $z = \alpha + \Delta_2 z$ (resp. m Werthe) giebt, welche die Eigenschaft haben, mit Δw nach Null zu convergiren. Ist also w in eine solche Stelle eingetreten, dass für dieselbe $f'(z) = 0$ wird, so tritt ein Verzweigungspunkt auf und es kann die Function nicht mehr in eindeutiger Weise fortgesetzt werden.

Der Punkt $w = \beta$, in dessen Umgebung

$$\Delta w = \frac{\Delta z^m}{m!} f^m(\alpha) + \frac{\Delta z^{m+1}}{(m+1)!} f^{m+1}(\alpha) + \dots$$

wird, ist in der That ein Verzweigungspunkt für die gesuchte Function $z = \varphi(w)$, derart, dass in demselben m Blätter der Function

cyclisch zusammenhängen; oder anders ausgedrückt: Umschliesst man den Punkt mit einem beliebig kleinen Kreise und lässt Δw die Werthe durchlaufen, welche den Punkten dieses Kreises entsprechen, so wird bei einmaligem Umlauf Δz sich so ändern, dass es, beginnend mit einem der m möglichen Werthe, in einen zweiten übergeht, von diesem, während Δw den Umlauf wiederholt, in einen dritten; nach $m-1$-maligem Umlauf hat Δz einen m^{ten} Werth angenommen, und erst nach m-maligem Umlauf erlangt es den ursprünglichen Werth. Denn es folgt aus der Gleichung:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z^m} = \frac{1}{m!} f^m(\alpha) + \frac{\Delta z}{(m+1)!} f^{m+1}(\alpha) + \frac{\Delta z^2}{(m+2)!} f^{m+2}(\alpha) + \dots,$$

welche für einen verschwindenden Werth von Δz stetig in

$$\frac{dw}{dz^m} = \frac{1}{m!} f^m(\alpha)$$

übergeht, dass man um den Punkt β einen so kleinen Kreis beschreiben kann, dass für alle Punkte dieses Kreises

$$\frac{\Delta z}{m+1!} f^{m+1}(\alpha) + \frac{\Delta z^2}{(m+2)!} f^{m+2}(\alpha) \dots$$

kleiner wird als eine Grösse δ, deren Betrag beliebig klein ist; demnach ist auch

$$\frac{\Delta w}{(\Delta z)^m} = \frac{1}{m!} f^m(\alpha) + (<\delta) = C + (<\delta).$$

Setzt man $\Delta w = re^{i\varphi}$ und schreibt die vorstehende Gleichung in der Form:

$$\frac{e^{i\varphi}}{\left(\frac{\Delta z}{r^{\frac{1}{m}}}\right)^m} = C + (<\delta),$$

so erkennt man, dass die Werthe von Δz in ihrem Verhältniss zu dem positiven Wurzelwerthe $r^{\frac{1}{m}}$ mit beliebiger Annäherung durch die Ausdrücke dargestellt werden:

$$e^{\frac{i\varphi}{m}} \cdot C^{-\frac{1}{m}}, \quad e^{\frac{i\varphi+2\pi}{m}} \cdot C^{-\frac{1}{m}}, \dots e^{\frac{i\varphi+2(m-1)\pi}{m}} \cdot C^{-\frac{1}{m}},$$

unter $C^{-\frac{1}{m}}$ einen der m möglichen Werthe, jedoch überall denselben verstanden. Aendert sich φ um 2π (d. h. durchläuft Δw die Kreisperipherie), so geht jeder dieser Werthe in einen anderen über, und folglich müssen sich auch die verschiedenen Werthe von $\frac{\Delta z}{r^{\frac{1}{m}}}$, welche diesem beliebig nahe kommen, unter einander cyclisch vertauschen.

Demnach erkennt man: Betrachtet man einen Punkt α im Innern

des Convergenzkreises der Function $f(z)$, und bezeichnet man diejenigen Punkte, für welche $f'(z) = 0$ wird, mit $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ (der Punkt α soll nicht unter diesen enthalten sein), so lässt sich um den Punkt α ein Kreis mit dem Radius r beschreiben, welcher diese n Punkte ausschliesst. In einer zweiten Ebene interpretire man die Werthe von w. Dem Mittelpunkte α entspricht der Punkt β. Allen Punkten der Kreisperipherie muss dann in der Ebene w eine bestimmte, im Endlichen geschlossene, den Punkt β umschliessende Curve entsprechen; dieselbe kann sich auch nicht selbst durchschneiden, denn alsdann würden dem Durchschnittspunkte w zwei verschiedene Punkte z zugeordnet sein. Jedem Punkte der Kreisfläche r entspricht ein bestimmter Punkt im Gebiete um β, aber auch umgekehrt jedem Punkte im Gebiete um β nur ein einziger bestimmter Punkt im Kreise r. Es muss eine Reihenentwickelung

$$z = \alpha + a_1 (w - \beta) + a_2 (w - \beta)^2 + a_3 (w - \beta)^3 + \ldots = \varphi(w)$$

existiren; dieselbe convergirt in einem um den Punkt β beschriebenen Kreise, welcher ganz innerhalb des um β begrenzten Bereiches liegt. Analytisch wird also der Radius des Convergenzkreises so anzugeben sein.

Durchläuft z die Punkte $\alpha + re^{i\varphi}$, so bestimme man den kleinsten Modul unter den Werthen $(w - \beta) = f(z) - f(\alpha)$ für diese Punkte; dieses Minimum ist der Convergenzradius der nach Potenzen von w fortschreitenden Reihe.

Die Coefficienten der Reihe sind die successiven Differentialquotienten von z nach w, gebildet für die Stelle α; sie werden durch Differentiation der Gleichung

$$\frac{dz}{dw} f'(z) = 1$$

in Bezug auf w erhalten, oder in der Form der bestimmten Integrale ($k \geqq 1$):

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{\varphi(w)\, dw}{[w - \beta]^{k+1}} = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{(z - \alpha) f'(z)\, dz}{[f(z) - f(\alpha)]^{k+1}},$$

geführt um die Stelle $z = \alpha$. Im Zähler des zweiten Integrales kann statt z auch $z - \alpha$ geschrieben werden, weil das Integral des mit α multiplicirten Theiles verschwindet.

Da die successive Differentiation von z nach w, wobei w als unabhängige Variabele zu betrachten ist, zu complicirten Recursionsformeln führt, so ist es wichtig, zu erkennen, wie sich dieselben noch in anderer Weise ausdrücken lassen. Bildet man aus der Gleichung:

$$w = f(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots \quad \text{und} \quad \beta = b_0 + b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 + \ldots$$

die Differenz, so kann man dieselbe nach Potenzen von $z - \alpha$ anordnen, und man hat die Aufgabe, die Reihe

$$w - \beta = (z - \alpha)\,[c_0 + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \dots] = (z-\alpha)\,F(z-\alpha)$$

umzukehren.

193. Die Function $F(z-\alpha) = \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$ verschwindet an der Stelle $z = \alpha$ nicht, denn sie hat daselbst den Werth

$$\lim_{z=\alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = f'(\alpha),$$

und sie verschwindet überhaupt an keiner Stelle im Convergenzbezirk, weil nur für $z = \alpha$ w gleich β wird. Den Werth von $\frac{1}{F(z-\alpha)}$ bezeichne man mit $\varphi(z-\alpha)$, so ist $\varphi(z-\alpha)$ eine Function, welche sich in der Umgebung der Stelle α in eine Reihe entwickeln lässt. Sonach ist die Aufgabe auf die specielle Form eines von Lagrange zuerst gelösten Problemes gebracht: Aus der Gleichung

$$(w - \beta)\,\varphi\,(z - \alpha) = z - \alpha \quad \text{oder} \quad w'\varphi(z') = z'$$

z' als Function von w zu berechnen. Diese Aufgabe führt auf die frühere Reihe

$$z' = a_1 w' + a_2 w'^2 + a_3 w'^3 + \dots,$$

und die Coefficienten a_k sind aus dem Integrale

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{(z-\alpha)\,f'(z)}{[f(z) - f(\alpha)]^{k+1}}\,dz$$

zu bestimmen. Setzt man nun

$$\frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = F(z-\alpha) = \frac{1}{\varphi(z-\alpha)},$$

also

$$f'(z) = \frac{1}{\varphi(z-\alpha)} - \frac{(z-\alpha)\,\varphi'(z-\alpha)}{[\varphi(z-\alpha)]^2},$$

so zerlegt sich das Integral in zwei Theile:

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{[\varphi(z-\alpha)]^k\,dz}{(z-\alpha)^k} - \frac{1}{2i\pi} \int \frac{[\varphi(z-\alpha)]^{k-1}\,\varphi'(z-\alpha)}{(z-\alpha)^{k-1}}\,dz.$$

Der erste Theil ist nach §. 185 gleich

$$\frac{1}{k-1!} \frac{d^{k-1}[\varphi(z-\alpha)]^k}{d^{k-1}z}$$

an der Stelle $z = \alpha$.

Der zweite Theil ist gleich

$$\frac{1}{k-2!} \frac{d^{k-2}[[\varphi(z-\alpha)]^{k-1}\varphi'(z-\alpha)]}{dz^{k-2}} = \frac{1}{k-2!}\,\frac{1}{k}\,\frac{d^{k-1}[\varphi(z-\alpha)]^k}{dz^{k-1}}, \text{ für } z = \alpha,$$

so dass

$$a_k = \frac{1}{k-2!}\left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right] \frac{d^{k-1}[\varphi(z-\alpha)]^k}{dz^{k-1}} = \frac{1}{k!}\,\frac{d^{k-1}[\varphi(z-\alpha)]^k}{dz^{k-1}}, \text{ für } z = \alpha.$$

Demnach hat man den obigen Satz in der von Lagrange angegebenen Form: *Aus der Gleichung:* $w'\varphi(z') = z'$, *in welcher* φ *eine eindeutige analytische Function bedeutet, folgt die Entwickelung:*

$$z' = w'\varphi(0) + \frac{w'^2}{2!}\left[\frac{d[\varphi(z')]^2}{dz'}\right]_{z'=0} + \frac{w'^3}{3!}\left[\frac{d^2[\varphi(z')]^3}{dz'^2}\right]_{z'=0} + \frac{w'^4}{4!}\left[\frac{d^3[\varphi(z')]^4}{dz'^3}\right]_{z'=0} + \cdots$$

Da

$$f(z) - f(\alpha) = \frac{z-\alpha}{\varphi(z-\alpha)}, \quad \frac{1}{f'(z)} = \frac{[\varphi(z-\alpha)]^2}{\varphi(z-\alpha) - (z-\alpha)\varphi'(z-\alpha)},$$

so überträgt sich die frühere Convergenzbedingung in Bezug auf die Function $\varphi(z')$ in folgender Weise:

Bedeutet r *den Radius des um* $z' = 0$ *beschriebenen Kreises, in dessen Innerem* $\varphi(z') - z'\varphi'(z')$ *nicht verschwindet, und ermittelt man den kleinsten Werth, welchen* $w' = \frac{z'}{\varphi(z')}$ *auf diesem Keise annimmt, so liefert dieses Minimum den Convergenzradius für* w'.

Das Gebiet dieses Kreises in der Ebene w' ist umkehrbar eindeutig auf ein im Kreise vom Radius r eingeschlossenes Gebiet der z'-Ebene abgebildet, in welchem auch $\varphi(z')$ nicht Null wird.

Dem Punkte $z' = 0$ entspricht dabei der Punkt $w' = 0$.

Drittes Capitel.

Die Entwickelung der mehrdeutigen analytischen Functionen, insbesondere der algebraischen.

193. Das Problem, die implicite algebraische Function $f(z, w) = 0$ nach w aufzulösen, ferner die zuletzt behandelte Aufgabe, die inverse Function einer Potenzreihe zu bilden, führten auf mehrdeutige Functionen. In beiden Fällen wurde gezeigt, wie innerhalb beschränkter Gebiete, in denen die Function regulär bleibt, die Taylor'sche Reihenentwickelung ausführbar ist. Bei der algebraischen Function (§. 188) gab es zwei Arten von Punkten, in denen die Function w aufhört regulär zu sein: erstlich die Punkte, welche ausserwesentlich singuläre genannt wurden, in denen w unendlich wird, so jedoch, dass w, mit einer rationalen algebraischen Function multiplicirt, endlich bleibt; zweitens alle die Punkte, welche als kritische bezeichnet wurden, in denen der Werth von w eine mehrfach zählende Wurzel ist, für welche also $\frac{\partial f(z,w)}{\partial w} = 0$ wird. Es kann auch eintreten, dass für einen Punkt beide Besonderheiten zugleich vorliegen. In der zweiten Aufgabe bildeten die Verzweigungspunkte die irregulären Stellen. Erweitert man diese Aufgabe zu dem Probleme, jedwede eindeutige analytische Function in einem beliebigen Gebiete, in welchem auch wesent-

liche und ausserwesentliche singuläre Stellen liegen, umzukehren, so werden auch in der inversen Function singuläre Stellen dieser Art auftreten.

Demnach sollen im folgenden die Eigenschaften mehrdeutiger analytischer Functionen überhaupt, und insbesondere der algebraischen Function untersucht werden.

Unter einer n-deutigen analytischen Function von z ist eine Function zu verstehen, welche, mag sie für ein endliches Gebiet oder für die ganze Ebene definirt sein, im allgemeinen bei jedem Werthe von z n verschiedene Werthe besitzt. Jeder dieser Werthe soll — mit Ausnahme von wesentlichen oder ausserwesentlichen singulären Punkten — der Differentialgleichung $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ genügen. Ausserdem aber soll die Function Verzweigungspunkte besitzen. Unter einem Verzweigungspunkte ist eine Stelle für z zu verstehen, bei welcher erstlich von den zugehörigen Functionswerthen mindestens zwei einander gleich werden, und bei welcher zweitens die Functionswerthe sich geändert haben, wenn z eine den Punkt umschliessende Curve durchlaufen hat (§. 191). Der Verzweigungspunkt kann dabei zugleich ein singulärer Punkt sein. Da nun bereits erkannt ist, dass in jedem ausnahmslos regulären Gebiete die Function durch die Taylor'sche Reihe darstellbar ist, die sich für den Fall, dass singuläre Punkte im Gebiete vorkommen, nach der im §. 189 entwickelten Methode erweitert, so bleibt lediglich nachzuweisen, dass auch in der Umgebung eines Verzweigungspunktes eine Reihenentwickelung möglich ist, und wie dieselbe lautet. Ferner ist festzustellen, welches die Werthe der Ableitungen im Verzweigungspunkte sind. Endlich ist zu zeigen, wie sich die analytische Darstellung der Function modificirt, wenn der Verzweigungspunkt zugleich ein singulärer Punkt wird.

Bei der Uebertragung dieser Sätze auf die mehrdeutige algebraische Function ist noch besonders die Frage zu beantworten, ob hier jeder kritische Punkt ein Verzweigungspunkt ist. Da sich zeigen wird, dass dieses nicht immer der Fall ist, dass vielmehr der kritische Punkt auch nur ein vielfacher Punkt ohne Verzweigung sein kann, so entsteht die Frage, welches dann die Werthe des ersten und der höheren Differentialquotienten sind, eine Frage, die für reelle Werthe der Function schon früher (§. 60) für die einfachsten Fälle beantwortet wurde.

194. Die Untersuchung einer mehrdeutigen Function $f(z)$ in der Umgebung eines Verzweigungspunktes a, der zunächst kein singulärer sein soll, in welchem m Zweige der Function derart zusammenhängen, dass sie einen Cyclus bilden, soll der bisher stets angewandten Methode entsprechend von der Betrachtung eines bestimmten Integrales ausgehen. Die analytischen Operationen kann man sich geometrisch ver-

deutlichen, indem man an Stelle der einen z-Ebene nach Riemann eine Windungsfläche $m-1$ter Ordnung um den Punkt α construirt. Dieselbe besteht aus m Blättern, welche längs eines willkürlich gezogenen Verzweigungsschnittes cyclisch mit einander verbunden sind; übereinander liegende Punkte auf diesen Blättern repräsentiren denselben Werth von z, aber jedem dieser Punkte ist immer nur einer der m Functionswerthe eindeutig zugeordnet. Eine geschlossene Curve, z. B. ein Kreis, welche den Punkt α umgeben soll, muss so construirt werden, dass die Curve, von einem Punkte z des ersten Blattes beginnend, zunächst im ersten Blatte um den Punkt α geführt wird, sodann aber, beim Verzweigungsschnitte angelangt, in das zweite Blatt eintritt, von dort nach vollständigem Umlauf um den Punkt α ins dritte Blatt, schliesslich ins $m$te übergeht. Von diesem tritt sie beim Verzweigungsschnitte wieder zurück ins erste und vollendet dort ihren anfangs begonnenen Umlauf.

Substituirt man in die Function $f(z)$ statt z die neue Variabele ζ, welche mit z durch die Gleichung verbunden ist:

$$\zeta^m = z - \alpha, \text{ also: } \zeta = (z-\alpha)^{\frac{1}{m}},$$

wobei man zunächst für ein bestimmtes z irgend einen der m möglichen Wurzelwerthe fixirt, so wird sich, während z einen Kreis um den Punkt α beschreibt, der Werth von ζ stetig mit z ändern; jedoch nach vollständigem Umlaufe hat z nicht den früheren Werth angenommen, es ist vielmehr bei stetiger Aenderung in einen anderen Wurzelwerth, dessen Argument von dem ursprünglichen um $\frac{2\pi}{m}$ differirt, übergegangen. Erst wenn z alle m Umläufe vollzogen hat, hat ζ den anfänglichen Werth erlangt. Interpretirt man die Werthe von ζ in einer Ebene, so durchläuft ζ den vollständigen Kreis um den Punkt $\zeta = 0$ erst dann, wenn z auf allen m Blättern der Windungsfläche seinen Umlauf vollzogen hat. Den Punkten z eines einzelnen Blattes im Innern eines Kreises mit dem Radius r entsprechen blos die Punkte ζ, welche innerhalb eines Kreissectors mit dem Radius $r^{\frac{1}{m}}$ und dem Centriwinkel $\frac{2\pi}{m}$ sich befinden. Indem man festgesetzt hat, welcher Wurzelwerth von $(z-\alpha)^{\frac{1}{m}}$ anfänglich gewählt werden soll, hat man eine bestimmte Beziehung zwischen den aufeinander folgenden Kreissectoren und den verschiedenen Blättern hergestellt.

Die Werthe, welche die Function $f(z)$ in den verschiedenen Blättern annimmt, lassen sich eindeutig und stetig den Punkten der m Kreissectoren zuordnen, so dass wir sagen können, die Function

$$f(z) = f(\zeta^m + \alpha) = \varphi(\zeta)$$

ist für das Innere des Kreises um den Punkt $\zeta = 0$ eine eindeutige und stetige Function. Sie ist aber auch eine analytische Function. Denn die Function $f(z)$ soll an jeder Stelle (mit Ausnahme des Verzweigungspunktes) eine bestimmte endliche Ableitung besitzen; also wird

$$f'(z) = \varphi'(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \varphi'(\zeta) \cdot \frac{1}{m} (z - \alpha)^{\frac{1}{m} - 1};$$

d. h.

$$\varphi'(\zeta) = mf'(z) \cdot (z - \alpha)^{\frac{m-1}{m}}$$

ist eine allenthalben bestimmte endliche Grösse. Im Punkte $z = \alpha$ selbst soll $f(z)$ und also auch $\varphi(\zeta)$ endlich und stetig bleiben; derselbe kann also kein singulärer für die im übrigen eindeutige analytische Function $\varphi(\zeta)$ sein; folglich hat auch (§. 189) $\varphi'(\zeta)$ einen bestimmten Werth. Ist dieser Werth ein endlicher, von Null verschiedener, so zeigt die Gleichung

$$f'(z) = \frac{\varphi'(\zeta)}{m(z - \alpha)^{\frac{m-1}{m}}},$$

dass die Ableitung $f'(z)$ im Verzweigungspunkte von der $\frac{m-1}{m}$ten Ordnung unendlich wird. Wird $\varphi'(\zeta)$ selbst gleich 0, so kann $f'(z)$ endlich (auch Null) sein, wie späterhin genauer festgestellt werden wird.

Bildet man das Integral $\int f(z)\, dz$ für den vollständigen Kreisumlauf auf allen m Blättern, indem man im ersten Blatte mit einem der m möglichen Werthe von $f(z)$ beginnt, und diesen stetig mit z ändert, so entspricht diesem Integrale, da $dz = m\zeta^{m-1}\, d\zeta$, das Integral

$$m \int \varphi(\zeta)\, \zeta^{m-1}\, d\zeta,$$

welches auf dem Kreise mit dem Radius $r^{\frac{1}{m}}$ um den Punkt Null geführt wird. Nach dem über die eindeutige analytische Function bewiesenen Fundamentalsatze hat dieses Integral, und überhaupt jedes Integral, welches auf einer den Punkt $\zeta = 0$ umschliessenden Curve geführt wird, in deren Innerem kein singulärer Punkt liegt, den Werth Null. Desgleichen folgt, weil auch das Integral $\int \varphi(\zeta)\, d\zeta$, auf demselben Wege geführt, Null wird, dass auch das entsprechende Integral:

$$\frac{1}{m} \int \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{\frac{m-1}{m}}}\, dz$$

verschwindet. Mithin lautet für die mehrdeutige Function der analoge Satz:

Umschliesst man den Verzweigungspunkt einer mehrdeutigen Function, in welchem m Blätter cyclisch zusammenhängen, mit einer ge-

schlossenen Curve, welche sich nothwendig m mal um den Punkt windet, so sind, vorausgesetzt, dass in dem Innern dieser Curve kein singulärer Punkt sich befindet, die Integrale über diesen geschlossenen Weg,

$$\int f(z)\,dz \quad \text{und} \quad \int \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}}\,dz\,^{*)},$$

gleich Null.

Aus diesem Satze ging die analytische Darstellung der eindeutigen Function im regulären Gebiete hervor (§. 184); er leistet dasselbe für die mehrdeutigen Functionen; nur muss er auch hier zunächst erweitert werden für ein mehrfach berandetes Gebiet.

Sind in dem Kreise um den Punkt $\zeta = 0$ singuläre Punkte vorhanden, keiner derselben soll vorerst mit dem Nullpunkte zusammenfallen, so umschliesse man solch einen Punkt $\zeta = c$ mit einer beliebigen geschlossenen Curve, etwa einem Kreise mit dem Radius ϱ. Demselben entspricht auf der Windungsfläche vermöge der Gleichung:

$$z = \zeta^m + \alpha = (c + \varrho e^{i\varphi})^m + \alpha$$

ebenfalls eine geschlossene Curve; dieselbe verläuft ganz in einem Blatte, wenn die entsprechende Curve im Kreise ζ ganz innerhalb eines der jedem Blatte entsprechenden Sectoren liegt; tritt diese dagegen in mehrere Sectoren ein, so befindet sich jene auch in mehreren Blättern. Immer aber besteht für die eindeutige analytische Function $\varphi(\zeta)$ und $\varphi(\zeta)\cdot\zeta^{m-1}$ der Satz, dass die Summe aller Integrale, geführt in positivem Umlauf um die Randcurven eines Gebietes, in welchem $\varphi(\zeta)$ keine singulären Stellen besitzt, Null ist. Demnach lautet die Erweiterung des obigen Satzes:

Bildet man

$$\int f(z)\,dz \quad \text{oder} \quad \int \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}}\,dz$$

in positivem Umlaufe für sämmtliche Randcurven eines mehrfach berandeten Gebietes, welches aus m Blättern besteht, die längs eines vom Punkte $z = \alpha$ ausgehenden Verzweigungsschnittes cyclisch zusammenhängen, so ist, vorausgesetzt, dass in dem Innern solch eines Gebietes kein singulärer Punkt sich befindet, die Summe aller Integrale gleich Null.

195. Nunmehr kann man analog der früheren Entwickelung folgendermassen vorgehen. Es habe erstlich $f(z)$ und also auch $\varphi(\zeta)$ keine singulären Punkte innerhalb der vom Radius r begrenzten Windungs-

---

*) Allgemein $\int \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m-1-k}{m}}}\,dz = 0$ für $k \geq 0$.

fläche um den Punkt α. Man bilde die Function $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}$, unter t irgend einen Werth innerhalb des Kreises um den Punkt Null mit dem Radius $r^{\frac{1}{m}}$ verstanden. Umschliesst man auch den Punkt t mit einem beliebig kleinen Kreise, so hat man ein zweifach berandetes Gebiet ohne singulären Punkt. Es wird (§. 184):

I. $$\varphi(t) = \frac{1}{2i\pi}\int\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta.$$

Das Integral ist zu führen auf den den Nullpunkt umschliessenden Kreis mit dem Radius $r^{\frac{1}{m}}$.

Daraus folgt, wenn man $t^m + \alpha$ mit u bezeichnet, wobei u ein Punkt auf einem bestimmten Blatte der Windungsfläche innerhalb des Kreises mit dem Radius r ist,

Ia. $$f(u) = \frac{1}{2i\pi m}\int\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}}\,\frac{dz}{(z-\alpha)^{\frac{1}{m}} - (u-\alpha)^{\frac{1}{m}}}.$$

Da die Werthe von z die Punkte der begrenzenden Curve bedeuten, während u irgend einen im Innern derselben gelegenen Punkt darstellt, so ist mod $(u - \alpha)^{\frac{1}{m}} <$ mod $(z - \alpha)^{\frac{1}{m}}$.

Demnach ist

$$\frac{1}{(z-\alpha)^{\frac{1}{m}} - (u-\alpha)^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{(z-\alpha)^{\frac{1}{m}}}\left[1 + \left(\frac{u-\alpha}{z-\alpha}\right)^{\frac{1}{m}} + \left(\frac{u-\alpha}{z-\alpha}\right)^{\frac{2}{m}} + \left(\frac{u-\alpha}{z-\alpha}\right)^{\frac{3}{m}} + \cdots\right],$$

und es wird (vergleiche §. 186)

II. $$f(u) = \frac{1}{2i\pi m}\left[\int\frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^{\frac{m}{m}}} + (u-\alpha)^{\frac{1}{m}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^{\frac{m+1}{m}}} + \right.$$
$$\left. + (u-\alpha)^{\frac{2}{m}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^{\frac{m+2}{m}}} + \cdots\right].$$

Die Integrale dieser Reihe beziehen sich sämmtlich auf die in allen Blättern um den Nullpunkt in positivem Umlauf geführte geschlossene Curve; in den verschiedenen Blättern erhalten $f(z)$ und $(z - \alpha)^{\frac{m+1}{m}}$ ihre vorgeschriebenen Werthe.

Die Grösse $(u - \alpha)^{\frac{1}{m}}$ und ihre Potenzen nimmt verschiedene Wurzelwerthe an, je nachdem man den Werth von $f(u)$ in einem der m Blätter bestimmen will.

Die Gleichung II. sagt in Worte gefasst aus:

Ist der Verzweigungspunkt, in welchem m Werthe der Function cyclisch zusammenhängen, nicht zugleich ein singulärer Punkt, so lassen sich die m Werthe der Function in der Umgebung desselben durch eine nach positiv ganzen Potenzen von $(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}$ *aufsteigende Reihe entwickeln. Diese Umgebung erstreckt sich über ein Gebiet, in welchem kein singulärer Punkt oder kein anderer Verzweigungspunkt der Function gelegen ist.*

Die Bedeutung der Coefficienten kann noch in anderer Weise hervorgehoben werden.

Setzt man $u=\alpha$, so folgt:

$$f(\alpha)=\frac{1}{2i\pi m}\int\frac{f(z)\,dz}{z-\alpha}.$$

Differentiirt man ferner die Gleichung nach u, was bei einer Potenzreihe durch Differentiation der einzelnen Glieder geleistet wird, so erhält man, indem man mit $(u-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}$ beide Seiten multiplicirt, und $u=\alpha$ setzt:

$$\lim_{u=\alpha}\left[f'(u)\,(u-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}\right]=\frac{1}{2i\pi m^2}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^{\frac{m+1}{m}}}.$$

Durch das nämliche Verfahren ergiebt sich:

$$\lim_{u=\alpha}\left[f''(u)\,(u-\alpha)^{\frac{2(m-1)}{m}}+\frac{m-1}{m}\,f'(u)\,(u-\alpha)^{\frac{m-2}{m}}\right]=$$

$$=\frac{2(2-m)}{m^2}\cdot\frac{1}{2i\pi m}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^{\frac{m+2}{m}}}\quad\text{u. s. f.}$$

Schreibt man die Reihe II. in der kürzeren Form:

$$f(u)=a_0+(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}a_1+(u-\alpha)^{\frac{2}{m}}a_2+\dots$$

so erkennt man, dass, falls a_1 nicht gleich Null ist, die Ableitungen $f'(u), f''(u)\dots$ bezüglich von der Ordnung $\frac{m-1}{m}, \frac{2m-1}{m}, \dots$ unendlich werden.

Verschwinden aber die auf a_0 folgenden Coefficienten, so dass die Reihe die Form erhält:

$$f(u)=a_0+(u-\alpha)^{\frac{\mu}{m}}a_\mu+(u-\alpha)^{\frac{\mu+1}{m}}a_{\mu+1}+(u-\alpha)^{\frac{\mu+2}{m}}a_{\mu+2}+\dots$$

so lautet das Aufangsglied der Entwickelung von $f'(u)$: $\frac{\mu}{m}\cdot(u-\alpha)^{\frac{\mu-m}{m}}a_\mu$, und dieser Ausdruck wird für $u=\alpha$ entweder von der Ordnung $\frac{m-\mu}{m}$ unendlich gross, oder von der Ordnung $\frac{\mu-m}{m}$ unendlich klein, je nachdem m grösser oder kleiner als μ. Für $m=\mu$ bleibt er endlich.

Es kann also die erste Ableitung einer Function in einem Verzweigungspunkte auch Null oder endlich sein. Es lässt sich aber immer eine Zahl k angeben, so dass sämmtliche Ableitungen, deren Ordnungszahl gleich oder grösser k ist, im Verzweigungspunkte unendlich werden. Denn die k^{te} Ableitung beginnt mit dem Gliede $(u-\alpha)^{\frac{\mu-km}{m}}$. Demnach hat man den Satz:

Beginnt die Entwickelung der m-deutigen Function, abgesehen von dem Gliede a_0, das auch Null sein kann, mit der Potenz $(u-\alpha)^{\frac{\mu}{m}}$, so wird im Verzweigungspunkte, wenn $k > \frac{\mu}{m}$ gewählt wird, die k^{te} Ableitung von der Ordnung $\frac{km-\mu}{m}$ unendlich.

Ist $k = \frac{\mu}{m}$ eine ganze Zahl, so bleibt die k^{te} Ableitung endlich, und alle Ableitungen für welche $k < \frac{\mu}{m}$ verschwinden.

196. Nach dem im §. 189 gelehrten Verfahren kann die Reihenentwickelung auch erweitert werden auf ein Gebiet, in welchem singuläre Punkte (wesentliche oder ausserwesentliche) der Function $f(z)$ und also auch der Function $\varphi(\zeta)$ liegen; vorausgesetzt, dass keiner dieser Punkte zugleich ein Verzweigungspunkt ist.

Heissen die singulären Punkte von $f(z)$ $c_1, c_2, \ldots c_k$, die entsprechenden von $\varphi(\zeta)$ bezüglich $\gamma_1 = (c_1-\alpha)^{\frac{1}{m}}$, $\gamma_2 = (c_2-\alpha)^{\frac{1}{m}} \ldots$ $\gamma_k = (c_k-\alpha)^{\frac{1}{m}}$, wobei jedesmal auch nur eine der m möglichen Wurzeln einen Punkt γ zu bestimmen braucht, der ein Unendlichkeitspunkt für die Function $\varphi(\zeta)$ ist, so besteht die Gleichung;

$$\text{III.}\qquad \varphi(t) = \frac{1}{2i\pi}\left[\int\limits_{(0)}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-t} - \int\limits_{(\gamma_1)}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-t} - \int\limits_{(\gamma_2)}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-t} - \cdots \int\limits_{(\gamma_k)}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-t}\right].$$

Die Integrale sind um den Punkt Null und um die Punkte γ so zu führen, dass jeder derselben zur linken bleibt.

Diese Gleichung ergiebt, wenn man die Substitution $\zeta = (z-\alpha)^{\frac{1}{m}}$, $t = (u-\alpha)^{\frac{1}{m}}$ vollzieht, für die Function $f(u)$ die Relation:

$$\text{III a.}\qquad f(u) = \frac{1}{2i\pi m}\left[\int\limits_{\alpha}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}}\,\frac{dz}{(z-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}} - \int\limits_{(c_1)}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}}\,\frac{dz}{(z-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}} - \cdots - \int\limits_{(c_k)}\right].$$

Das erste Integral ist für die äussere Begrenzung der Windungsfläche zu bilden; jedes der anderen bezieht sich auf die Curve, welche den

singulären Punkt c, der kein Verzweigungspunkt ist, umschliesst. Das erste Integral kann folglich, da u einen Punkt innerhalb der Curve bedeutet, auf welche sich die Werthe von z beziehen, nach Potenzen von $\left(\frac{u-\alpha}{z-\alpha}\right)^{\frac{1}{m}}$ entwickelt werden. In den andern Integralen bedeutet z die Punkte auf der Curve um den Punkt c, und u liegt ausserhalb dieser Curve. Mithin ist

$$\operatorname{mod}\left(\frac{\zeta-\gamma}{t-\gamma}\right)=\operatorname{mod}\frac{(z-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c-\alpha)^{\frac{1}{m}}}{(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c-\alpha)^{\frac{1}{m}}}<1,$$

und der Quotient $\frac{1}{(z-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}}$ wird durch eine Reihe darstellbar, deren Anfangsglieder lauten:

$$\frac{-1}{(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c-\alpha)^{\frac{1}{m}}}\left[1+\frac{(z-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c-\alpha)^{\frac{1}{m}}}{(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c-\alpha)^{\frac{1}{m}}}+\left[\frac{(z-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c-\alpha)^{\frac{1}{m}}}{(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c-\alpha)^{\frac{1}{m}}}\right]^2+\cdots\right].$$

Demnach folgt aus der Gleichung IIIa. die Entwickelung:

$$\text{IV.}\quad f(u)=\frac{1}{2i\pi m}\left[\int_{(\alpha)}\frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^{\frac{m}{m}}}+(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}\int_{(\alpha)}\frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^{\frac{m+1}{m}}}+\right.$$

$$\left.+(u-\alpha)^{\frac{2}{m}}\int_{(\alpha)}\frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^{\frac{m+2}{m}}}+\cdots\right]$$

$$+\frac{1}{2i\pi m}\left[\frac{1}{(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c_1-\alpha)^{\frac{1}{m}}}\int_{(c_1)}\frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}}+\right.$$

$$+\frac{1}{\left[(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c_1-\alpha)^{\frac{1}{m}}\right]^2}\int_{(c_1)}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}}\left[(z-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c_1-\alpha)^{\frac{1}{m}}\right]dz+$$

$$\left.+\frac{1}{\left[(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c_1-\alpha)^{\frac{1}{m}}\right]^3}\int_{(c_1)}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}}\left[(z-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c_1-\alpha)^{\frac{1}{m}}\right]^2dz+\cdots\right]$$

$$+\;\cdot$$

$$+\frac{1}{2i\pi m}\left[\frac{1}{(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c_k-\alpha)^{\frac{1}{m}}}\int_{(c_k)}\frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}}+\right.$$

$$+\frac{1}{\left[(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}-(c_k-\alpha)^{\frac{1}{m}}\right]^2}\int_{(c_k)}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}}\left[(z-\alpha^{\frac{1}{m}}-(c_k-\alpha)^{\frac{1}{m}}\right]dz+\cdots$$

Der Punkt c_i ist ein ausserwesentlich oder ein wesentlich singulärer, je nachdem die auf diesen Punkt bezügliche Entwickelung eine endliche ist oder nicht. Im ersteren Falle lässt sich eine ganze Zahl u angeben, so dass:

$$f(u)\left[(u-\alpha)^{\frac{1}{m'}}-(c_i-\alpha)^{\frac{1}{m}}\right]^n$$

für $u = c$ endlich wird.

197. Ist der Verzweigungspunkt α, in welchem m Blätter der Function cyclisch zusammenhängen, zugleich ein singulärer, so wird in der Function $\varphi(\zeta)$, welche aus $f(z)$ durch die Substitution $\zeta = (z-\alpha)^{\frac{1}{m}}$ hervorgeht, der Punkt $\zeta = 0$ gleichfalls ein singulärer. Mithin lautet die Entwickelung (§. 189) innerhalb eines Gebietes, in welchem keine weiteren singulären Punkte liegen:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2i\pi}\left[\int\limits_{(0)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta + t\int\limits_{(0)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta + t^2\int\limits_{(0)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^3}\,d\zeta + \cdots\right]$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{(0)}\varphi(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{t^2}\int\limits_{(0)}\varphi(\zeta)\,\zeta\,d\zeta + \frac{1}{t^3}\int\limits_{(0)}\varphi(\zeta)\,\zeta^2\,d\zeta + \cdots\right].$$

Derselben entspricht für $f(u)$ die Formel:

$$\text{V.}\qquad f(u) = \frac{1}{2i\pi m}\left[\int\limits_{(\alpha)}\frac{f(z)}{(z-\alpha)}\,dz + (u-\alpha)^{\frac{1}{m}}\int\limits_{(\alpha)}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m+1}{m}}}\,dz + \right.$$

$$\left. + (u-\alpha)^{\frac{2}{m}}\int\limits_{(\alpha)}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m+2}{m}}}\,dz + \cdots\right]$$

$$+\frac{1}{2i\pi m}\left[\frac{1}{(u-\alpha)^{\frac{1}{m}}}\int\limits_{(\alpha)}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}}\,dz + \frac{1}{(u-\alpha)^{\frac{2}{m}}}\int\limits_{(\alpha)}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m-2}{m}}}\,dz + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(u-\alpha)^{\frac{3}{m}}}\int\limits_{(\alpha)}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\frac{m-3}{m}}}\,dz + \cdots\right].$$

Die Integrale sind hier längs einer den Punkt α umschliessenden, durch Umlauf auf allen Blättern vollständig geschlossenen Curve zu bilden, die in beliebiger Nähe des Verzweigungspunktes verlaufen kann.

Der Punkt selbst ist ein ausserwesentlich oder ein wesentlich singulärer, je nachdem der zweite Theil der Entwickelung eine endliche Gliederzahl besitzt oder nicht. Im ersten Falle lässt sich eine ganze Zahl n angeben, so dass

$$f(u)\,[u-\alpha]^{\frac{n}{m}}$$

für $u = \alpha$ endlich bleibt. $f(u)$ wird dann im Verzweigungspunkte von der Ordnung $\frac{n}{m}$ unendlich.

Das Integral $\int f(z)\,dz$ geführt um den Verzweigungspunkt in geschlossenem Umlauf bekommt nur dann den Werth Null, wenn der Coefficient des Gliedes $\frac{1}{u-\alpha}$ Null ist; denn dieser Coefficient ist das Integral selbst. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist der Verzweigungspunkt (trotzdem dass er zugleich ein singulärer ist) kein logarithmischer Verzweigungspunkt für die mehrdeutige Integralfunction.

Das Integral, hingeleitet bis in den Verzweigungspunkt, erhält einen endlichen Werth nur dann, wenn auch $\int \varphi(\zeta)\,\zeta^{m-1}\,d\zeta$ endlich bleibt. Das erfordert (§. 181), dass

$$[\varphi(\zeta)\cdot\zeta^m]_{\zeta=0} = [f(z)\,(z-\alpha)]_{z=\alpha}$$

verschwindet. Es müssen also in dem zweiten Theile der obigen Entwickelung alle Glieder, welche im Nenner eine Potenz von $u-\alpha$ mit einem Exponenten gleich 1 oder grösser als 1 enthalten, verschwinden; die Function muss also im Verzweigungspunkte, der nur ein ausserwesentlich singulärer sein kann, von niederer als der ersten Ordnung unendlich werden.

198. Ist der unendlich ferne Punkt $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt, in welchem m Werthe der Function cyclisch zusammenhängen, und liegen alle singulären Punkte der Function innerhalb eines endlichen Gebietes, so wird durch Substitution $z = \frac{1}{z'}$ $f(z)$ in $f\left(\frac{1}{z'}\right) = \psi(z')$ übergeführt, für welche der Nullpunkt der Verzweigungspunkt ist, und welche innerhalb eines endlichen Gebietes um den Nullpunkt keine singulären Punkte besitzt.

Demnach ist (§. 194 II.) für einen beliebigen Punkt u' dieses Gebietes:

$$\psi(u') = \frac{1}{2i\pi m}\left[\int\limits_{(0)}\frac{\psi(z')\,dz'}{z'^{\frac{m}{m}}} + u'^{\frac{1}{m}}\int\limits_{(0)}\frac{\psi(z')\,dz'}{z'^{\frac{m+1}{m}}} + u'^{\frac{2}{m}}\int\limits_{(0)}\frac{\psi(z')\,dz'}{z'^{\frac{m+2}{m}}} + \cdots\right].$$

Die Integrale sind in positivem Umlaufe um den Nullpunkt zu führen. Daraus folgt, dass für die ursprüngliche Function die Entwickelung lautet:

$$f(u) = \frac{1}{2i\pi m}\left[\int\limits_{-(\infty)}\frac{f(z)\,dz}{z} + \frac{1}{u^{\frac{1}{m}}}\int\limits_{-(\infty)}\frac{f(z)\,dz}{z^{1-\frac{1}{m}}} + \frac{1}{u^{\frac{2}{m}}}\int\limits_{-(\infty)}\frac{f(z)\,dz}{z^{1-\frac{2}{m}}} + \cdots\right],$$

Die Integrale sind auf den Unendlichkeitspunkt zu beziehen, dass heisst

auf einer, den Nullpunkt umschliessenden Curve zu führen, deren Punkte beliebig weit liegen, und zwar in der Richtung, dass die endliche Fläche ebenfalls zur linken bleibt.

Ist der Punkt $z = \infty$ zugleich ein singulärer, so erhält man nach der nämlichen Substitution aus der Formel V. des §. 195 die Entwickelung:

$$f(u) = \frac{1}{2i\pi m}\left[\int\limits_{-(\infty)} \frac{f(z)\,dz}{z} + \frac{1}{u^{\frac{1}{m}}}\cdot\int\limits_{-(\infty)} \frac{f(z)\,dz}{z^{1-\frac{1}{m}}} + \frac{1}{u^{\frac{2}{m}}}\int\limits_{-(\infty)} \frac{f(z)\,dz}{z^{1-\frac{2}{m}}} + \cdots\right]$$

$$+ \frac{1}{2i\pi m}\left[u^{\frac{1}{m}}\int\limits_{-(\infty)} \frac{f(z)\,dz}{z^{1+\frac{1}{m}}} + u^{\frac{2}{m}}\int\limits_{-(\infty)} \frac{f(z)\,dz}{z^{1+\frac{2}{m}}} + u^{\frac{3}{m}}\int\limits_{-(\infty)} \frac{f(z)\,dz}{z^{1+\frac{3}{m}}} + \cdots\right].$$

Ist der Unendlichkeitspunkt ein ausserwesentlich singulärer, so lässt sich eine ganze Zahl n angeben, so dass

$$\left[\frac{f(u)}{u^{\frac{n}{m}}}\right]_{u=\infty}$$

eine endliche Grösse ist. Die Function wird dann von der Ordnung $\frac{n}{m}$ im Verzweigungspunkte unendlich, und der zweite Theil der obigen Entwickelung enthält nur die Potenzen $u^{\frac{1}{m}}$ bis $u^{\frac{n}{m}}$.

Das Integral $\int f(z)\,dz$ geführt um den Unendlichkeitspunkt hat den Werth Null, wenn der Factor des Gliedes $\frac{1}{u}$ verschwindet.

Das Integral, geführt bis in den Unendlichkeitspunkt, hat einen endlichen Werth wenn $\left[\frac{f\left(\frac{1}{z'}\right)}{z'}\right]$ für $z' = 0$ verschwindet; also auch $[f(z)\cdot z]_{z=\infty} = 0$ wird. Im $m-1$ fachen Verzweigungspunkte $z = \infty$ muss also die Function von höherer als der ersten Ordnung verschwinden, d. h. derselbe kann kein singulärer Punkt sein, und es muss der erste Theil der Entwickelung mit dem Gliede $\frac{1}{u^{\frac{m+1}{m}}}$ beginnen.

199. Die Untersuchungen über die Beschaffenheit der mehrdeutigen Functionen in der Umgebung eines Verzweigungspunktes sind nothwendig, um eine abschliessende Einsicht in die Theorie der algebraischen Functionen zu gewinnen.

An die Spitze dieser Untersuchungen lässt sich ein Satz stellen, durch welchen die algebraischen Functionen vollständig als besondere Classe unter den mehrdeutigen charakterisirt werden.

Denn ebenso wie sich unter den eindeutigen analytischen Functionen die rationalen algebraischen definiren liessen als diejenigen, welche nur ausserwesentliche singuläre Punkte (im Endlichen oder Unendlichen) besitzen, gilt für die mehrdeutigen Functionen der Satz:*) *Wenn eine Function w für jeden Werth von z n Werthe hat, und in der ganzen unendlichen Ebene nur ausserwesentliche singuläre Punkte und Verzweigungspunkte der oben erörterten Art besitzt, so ist sie Wurzel einer algebraischen Gleichung vom Grade n in w, und vom Grade m in z: $f(z^m, w^n) = 0$, wobei m die Summe der Ordnungszahlen der Unendlichkeitspunkte angiebt.*

Es seien die n Werthe der Function mit $w_1, w_2, \ldots w_n$ bezeichnet; ferner seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ die im Endlichen gelegenen Unendlichkeitspunkte, die nicht zugleich Verzweigungspunkte sind; in jedem derselben wird ein Zweig der Function unendlich, und es mögen die Ordnungen bezeichnet werden mit $i_1, i_2, \ldots i_\mu$, so dass also

$$w(z-\alpha_1)^{i_1};\ w(z-\alpha_2)^{i_2};\ \ldots\ w(z-\alpha_\mu)^{i_\mu}$$

endlich bleiben; dabei ist unter w jedesmal derjenige Zweig zu verstehen, welcher in dem betreffenden Punkte α unendlich wird. Es können auch Punkte α aufeinander fallen.

Ferner seien $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$ die im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte, die zugleich Unendlichkeitspunkte sind; in solch einem Punkte mögen bezüglich $k_1, k_2, \ldots k_\nu$ Blätter der Function zuammenhängen; und es werde die Ordnung des Unendlichen (§. 197) bezüglich mit $l_1, l_2, \ldots l_\nu$ bezeichnet; es sind also die Producte

$$w(z-\beta_1)^{\frac{l_1}{k_1}};\ w(z-\beta_2)^{\frac{l_2}{k_2}};\ \ldots\ w(z-\beta_\nu)^{\frac{l_\nu}{k_\nu}}$$

endlich. Endlich sei der Punkt $z=\infty$ ein Verzweigungspunkt, in welchem k Blätter zusammenhängen, seine Ordnungszahl heisse l, so dass also

$$w\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{l}{k}}$$

endlich bleibt. Es sei

$$m = (i_1 + i_2 + \cdots i_\mu) + (k_1 + k_2 + \cdots k_\nu) + l.$$

Bildet man die in Bezug auf die Werthe von w symmetrische Function

$$S = (\sigma - w_1)(\sigma - w_2)\ldots(\sigma - w_n),$$

so ist dieselbe, wie überhaupt jede symmetrische Function der Grössen w, eine einwerthige Function von z; denn auch solche Wege, bei denen sich gewisse Werthe von w cyclisch unter einander vertauschen,

*) Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen. Werke S. 101. Briot und Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques. 2. éd. pag. 216.

führen doch stets zu demselben Werthe der Function S. In jedem Punkte α_μ wird S unendlich von der Ordnung i_μ, in jedem Punkte β_ν unendlich von der Ordnung l_ν, und schliesslich im Punkte $z = \infty$ unendlich von der Ordnung l. Mithin muss die einwerthige Function S, da sie nur ausserwesentliche Singularitäten besitzt, eine rational gebrochene Function von z sein, (§. 190) die man in der Form ansetzen kann:

$$S = \frac{f(z, \sigma)}{\varphi(z)},$$

wobei

$$\varphi(z) = (z - \alpha_1)^{i_1} (z - \alpha_2)^{i_2} \dots (z - \alpha_\mu)^{i_\mu} (z - \beta_1)^{l_1} \dots (z - \beta_\nu)^{l_\nu}$$

und die Ordnung von f in Bezug auf z gleich m ist. Mithin ist

$$S \,.\, \varphi(z) = f(z, \sigma)$$

eine ganze Function m^{ten} Grades in z und eine ganze Function n^{ten} Grades in σ.

Da nun $f(z^m, \sigma^n)$ als Gleichung n^{ten} Grades in σ betrachtet, verschwindet, sobald σ einen der Werthe $w_1, w_2, \dots w_n$ annimmt, so ist, wie die Behauptung besagt, w Wurzel der algebraischen Gleichung:

$$f(z^m, w^n) = 0.$$

Dieser algebraische Ausdruck ist irreducibel, d. h. er lässt sich nicht in rationale Factoren niederen Grades in w zerlegen, sobald die n im allgemeinen verschiedenen Werthe der Function w derart zusammenhängen, dass man durch geeignete Wahl von Wegen, welche die Verzweigungspunkte umschliessen, jeden Functionswerth w_i in jeden anderen w_k stetig überführen kann; mit anderen Worten: wenn die zur eindeutigen Darstellung der Function w erforderliche n-blättrige Fläche nicht nur in einzelnen Punkten, sondern längs ganzer Verzweigungsschnitte zusammenhängt.

Denn zerfällt $f(z^m, w^n)$ in das Product $g(z, w) \,.\, h(z, w)$, so müsste für jeden Werth von z, da keiner dieser Factoren, welche von niederem als dem n^{ten} Grade in w sind, für alle n Werthe w verschwinden kann, jeder der beiden Factoren Null sein, z. B.

$$g(z, w_i) = 0, \qquad h(z, w_k) = 0.$$

Da nun durch jede algebraische Gleichung w als stetige Function von z bestimmt wird, so lässt sich um jede Stelle ein endlicher Bereich angeben, in welchem $g(z, w_i)$ als Function von z betrachtet und ebenso $h(z, w_k)$ überall den Werth Null hat. Daraus folgt aber, dass jede dieser Functionen in der ganzen zusammenhängenden n-blättrigen Fläche gleich Null ist; denn man kann aus dem endlichen Gebiete die Function in jedes Blatt vermittelst der Reihenentwickelung nach positiv ganzen Potenzen fortsetzen. Da bei der Annahme zufolge w_i in jeden anderen Functionswerth stetig übergeführt werden kann, so ist also

$$g(z, w_1) = 0, \; g(z, w_2) = 0, \dots g(z, w_n) = 0,$$

was nur möglich ist, wenn g vom n^{ten} Grade in Bezug auf w ist. Wenn die Summe der Ordnungen des Unendlichen der Function w gleich m ist, so muss auch g vom m^{ten} Grade in z sein, d. h. der Factor $h(z, w_k)$ ist auch in Bezug auf z von 0ter Ordnung. Also ist, wie zu beweisen war:

$$f(z^m, w^n) = \text{Const. } g(z^m, w^n).$$

Umgekehrt erkennt man: Wenn die algebraische Gleichung $f(z, w) = 0$ so beschaffen ist, dass man von einem beliebigen Anfangswerthe w bei beliebiger Umkreisung der Verzweigungspunkte nicht zu jedem andern Wurzelwerthe gelangen kann, so zerfällt die algebraische Form in rationale Factoren; denn jeder zusammenhängende Cyclus genügt einer irreducibelen Gleichung niederen Grades mit rationalen Coefficienten.

200. Es sei jetzt die irreducibele Gleichung $f(z^m, w^n) = 0$ gegeben; so sollen Kriterien aufgestellt werden, nach denen über die Eigenschaften eines jeden kritischen Punktes entschieden wird, und eine Methode, durch welche man die für die Umgebung desselben giltigen Reihenentwickelungen erhält.

Bei dieser Untersuchung kann man sich auf Punkte beschränken, in denen z und w endliche Werthe erhalten; denn diejenigen Stellen, bei denen dies nicht der Fall ist, werden durch die Substitution $z = \frac{1}{z'}$, bezüglich $w = \frac{1}{w'}$ in Stellen mit endlichen Werthen transformirt.

Es soll nun zunächst gezeigt werden, wie man gewisse einfache Fälle erledigen kann, ohne besondere Methoden zu Hülfe zu nehmen. Daraus wird sich die allgemeinste Problemstellung bei beliebigen Bedingungen ergeben, die im §. 202 ihre Erledigung findet.

Es sei bekannt, dass für einen bestimmten Werth $z = a$ die Function w den Werth b annimmt, so lässt sich die algebraische Form $f(z, w)$ nach Potenzen von $(z - a)$ und $(w - b)$ entwickeln (§. 94). Die Coefficienten dieser Entwickelung sind die partiellen Ableitungen von f nach z und w, gebildet für die Stelle $z = a$, $w = b$; sie sollen im Folgenden der Kürze halber bezeichnet werden:

$$\left(\frac{\partial^k f(z, w)}{\partial z^{k-p}\, \partial w^p}\right)_{a,\, b} = f_{k-p,\, p}.$$

Alsdann wird:

$$\begin{aligned} f(z^m, w^n) = &\left\{f_{1,0}(z-a) + f_{0,1}(w-b)\right\} + \\ &+ \frac{1}{2!}\left\{f_{2,0}(z-a)^2 + 2 f_{1,1}(z-a)(w-b) + f_{0,2}(w-b)^2\right\} + \\ &+ \cdots + \frac{1}{k!}\left\{f_{k,0}(z-a)^k + k_1 f_{k-1,1}(z-a)^{k-1}(w-b) + \cdots\right. \\ &\left.+ \cdots + k_p f_{k-p,\,p}(z-a)^{k-p}(w-b)^p + \cdots f_{0,k}(w-b)^k\right\} + \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Diese Summe schliesst mit Gliedern, in denen $z - a$ bis zur m^{ten}, $w - b$ bis zur n^{ten} Potenz ansteigt, ab.

Ist der Punkt $z = a$, $w = b$ ein regulärer für die Function w, so ist $f_{0,1}$ von Null verschieden; in diesem Falle gilt für die Umgebung des Punktes, wie im §. 188 ausgeführt wurde, eine Reihenentwickelung nach positiven ganzen Potenzen:

$$w - b = (z-a)\left(\frac{dw}{dz}\right)_{a,b} + \frac{1}{2!}(z-a)^2\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)_{a,b} + \frac{1}{3!}(z-a)^3\left(\frac{d^3w}{dz^3}\right)_{a,b} + \dots$$

Die Ableitungen $\frac{d^kw}{dz^k}$ werden aus der Formel $\frac{dw}{dz} = -\frac{f_{1,0}}{f_{0,1}}$ durch successive Differentiation gewonnen. Sind insbesondere $f_{1,0}, f_{2,0}, \dots f_{k-1,0}$ an der Stelle $z = a$, $w = b$ sämmtlich gleich Null, so beginnt die Reihenentwickelung mit dem Gliede:

$$w - b = \frac{1}{k!}(z-a)^k\left(\frac{d^kw}{dz^k}\right)_{a,b} + \cdots \qquad \frac{d^kw}{dz^k} = -\frac{f_{k,0}}{f_{0,1}}.$$

Die Tangente der algebraischen Curve ist alsdann in dem betreffenden Punkte parallel der Abscissenaxe und hat eine Berührung von der Ordnung $k - 1$; sie schneidet in k consecutiven Punkten.

Der Punkt $z = a$, $w = b$ ist ein kritischer, wenn für denselben $f_{0,1} = 0$ wird.

Als erster Fall ist hierbei zu betrachten, dass $f_{1,0}$ von Null verschieden ist. Dann kann in der soeben erörterten Weise zunächst z nach ganzen Potenzen von w entwickelt werden; und nimmt man, um hierbei gleich das allgemeinste Vorkommniss zu erwähnen, an, dass für die kritische Stelle auch sämmtliche partielle Ableitungen

$$f_{0,2},\ f_{0,3},\ \dots f_{0,k-1}$$

verschwinden, so erhält man die Entwickelung:

$$z - a = \frac{1}{k!}(w-b)^k\left(\frac{d^kz}{dw^k}\right)_{a,b} + \frac{1}{k+1!}(w-b)^{k+1}\left(\frac{d^{k+1}z}{dw^{k+1}}\right)_{a,b} + \cdots$$

oder:

$$(z-a) = (w-b)^k\,\alpha\,[1 + \alpha_1(w-b) + \alpha_2(w-b)^2 + \dots R_n(w-b)^n]$$
$$(\operatorname{Lim} R_n = 0).$$

Zieht man auf beiden Seiten die k^{te} Wurzel aus, und ordnet die rechte Seite nach Potenzen von $w - b$ vermittelst des Binomialtheorems und seiner Erweiterung auf Polynome, so folgt:

$$\left(\frac{z-a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}} = (w-b)[1+\alpha_1'(w-b)+\alpha_2'(w-b)^2+\dots R_n'(w-b)^n] \ (\operatorname{Lim} R_n'=0).$$

Indem man $\left(\frac{z-a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}$ mit t bezeichnet, hat man nun das im §. 192 discutirte Problem zu lösen, die Reihe:

$$t = (w - b)\,[1 + \alpha_1'(w - b) + \alpha_2'(w - b)^2 + \dots]$$

umzukehren. Man findet hierdurch eine Entwickelung von der Form:

$$w - b = t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \dots$$

also:

$$w - b = \left(\frac{z-a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}} + \beta_2\left(\frac{z-a}{\alpha}\right)^{\frac{2}{k}} + \beta_3\left(\frac{z-a}{\alpha}\right)^{\frac{3}{k}} + \dots \qquad \alpha = -\frac{1}{k!}\frac{f_{0,k}}{f_{1,0}}.$$

Der kritische Punkt ist demnach ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $k - 1$; in demselben kängen k der n Blätter, welche zur eindeutigen Darstellung der Function w dienen, cyclisch zusammen. Ist der betreffende Punkt ein reeller Punkt einer algebraischen Curve mit reellen Coefficienten, so hat hier das reelle Bild der Curve eine zur w-Axe parallele Tangente mit k — 1-facher Berührung. Die Curve durchsetzt zugleich die Tangente (Wendepunkt), wenn k eine ungerade Zahl ist.

201. Nunmehr ist der kritische Punkt zu untersuchen für den Fall, dass gleichzeitig $f_{0,1} = 0$ und $f_{1,0} = 0$ sind. Der Kürze halber werde fortan $z - a$ einfach mit z, $w - b$ mit w bezeichnet, was nur aussagt, dass an Stelle des Punktes $z = a$, $w = b$ der Coordinatenanfangspunkt tritt; ferner sei $w_k = \frac{d^k w}{dz^k}$. Verschwinden dann ausser den beiden ersten Ableitungen sämmtliche partielle Ableitungen von der 2ten, $3^{\text{ten}} \dots k - 1^{\text{ten}}$ Ordnung, so lautet die entwickelte Gleichung:

$$0 = f(z+a, w+b) = \frac{1}{k!}\left\{f_{k,0}z^k + k_1 f_{k-1,1}z^{k-1}w + \dots k_p f_{k-p,p}z^{k-p}w^p + \dots f_{0,k}w^k\right\} + \\ + \frac{1}{k+1!}\left\{f_{k+1,0}\,z^{k+1} + \dots\right\} + \dots$$

Der betreffende Punkt heisst in diesem Falle ein k-elementiger Punkt*), weil hier jede durch denselben gelegte Gerade $w = \alpha z$ mindestens k Punkte mit der Curve gemein hat.

Setzt man in der Gleichung für z den Werth Null, so erhält man eine Gleichung n^{ten} Grades für w; von den Wurzeln derselben werden, wenn wir zunächst annehmen, dass $f_{0,k}$ nicht gleich Null ist, k Werthe gleich Null. Denn w^k lässt sich als Factor herausheben. Es stossen also jetzt k Blätter in dem kritischen Punkte zusammen, und es fragt sich ob sich dieselben hier verzweigen.

Zu dem Zwecke ist der Quotient $\frac{w}{z}$ in der Nähe des k-elementigen Punktes zu untersuchen, um festzustellen, welche Werthe die erste Ableitung $\frac{dw}{dz} = \text{Lim}\,\frac{w}{z}$, sowie die höheren in demselben erhalten. Durch Division mit z^k bilde man die Gleichung:

$$0 = \frac{1}{k!}\left\{f_{k,0} + k_1\,f_{k-1,1}\left(\frac{w}{z}\right) + \dots k_p\,f_{k-p,p}\left(\frac{w}{z}\right)^p + \dots f_{0,k}\left(\frac{w}{z}\right)^k\right\} + \\ + \frac{z}{k+1!}\left\{f_{k+1,0} + \dots\right\} + \dots$$

---

*) Nöther, Math. Annal. Bd. IX. S. 169.

die in Bezug auf den Quotienten vom n^{ten} Grade wird, und für $z = 0$ nur k endliche Werthe liefert, als Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{1}{k!}\left(f_{k,0} + k_1 f_{k-1,1} w_1 + \cdots k_p f_{k-p,p} w_1^p + \cdots f_{0,k} w_1^k\right) = \Phi_k = 0.$$

Unserer Annahme zufolge sind die k Wurzeln dieser Gleichung bestimmte, nicht unendliche Grössen; wir wollen weiter annehmen, dass sie auch alle von einander verschieden sind.

In dem k-elementigen Punkte findet dann keine Verzweigung statt; denn sämmtliche höhere Ableitungen, welche bezüglich zu den verschiedenen Werthen von w gehören, bleiben endlich. Dieselben sind einem Systeme zu entnehmen, welches analog den im §. 188 aufgestellten durch successive totale Differentiation erhalten wird.

Bezeichnet man $\frac{w}{z}$ mit w_1, weil $\lim\limits_{z=0}\left(\frac{w}{z}\right) = w_1 = \frac{dw}{dz}$, so wird allgemein:

$$\frac{d^n w}{dz^n} = z\,\frac{d^n w_1}{dz^n} + n\,\frac{d^{n-1} w_1}{dz^{n-1}}, \text{ also für } z = 0\text{: } \frac{d^{n-1} w_1}{dz^{n-1}} = \frac{1}{n}\,\frac{d^n w}{dz^n}.$$

Nun lautet die Gleichung für w_1 geordnet nach Potenzen von z

$$\Phi_k + z\Phi_{k+1} + z^2\Phi_{k+2} + \cdots = 0,$$

und aus derselben erhält man zur Bestimmung der Ableitungen an der Stelle $z = 0$ die Gleichungen:

$$\frac{w_2}{2!}\frac{\partial \Phi_k}{\partial w_1} + \Phi_{k+1} = 0,$$

$$\frac{w_3}{3!}\frac{\partial \Phi_k}{\partial w_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{w_2}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial w_1^2} + \frac{1}{2}\,w_2\,\frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial w_1} + \Phi_{k+2} = 0,$$

$$\frac{w_4}{4!}\frac{\partial \Phi_k}{\partial w_1} + \frac{w_3}{3!}\left(\frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial w_1} + \frac{w_2}{2}\,\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial w_1^2}\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial \Phi_{k+2}}{\partial w_1}\,\frac{w_2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \Phi_{k+1}}{\partial w_1^2}\left(\frac{w_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\,\frac{\partial^3 \Phi_k}{\partial w_1^3}\left(\frac{w_2}{2}\right)^3\right) + \Phi_{k+3} = 0$$

. . . .

Diese Gleichungen liefern successive endliche bestimmte Werthe für $w_2, w_3 \ldots$, denn der Factor $\frac{\partial \Phi_k}{\partial w_1}$ ist von Null verschieden. Entsprechend den verschiedenen Werthen von w_1 ergeben sich durchaus eindeutig verschiedene Werthe der höheren Ableitungen, und demnach k verschiedene Reihenentwickelungen.

Ich formulire das Resultat in dem Satze: *Sind in dem k-elementigen Punkte sämmtliche Werthe der ersten Ableitung endlich und von einander verschieden, so stossen in diesem Punkte k Functionselemente zusammen, von denen jedes nur ein einfaches ist, d. h. jedes ist durch eine Reihe nach positiven ganzen Potenzen ausdrückbar.*

Ist der betreffende Punkt ein reeller, und sind die k Werthe der ersten Ableitung ebenfalls reell, so gehen durch den k-elementigen Punkt k Aeste der algebraischen Curve mit getrennten Tangentenrichtungen hindurch; derselbe heisst dann ein k-facher Punkt ohne Verzweigung. Wird eine Wurzel der Gleichung $\Phi_k = 0$ unendlich, so heisst dies $f_{0,k}$ ist Null; Φ_k reducirt sich auf eine Gleichung $k - 1^{ter}$ Ordnung. Um das Functionselement zu erhalten, welches zu der einen unendlichen Wurzel gehört, entwickele man zunächst, wie am Schlusse des §. 199, z als Function von w. Die Reihe beginnt mit dem Gliede w^2, oder mit einer höheren Potenz von w, wenn auch weitere auf einander folgende Werthe der Ableitungen von z nach w verschwinden. Ist das Anfangsglied $w^{k'}$, so erhält man durch Umkehr ein k'-fach verzweigtes Functionselement, welches mit dem Gliede $z^{\frac{1}{k'}}$ beginnt.

Geometrisch sagt dies aus: Im $k$fachen Punkte besitzt ein Ast eine zur y-Axe parallele Tangente, auf welcher k' consecutive Punkte liegen, oder welche eine Berührung von der Ordnung $k' - 1$ mit dem Curvenaste besitzt.

Der Satz bleibt bestehen für jede einfache Wurzel von $\Phi_k = 0$, auch wenn andere Wurzeln mehrfach vorkommen. Aber für eine mehrfach zählende Wurzel gilt er nicht; denn weil für dieselbe $\frac{\partial \Phi_k}{\partial w_1} = 0$ wird, so gehören zu einer solchen im allgemeinen nicht mehr endliche Werthe höherer Ableitungen. Sonach bleibt nur noch die Frage zu beantworten: wie gestaltet sich die Entwickelung für einen mehrfach zählenden endlichen oder unendlichen Werth von w_1?

202. Wiewohl auch diese Frage durch successive Substitutionen gelöst werden kann*), und dieses Verfahren den Vorzug hat, dass es nur den Satz für die Möglichkeit der Reihenentwickelung in einem regulären Punkte einer algebraischen Function braucht, um daraus die Existenz und Beschaffenheit der Reihenentwickelungen im singulären Punkte abzuleiten, so erscheint es doch zweckmässig, da die Existenz der Reihenentwickelung nach den allgemeinen Untersuchungen in diesem Capitel feststeht, auf die von Newton angegebene Methode zurückzugehen, welche von Puiseux ausgebildet wurde**).

---

*) Siehe Hamburger: Ueber die Entwickelung algebraischer Functionen in Reihen. Zeitschrift f. Math. u. Physik. Bd. XVI. Nöther: Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function. Math. Annal. Bd. IX.

**) Newton in den Briefen an Oldenburg 1676 Juni 13 und October 24. Die Newton'sche Methode wurde erläutert und bewiesen von Stirling, der von derselben sagt: „quae est omnium quam quis excogitare potest, generalissima et elegantissima", lineae tertii ordinis 1717; Cramer, Analyse des lignes courbes. 1750; Puiseux, Untersuchungen über die algebraischen Functionen. Deutsch von Fischer. Halle 1861. Vergleiche auch die Darstellung von Briot und Bouquet: Théorie des fonctions elliptiques.

Die Function $f(z+a, w+b)=0$, welche in der Umgebung der Stelle $z=0$, $w=0$ zu untersuchen ist, während dieser Punkt ein k-elementiger ist, werde nach Potenzen von z und w geordnet. Da wir nunmehr annehmen müssen, dass auch einige der partiellen Ableitungen k^{ter} Ordnung (insbesondere $f_{0,k}$) verschwinden können, so denken wir uns die Glieder der Entwickelung in folgender Weise geordnet. Wir suchen das von w freie Glied, in welchem z in der niedrigsten Potenz vorkommt; ein solches muss vorhanden sein, denn sonst liesse sich der Factor w absondern, die Gleichung wäre nicht irreducibel. Dieses Glied sei z^l, sein Coefficient $A_{l,0}$. Alsdann bestimme man das von z freie Glied, bei welchem w in der niedrigsten Potenz vorkommt. Dasselbe heisse $A_{0,h} w^h$. Zwischen diese beiden Glieder ordne man alle diejenigen Glieder von der Form $A_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta$ ein, deren Exponenten α und β bezüglich kleiner sind, als l und h, während von den Gliedern mit gleicher Potenz z^α (oder w^β) immer nur dasjenige genommen wird, bei welchem der Exponent von w (resp. z) am kleinsten ist. Die auf diese Weise ausgewählten Glieder können alsdann so geordnet werden, dass die Reihe der Zahlen α eine von l bis 0 abnehmende, die Reihe der Zahlen β eine von 0 bis h wachsende ist. Die Gesammtheit aller übrigen Glieder, falls noch welche nachbleiben, werde mit $\varphi(z,w)$ bezeichnet, so dass wir das Aggregat in der Form:

$$f(z+a,w+b) = [A_{l,0} z^l + \sum A_{\alpha,\beta} z^\alpha w^\beta + A_{0,h} w^h] + \varphi(z,w) = 0$$

anschreiben *). Da der Punkt als ein k-elementiger vorausgesetzt wurde, so kommt unter den in der Klammer stehenden Ausdrücken sicherlich ein Glied k^{ter} Dimension vor. Für $z=0$ werden h Werthe von w gleich Null, es handelt sich also darum, Entwickelungen dieser h Wurzeln nach steigenden Potenzen von z zu gewinnen.

Solch eine Entwickelung beginnt mit dem Gliede: $w = v z^\mu \ldots$, wobei μ eine ganze oder gebrochene positive Zahl sein muss. Ist die Reihe bekannt, so können auch alle Potenzen von w durch Potenzreihen ausgedrückt werden, welche innerhalb des nämlichen Convergenzkreises gültig sind, und zwar beginnt die Entwickelung von w^β mit dem Gliede: $v^\beta z^{\beta\mu}$. Substituirt man dann diese Reihen in die obige Form, so muss der Ausdruck identisch verschwinden: d. h. die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von z müssen einzeln Null sein.

*) Beispiel: Aus der Entwickelung: $A_{1,5} z w^5 + A_{5,2} z^5 w^2 + A_{1,6} z w^6 + A_{0,7} w^7 + A_{7,1} z^7 w + A_{4,4} z^4 w^4 + A_{0,8} w^8 + A_{9,0} z^9 + A_{5,4} z^5 w^4 + A_{7,2} z^7 w^2 + A_{10,0} z^{10} = 0$, bei welcher der Punkt $z=0$, $w=0$ ein 6-elementiger ist, sind die Glieder zu entnehmen:

$$A_{9,0} z^9 + A_{7,1} z^7 w + A_{5,2} z^5 w^2 + A_{4,4} z^4 w^4 + A_{1,5} z w^5 + A_{0,7} w^7;$$

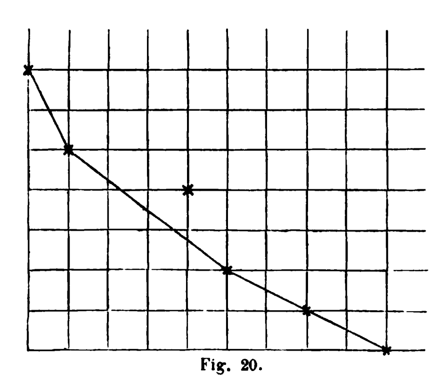
alle übrigen gehören dem Aggregate $\varphi(z,w)$ an.

Durch die Substitution $w = vz^{\mu}$, $w^{\beta} = v^{\beta} z^{\beta\mu}$ erhält der obige Ausdruck die Form:

$$[A_{l,0} z^l + \sum A_{\alpha,\beta} v^{\beta} z^{\alpha} z^{\beta\mu} + A_{0,h} v^h z^{h\mu}] + \varphi(z, vz^{\mu}).$$

Bei Berücksichtigung weiterer Glieder von w treten Glieder auf, deren Dimension sicherlich grösser ist als die der angeschriebenen. Aber auch unter den angeschriebenen sind, zufolge der getroffenen Auswahl, die Dimensionen der in $\varphi(z, vz^{\mu})$ vorkommenden Glieder sicherlich grösser, als die Dimensionen von Gliedern die in der Klammer stehen; denn wenn ein Glied $z^{\alpha} w^{\beta}$ in φ vorkommt, so giebt es in der Klammer ein Glied, bei welchem mindestens einer der Exponenten kleiner ist α bezüglich β. Ist nun der Werth von μ bekannt, so ist es leicht, diejenigen Klammerglieder anzugeben, bei denen der Exponent am kleinsten ist; es entsteht aber, da μ erst ermittelt werden soll, die umgekehrte Frage: Welche Annahme über Glieder von gleicher kleinster Dimension in der Klammer führt zu einer rationalen Bestimmung von μ? und muss ein auf diese Weise gefundener Werth von μ nothwendig der Exponent des Anfangsgliedes einer Reihenentwickelung sein?

Die erste Frage lässt sich in anschaulicher Weise lösen: Man zeichne in der Ebene das rechtwinklige Coordinatensystem, mit den Axen OX und OY, und markire die Werthe von α und β, welche unter den Exponenten in den Gliedern der Klammer auftreten, je durch einen Punkt mit den Coordinaten $x = \alpha$, $y = \beta$, indem man irgend eine Einheit der Längenbestimmung zu Grunde legt. Auf diese Weise erhält man aus dem ersten Gliede den Punkt auf der Abscissenaxe: $x = l$, $y = 0$; sodann aus den folgenden gewisse Punkte mit abnehmenden Werthen von x und wachsenden Werthen von y; zuletzt den Punkt auf der Ordinatenaxe $x = 0$, $y = h$. (In der beistehenden Figur sind die Punkte eingetragen, welche zu dem Beispiel in der vorigen Anmerkung gehören.)


Fig. 20.

Sollen nun z. B. zwei Terme $A_{\alpha,\beta} z^{\alpha} w^{\beta}$ und $A_{\alpha'\beta'} z^{\alpha'} w^{\beta'}$ von gleicher Dimension werden, indem $w = z^{\mu}$ gesetzt wird (man beachte, dass nur positive Werthe von μ in Betracht kommen), so muss

$$\alpha + \beta\mu = \alpha' + \beta'\mu \quad \text{d. h.} \quad \mu = \frac{\alpha - \alpha'}{\beta' - \beta}$$

sein. Aus dieser Relation ergiebt sich aber folgender Satz: Verbindet

man den Punkt $\alpha\beta$ mit dem Punkte $\alpha'\beta'$ durch eine Gerade, welche also die Gleichung erhält

$$\frac{x-\alpha}{\alpha'-\alpha}-\frac{y-\beta}{\beta'-\beta}=0 \quad \text{oder} \quad (x-\alpha)+\mu(y-\beta)=0,$$

so liegen die Punkte α'', β'', welche zu Termen gehören, welche dieselbe Dimension erhalten, auf dieser Geraden; die Punkte dagegen, bei welchen die zugehörigen Terme von niederer Dimension werden, befinden sich auf der dem Coordinatenanfangspunkt zugekehrten Seite, während die übrigen, bei welchen die Dimensionen grösser werden, auf der anderen Seite der Geraden liegen. Denn wird für einen Punkt α'', β'' $\alpha''+\beta''\mu=\alpha+\beta\mu=\alpha'+\beta'\mu$, so genügen die Coordinaten α'', β'' der Gleichung der Geraden. Ist $\alpha''+\beta''\mu<\alpha+\beta\mu$, so wird der Ausdruck $x-\alpha+\mu(y-\beta)$ durch Substitution der Werthe $x=\alpha''$, $y=\beta''$ ebenso wie für den Coordinatenanfangspunkt negativ; ist $\alpha''+\beta''\mu>\alpha+\beta\mu$, so wird er positiv. Daraus folgt die Regel: Nur solche in der Klammer stehende Terme können (bei irgend welcher Annahme von μ) von gleicher niedrigster Dimension werden, welche die Eigenschaft haben, dass die Verbindung der zugehörigen Punkte eine Gerade liefert, welche alle übrigen Punkte auf der dem Coordinatenanfangspunkte abgewandten Seite liegen lässt. Demnach handelt es sich darum, durch die gegebenen Punkte nur solche Verbindungsgeraden vom Punkte $z=l$, $w=0$ bis zum Punkte $z=0$, $w=h$ zu ziehen, dass ein Polygon entsteht, welches seine convexe Seite dem Coordinatenanfangspunkte zuwendet ($\mu>0$), während die nachbleibenden Punkte auf der concaven Seite sich befinden. Man drehe also im Punkte $z=l$, $w=0$ eine Gerade, die in ihrer Anfangslage mit der Abscissenaxe zusammenfällt, von links nach rechts, so lange, bis man zum erstenmal einen oder auch zugleich mehrere der construirten Punkte trifft. Der vom Drehpunkte am weitesten entfernte Punkt heisse α_1, β_1, so hat man Terme von kleinster Dimension:

$$A_{l,0}z^l+\sum A_{\alpha,\beta}z^\alpha w^\beta + A_{\alpha_1\beta_1}z^{\alpha_1}w^{\beta_1}$$

und der zugehörige Werth von μ ergiebt sich aus der Gleichung

$$l=\alpha_1+\mu\beta_1, \qquad \mu=\frac{l-\alpha_1}{\beta_1}.$$

Dies ist eine rationale Zahl grösser oder kleiner als 1; um hervortreten zu lassen, dass sie nicht immer eine ganze Zahl zu sein braucht, bezeichne man sie mit

$$\mu=\frac{l-\alpha_1}{\beta_1}=\frac{p_1}{q_1},$$

wobei p_1 und q_1 relativ prim sind. Aus der Substitution $w=z^{\frac{p_1}{q_1}}v$ geht ein Ausdruck hervor, aus welchem sich z^l absondern lässt, und

da das von z freie Glied für sich betrachtet verschwinden muss, so erhält man zur Bestimmung von v die Gleichung

$$A_{l,0} + \sum A_{\alpha,\beta} v^{\beta} + A_{\alpha_1\beta_1} v^{\beta_1} = 0.$$

Dieselbe ergiebt β_1 endliche Werthe für v_1, die auch zum Theil einander gleich sein können; so dass man aus dieser ersten Annahme die Anfangsglieder von β_1 Reihen gewinnen würde.

Nun betrachte man eine zweite Seite des Polygones, indem man in dem Punkte α_1, β_1 die Gerade weiter in der Richtung von links nach rechts dreht, bis sie einen oder mehrere der construirten Punkte trifft. Der am weitesten entfernte heisse: $\alpha_2 \beta_2$. Dann sind die zugehörigen Terme

$$A_{\alpha_1,\beta_1} z^{\alpha_1} w^{\beta_1} + \sum A_{\alpha,\beta} z^{\alpha} w^{\beta} + A_{\alpha_2,\beta_2} z^{\alpha_2} w^{\beta_2}$$

von gleicher Dimension, indem man

$$\alpha_1 + \mu\beta_1 = \alpha_2 + \mu\beta_2 \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2 - \beta_1} = \frac{p_2}{q_2}$$

setzt; und es folgt zur Bestimmung des Coefficienten v in der Substitution $w = v z^{\frac{p_2}{q_2}}$ die Gleichung vom Grade $\beta_2 - \beta_1$:

$$A_{\alpha_1,\beta_1} + \sum A_{\alpha,\beta} v^{\beta - \beta_1} + A_{\alpha_2,\beta_2} v^{\beta_2 - \beta_1} = 0.$$

Indem man dieses Verfahren fortsetzt, erhält man schliesslich aus der letzten Polygonseite, welche durch den Punkt $z = 0$, $w = h$ hindurchgehen muss, wenn die Anzahl der Polygonseiten gleich i ist, die Combination:

$$A_{\alpha_{i-1},\beta_{i-1}} z^{\alpha_{i-1}} w^{\beta_{i-1}} + \sum A_{\alpha,\beta} z^{\alpha} w^{\beta} + A_{0,h} w^h, \quad \mu = \frac{\alpha_{i-1}}{h - \beta_{i-1}} = \frac{p_i}{q_i}$$

und aus dieser zur Bestimmung des Coefficienten v in der Entwickelung $w = v . z^{\frac{p_i}{q_i}}$ die Gleichung vom Grade $h - \beta_{i-1}$:

$$A_{\alpha_{i-1},\beta_{i-1}} + \sum A_{\alpha,\beta} v^{\beta - \beta_{i-1}} + A_{0,h} v^{h - \beta_{i-1}} = 0.$$

Demnach lautet das Resultat: Besteht das Polygon aus i Seiten, so sind i verschiedene Entwickelungen möglich mit dem Anfangsgliede $w = v . z^{\frac{p}{q}}$; und zwar gehören, wenn die Coordinaten der Eckpunkte des Polygones

$$l, 0;\ \alpha_1, \beta_1;\ \alpha_2, \beta_2;\ \ldots\ \alpha_{i-1}, \beta_{i-1};\ 0 h$$

heissen, zu den Werthen:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{l - \alpha_1}{\beta_1};\quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2 - \beta_1};\ \ldots\ \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{\alpha_{i-2} - \alpha_{i-1}}{\beta_{i-1} - \beta_{i-2}};\quad \frac{p_i}{q_i} = \frac{\alpha_{i-1}}{h - \beta_{i-1}}$$

bezüglich

$$\beta_1; \qquad \beta_2 - \beta_1; \qquad \ldots \qquad \beta_{i-1} - \beta_{i-2}, \qquad h - \beta_{i-1}$$

mögliche Entwickelungen; es sind also in Summa h Entwickelungen der h Wurzeln von w, welche für $z=0$ ebenfalls Null werden, als möglich nachgewiesen.

Die Grössen $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \dots \frac{p_i}{q_i}$ bilden, wie ein Blick auf die Figur lehrt, weil die negativen Werthe dieser Zahlen die trigonometrische Tangente der Winkel angeben, welche die Polygonseiten mit der positiven Richtung der x-Axe einschliessen, eine abnehmende Reihe von Zahlen.

Es muss gezeigt werden, dass sie auch wirklich alle nothwendig sind, um die h Entwickelungen von w zu erhalten.

Man betrachte die β_1 möglichen Entwickelungen, welche zur ersten Polygonseite, also zu dem Werthe $\frac{p_1}{q_1}$ gehören; es ist β_1 entweder gleich q_1 oder ein Vielfaches dieser Zahl; man setze $\beta_1 = k_1 q_1$. Da nun für jeden Punkt α, β, welcher auf der betrachteten Polygonseite liegt,

$$\alpha + \mu\beta = \alpha_1 + \mu\beta_1 = l$$

ist, so ist

$$\mu = \frac{l-\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{q_1},$$

und folglich ist auch jedes β gleich q oder gleich einem Vielfachen von q; ich setze $\beta = k q_1$.

Man substituire in die Gleichung, aus welcher das zugehörige v berechnet wird, für v den Werth $\lambda^{\frac{1}{q_1}}$, so lautet dieselbe:

$$A_{l,0} + \Sigma A_{\alpha\beta}\,\lambda^k + A_{\alpha_1\beta_1}\,\lambda^{k_1} = 0.$$

Sie ergiebt k_1 endliche Werthe für λ, welche auch zum Theil einander gleich sein können. Jeder einfachen Wurzel solch einer Gleichung entspricht dann ein Cyclus von q_1 Werthen; das Anfangsglied dieser Entwickelung lautet:

$$w = \lambda^{\frac{1}{q_1}} \cdot z^{\frac{p_1}{q_1}},$$

wobei für $\lambda^{\frac{1}{q_1}}$ einer der q_1 möglichen Wurzelwerthe festgehalten werden kann, während für $z^{\frac{p_1}{q_1}}$ die q_1 verschiedenen Wurzelwerthe eintreten.

Man erkennt, dass, falls alle Wurzeln der Gleichungen für λ einfache werden, die β_1, $\beta_2 - \beta_1 \dots h - \beta_{i-1}$ Entwickelungen, welche zu den i Polygonseiten gehören, sich bezüglich in $k_1, k_2 \dots k_i$ Cyclen von je $q_1, q_2 \dots q_i$ Werthen auflösen, so dass in der That alle diese Entwickelungen auch nothwendig sind, um die h Werthe von w, welche für $z=1$ ebenfalls Null werden, darzustellen.

In Bezug auf jede einfache Wurzel λ erhält man nun das nächstfolgende Glied in der Entwickelung:

$$w = vz^{\frac{p}{q}} + v_1 z^{\frac{p+1}{q}} + \ldots = vz^{\frac{p}{q}}\left(1 + \frac{v_1}{v} z^{\frac{1}{q}}\right)$$

indem man die nächstfolgende Dimension von z bei der Substitution des Werthes w berücksichtigt. Der Coefficient derselben liefert, gleich Null gesetzt, eine lineare Gleichung zur Bestimmung von v_1.

Es ist zu untersuchen, was eine vielfache Wurzel λ der Gleichung

$$A_{l,0} + \Sigma A_{\alpha\beta}\lambda^k + A_{\alpha_1\beta_1}\lambda^{k_1} = 0$$

für eine Bedeutung hat; es sei dieselbe i-fach vorhanden; alsdann muss jede der Formen

$$w = \lambda^{\frac{1}{q_1}} z^{\frac{p_1}{q_1}}$$

das Anfangsglied von $q_1 i$ Entwickelungen sein; diese selbst aber werden wieder in gewisse Cyclen zerfallen. Um dieses einzusehen, setze man

$$z = z'^{q_1}, \quad w = \left(\lambda^{\frac{1}{q_1}} + w'\right) z'^{p_1}$$

in die ursprüngliche algebraische Entwickelung ein. Dieselbe verwandelt sich durch diese Substitution in eine Gleichung zwischen z' und w', welche, nach Potenzen dieser Grössen entwickelt, die Eigenschaft haben muss, dass für $z' = 0$ i Wurzeln w' ebenfalls Null werden. In der That geht

$$[A_{l,0} z^l + \Sigma A_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta + A_{\alpha_1\beta_1} z^{\alpha_1} w^{\beta_1}] + [\Sigma A_{\alpha',\beta'} z^{\alpha'} w^{\beta'} + A_{0,h} w^h + \varphi(z, w)],$$

in welcher nur die erste Klammer die Terme niedrigster Dimension enthält, was diese Terme anlangt, über in:

$$A_{l,0} z'^{lq_1} + \Sigma A_{\alpha,\beta} z'^{\alpha q_1}\left(\lambda^{\frac{1}{q}} + w'\right)^\beta z'^{\beta p_1} + A_{\alpha_1\beta_1} z'^{\alpha_1 q_1}\left(\lambda^{\frac{1}{q}} + w'\right)^\beta z^{\beta_1 p_1},$$

oder nach Division mit der niedrigsten Potenz von z', deren Exponent $lq_1 = \alpha q_1 + \beta p_1 = \alpha_1 q_1 + \beta_1 p_1$ ist:

$$A_{l,0} + \Sigma A_{\alpha,\beta}\left(\lambda^{\frac{1}{q}} + w'\right)^\beta + A_{\alpha_1\beta_1}\left(\lambda^{\frac{1}{q}} + w'\right)^{\beta_1},$$

und hier verschwindet das von w' freie Glied, weil λ eine Wurzel der Gleichung:

$$A_{l,0} + \Sigma A_{\alpha,\beta}\lambda^{\frac{\beta}{q}} + A_{\alpha_1\beta_1}\lambda^{\frac{\beta_1}{q}} = A_{l,0} + \Sigma A_{\alpha,\beta}\lambda^k + A_{\alpha_1\beta_1}\lambda^{k_1} = 0.$$

Weil aber λ eine i-fache Wurzel dieser Gleichung sein soll, so verschwinden auch die $i-1$ ersten Ableitungen in Bezug auf λ.

Man untersuche nun die Gleichung zwischen z' und w' in derselben Weise, wie die ursprüngliche zwischen z und w, indem man zu den Dimensionen ihrer Glieder das entsprechende Polygon construirt. Jede Polygonseite führt zu einer Auswahl von Gliedern gleicher niedrigster Dimension, und jede dieser Auswahl entsprechende einfache Wurzel zum Anfangsgliede einer Entwickelung:

$$w' = \lambda'^{\frac{1}{q'}} z'^{\frac{p'}{q'}},$$

wobei der Nenner q' die Anzahl der Cyclen angiebt. Da nun

$$z' = z^{\frac{1}{q_1}} \quad \text{und} \quad w = \left(\lambda^{\frac{1}{q_1}} + w'\right) z'^{p_1},$$

so lauten die ersten beiden Glieder der Entwickelung von w nach z:

$$w = \lambda^{\frac{1}{q_1}} z^{\frac{p_1}{q_1}} + \lambda'^{\frac{1}{q'}} z^{\frac{p'+q'p_1}{q'q_1}}.$$

Man kann dabei unter $\lambda^{\frac{1}{q_1}}$, $\lambda'^{\frac{1}{q'}}$ je einen der möglichen Wurzelwerthe festhalten, während die Wurzelwerthe von z alle möglichen $q_1 q'$ Werthe erhalten. Man erkennt, dass ein Cyclus von $q_1 q'$ Zweigen entsteht; das nächstfolgende Glied ist durch die Substitution

$$w = \lambda^{\frac{1}{q_1}} z^{\frac{p_1}{q_1}} + \lambda'^{\frac{1}{q'}} z^{\frac{p'+q'p_1}{q_1 q'}} + v z^{\frac{p'+q'p_1+1}{q_1 q'}} + \dots$$

zu ermitteln. Tritt aber in der Gleichung zwischen w' und z' wieder eine vielfache Wurzel auf, so führe man in derselben Weise die Variabelen z'' und w'' ein, so wird zufolge der Substitutionen

$$w = \lambda^{\frac{1}{q_1}} z^{\frac{p_1}{q_1}}, \quad z = z'^{q_1}, \quad w = \left(\lambda^{\frac{1}{q_1}} + w'\right) z'^{p_1}, \quad z' = z''^{q'}, \quad w' = \left(\lambda'^{\frac{1}{q'}} + w''\right) z''^{p'},$$

falls diese Substitution zu einem Cyclus zwischen w'' und z'' führt,

$$w'' = \lambda''^{\frac{1}{q''}} z''^{\frac{p''}{q''}},$$

also:

$$w' = \lambda'^{\frac{1}{q'}} z^{\frac{p'}{q'}} + \lambda''^{\frac{1}{q''}} z'^{\frac{p''+q''p'}{q''q'}},$$

$$w = \lambda^{\frac{1}{q_1}} z^{\frac{p_1}{q_1}} + \lambda'^{\frac{1}{q'}} z^{\frac{p'+q'p_1}{q'q_1}} + \lambda''^{\frac{1}{q''}} z^{\frac{p''+q''p'+p_1 q'q''}{q_1 q' q''}} + \dots,$$

es entsteht ein Cyclus von $q_1 q' q''$ Werthen.

Es können nun mehrere solcher Substitutionen nöthig sein, aber schliesslich muss eine endliche Anzahl zu einer einfachen Wurzel führen.

Man sieht dies folgendermassen ein: Da i eine vielfache Wurzel der Gleichung vom Grade k_1 ist, so ist i kleiner, allenfalls gleich k_1. Es findet also im allgemeinen eine Abnahme der Vielfachheit statt, und durch fortgesetzten Process wird man im allgemeinen zu einem einfachen Punkte gelangen, der auch nur eine einfache Wurzel liefert. Nur dann würde der Process nicht zum gewünschten Ziele führen, wenn von einer Stelle ab die Vielfachheit der Wurzel stets gleich bleibt dem Grade der betreffenden Gleichung. Diese Annahme steht aber in Widerspruch mit der Forderung, dass die betrachtete Form irreducibel ist.

Denn nehmen wir an, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, dass von vornherein die Gleichung

$$A_{l,0} + \Sigma A_{\alpha,\beta}\lambda^k + A_{\alpha_1\beta_1}\lambda^{k_1} = 0$$

eine k_1-fache Wurzel hat, also gleich

$$A_{\alpha_1\beta_1}(\lambda - \lambda_0)^{k_1} = 0$$

ist, so hat die ursprüngliche Gleichung die Form:

$$z^{\alpha_1}A_{\alpha_1\beta_1}\,[w^{q_1} - \lambda_0 z^{p_1}]^{k_1} + \varphi(z, w) = 0.$$

Durch die Substitution: $z = z'^{q_1}$, $w = \left(\lambda_0^{\frac{1}{q_1}} + w'\right) z'^{p_1}$ und durch Division mit dem Factor $z'^{q_1(\alpha_1+p_1k_1)} = z'^{q_1l}$ erhält man die Gleichung zwischen z' und w':

$$A_{\alpha_1\beta_1}\left[\left(\lambda_0^{\frac{1}{q_1}} + w'\right)^{q_1} - \lambda_0\right]^{k_1} + \psi(z', w') = 0,$$

in welcher $\psi(z', w')$ die aus φ hervorgehenden Glieder bezeichnet; die niedrigste Potenz von w' ist w'^{k_1}. Der Annahme zufolge soll diese Gleichung für die Entwickelung von w' nur eine einzige k_1-fach zählende Wurzel liefern. Das erfordert aber, dass sich das zugehörige Polygon auf eine einzige Gerade reducirt, dass also die entsprechende Entwickelung lautet:

$$A[w' - \lambda' z'^{p'}]^{k_1} + \varphi_1(z', w') = 0.$$

Denkt man sich nun die weiteren Substitutionen ausgeführt, und erhielte man immer wieder eine Gleichung vom Grade k_1 zwischen w und z, so würde eine Entwickelung bestehen:

$$w = \lambda^{\frac{1}{q_1}} z^{\frac{p_1}{q_1}} + \lambda' z^{\frac{p_1+p'}{q_1}} + \lambda'' z^{\frac{p_1+p'+p''}{q_1}} + \ldots,$$

die Gültigkeit haben müsste, wie gross auch immer die Exponenten von z werden. Durch diese Entwickelung würden k_1 Wurzeln der Gleichung dargestellt. Die algebraische Form enthielte also innerhalb eines gewissen Gebietes von z (und folglich überhaupt) k_1 gleiche Wurzeln. Da man, von einem Werthe w ausgehend, eine irreducibele Form herstellen kann (§. 199), deren Wurzelwerth w ist, so folgt, dass die ursprüngliche algebraische Form bei der getroffenen Annahme die k^{te} Potenz eines irreducibelen Factors enthalten oder gleich der k^{ten} Potenz einer solchen Form sein müsste.

203. Das in der Anmerkung zu §. 201 angeführte Beispiel

$$A_{9,0}z^9 + A_{7,1}z^7w + A_{5,2}z^5w^2 + A_{4,4}z^4w^4 + A_{1,5}zw^5 + A_{0,7}w^7 + \varphi(z,w) = 0,$$

wobei

$$\varphi(z, w) = A_{1,6}z^1w^6 + A_{7,2}z^7w^2 + A_{5,4}z^5w^4 + A_{0,8}w^8 + A_{10,0}z^{10},$$

in welchem für $z = 0$ sieben Werthe von w ebenfalls Null werden,

führt, wie das Polygon S. 401 lehrt, zu den drei Aggregaten von Gliedern gleicher Dimension:

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & A_{9,0}z^9 + A_{7,1}z^7 w + A_{5,2}z^5 w^2 = 0, \\ \text{II.}\quad & A_{5,2}z^5 w^2 + A_{1,5}z w^5 = 0, \\ \text{III.}\quad & A_{1,5}z w^5 + A_{0,7}w^7 = 0. \end{aligned}$$

ad I. gehört der Werth

$$\mu = \frac{9-7}{1} = \frac{9-5}{2} = 2;$$

und setzt man demnach $w = vz^2$, so erhält man die quadratische Gleichung für v:

$$A_{9,0} + A_{7,1}v + A_{5,2}v^2 = 0.$$

Hat dieselbe zwei verschiedene Wurzeln, v_1 und v_2, so giebt es zwei Entwickelungen von w nach ganzen Potenzen von z, die bezüglich mit dem Gliede

$$w = v_1 z^2 \quad \text{und} \quad w = v_2 z^2$$

beginnen. Dieselben sind hier nicht verzweigt. Das nächstfolgende Glied bestimmt man aus der Substitution:

$$w = v_1 z^2 \left[1 + \frac{v_3}{v_1} z\right] \quad \text{und} \quad w = v_2 z^2 \left[1 + \frac{v_3'}{v_2} z\right],$$

indem man die Glieder zehnter Dimension bestimmt und die Summe derselben gleich Null setzt; es wird:

$$v_3 = -\frac{A_{10,0}}{2A_{5,2}v_1 + A_{7,1}}, \qquad v_3' = -\frac{A_{10,0}}{2A_{5,2}v_2 + A_{7,1}}.$$

Sind aber die beiden Wurzeln einander gleich, $v_1 = v_2 = v$, ist also

$$A_{7,1}^2 - 4A_{9,0}A_{5,2} = 0 \quad \text{und} \quad 2A_{5,2}v + A_{7,1} = 0,$$

so setze man $w = (v + w')z^2$; in der Gleichung zwischen z und w', welche sich nach Division mit dem Gliede z^9 ergiebt, werden für $z = 0$ zwei Werthe w' ebenfalls gleich Null. Dieselbe lautet:

$$\begin{aligned} A_{9,0} + A_{7,1}(v+w') + A_{5,2}(v+w')^2 + A_{4,4}z^3(v+w')^4 + A_{1,5}z^2(v+w')^5 + \\ + A_{0,7}z^5(v+w')^7 + \ldots + A_{10,0}z = 0, \end{aligned}$$

oder, zufolge der Bedingung für v geordnet in der erforderlichen Weise:

$$A_{10,0}z + A_{5,2}w'^2 + \ldots = 0.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$w' = \pm\sqrt{\frac{-A_{10,0}}{A_{5,2}}} \cdot z^{\frac{1}{2}},$$

und folglich erhält man:

$$w = vz^2 + \sqrt{\frac{-A_{10,0}}{A_{5,2}}} \cdot z^{\frac{5}{2}} + \ldots,$$

also eine Reihe, welche nach Potenzen von $z^{\frac{1}{2}}$ fortschreitet; es sind zwei Werthe der Function cyclisch verzweigt.

Ist aber $A_{10,0} = 0$, so lauten die Anfangsglieder:

$$A_{1,5} z^2 v^5 + A_{5,2} w'^2 = 0,$$

demnach wird:

$$w' = \pm \sqrt{\frac{-A_{1,5} v^5}{A_{5,2}}}\, z,$$

und man erhält die beiden getrennten Entwickelungen, die nur im Anfangsgliede übereinstimmen:

$$w = v z^2 + \sqrt{\frac{-A_{1,5} v^5}{A_{5,2}}}\, z^3 + \dots, \qquad w = v z^2 - \sqrt{\frac{-A_{1,5} v^5}{A_{5,2}}}\, z^3 - \dots$$

ad II. gehört der Werth

$$\mu = \frac{5-1}{5-2} = \frac{4}{3},$$

und zu $w = v z^{\frac{4}{3}}$ findet man die Gleichung:

$$A_{5,2} v^2 + A_{1,5} v^5 = 0 \quad \text{oder} \quad A_{5,2} + A_{1,5} \lambda = 0, \qquad \lambda^{\frac{1}{3}} = v.$$

Mithin ist ein Cyclus von drei Zweigen vorhanden; die bezügliche Entwickelung lautet:

$$w = \sqrt[3]{\frac{-A_{5,2}}{A_{1,5}}}\, z^{\frac{4}{3}} + v z^{\frac{5}{3}} + \dots$$

ad III. gehört der Werth:

$$\mu = \frac{1}{7-5} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad A_{1,5} + A_{0,7} \lambda = 0;$$

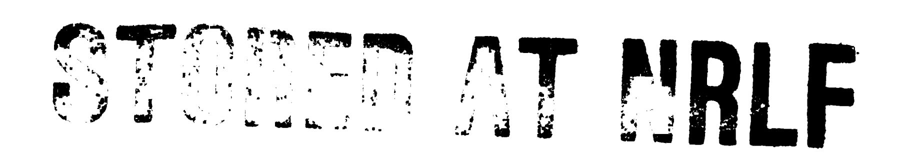
also

$$w = \sqrt[2]{\frac{-A_{1,5}}{A_{0,7}}} \cdot z^{\frac{1}{2}} + v z^{\frac{2}{2}} + \dots$$

Damit sind die sieben Werthe von w, welche für $z = 0$ ebenfalls verschwinden, in dem sechselementigen Punkte in ihrer expliciten Darstellung angedeutet.

Berichtigungen.

S. 33 Anmerk. statt „von der zweiten Ordnung" l. „von höherer als der ersten Ordnung".
S. 60 Zeile 19 u. 20 statt „die Summe aus den Grenzwerthen" l. „der Grenzwerth aus den Summen".
S. 94 Zeile 3 v. u. statt „für Δy" l. „für $\Delta y = 0$".
S. 96 Zeile 2 v. u. ist vor $y = 0$ das Wort „für" einzuschalten.
S. 203 Zeile 3 statt $\frac{\psi(\alpha)}{\varphi^{\lambda_1}(\alpha)}$ l. $\frac{\psi(\alpha)}{\lambda_1!\,\varphi^{\lambda_1}(\alpha)}$.


STORED AT NRLF


QA303.H27 Sci
3 2106 00232 3647

